Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 82-87
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.22014 Published Online April 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

Pullback $\mathcal{D}$-Attractor for the Non-Autonomous Nonlinear Thermoelastic Coupled Rod Equations with Strong Damping*

Danxia Wang, Jianwen Zhang

Department of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan
Email: {danxia.wang, jianwen.z2008}@163.com

Received: Feb. 8th, 2012; revised: Mar. 2nd, 2012; accepted: Mar. 9th, 2012

Abstract: In this paper, we consider the pullback $\mathcal{D}$-attractor for the non-autonomous nonlinear equations of thermoelastic coupled rod with strong damping. By Galerkin method, the existence and uniqueness of global solutions are proved under certain homogeneous boundary conditions and initial conditions in $V \times H \times H$; By prior estimates, the existence of the pullback $\mathcal{D}$-absorbing set is obtained; By proving the pullback $\mathcal{D}$-condition (*C*), the existence of the pullback $\mathcal{D}$-attractor of above mentioned equations is given.

Keywords: Strong Damping; Non-Autonomous; Thermoelastic Coupled Rod Equations; Pullback $\mathcal{D}$-Condition (*C*); Pullback $\mathcal{D}$-Attractor

具有强阻尼的非自治非线性热弹耦合杆方程组的拉回$\mathcal{D}$-吸引子*

王旦霞，张建文

太原理工大学数学学院，太原
Email: {danxia.wang, jianwen.z2008}@163.com

收稿日期：2012 年 2 月 8 日；修回日期：2012 年 3 月 2 日；录用日期：2012 年 3 月 9 日

摘　要：考虑了具有强阻尼的非自治非线性热弹耦合杆方程组的拉回$\mathcal{D}$-吸引子。首先利用 Galerkin 方法，证明了在一定的齐次边界条件和初始条件下系统在$V \times H \times H$中的整体解的存在唯一性；其次通过先验估计，证明了系统的拉回$\mathcal{D}$-吸收集的存在性；最后通过证明系统满足拉回$\mathcal{D}$-条件(*C*)，从而证明了系统的拉回$\mathcal{D}$-吸引子的存在性。

关键词：强阻尼；非自治；热弹耦合杆方程组；拉回$\mathcal{D}$-条件(*C*)；拉回$\mathcal{D}$-吸引子

1. 引言

本文考虑了具有强阻尼的非自治非线性热弹耦合杆方程组系统

$$u_{tt} - \Delta u - \gamma \Delta u_t + \beta \sin u + \nabla \tilde{\theta} = g_1(x,t). \tag{1.1}$$

$$\tilde{\theta}_t - k\Delta\tilde{\theta} + \nabla u_t = g_2(x,t). \tag{1.2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \tilde{\theta}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.3}$$

$$u(x,\tau) = u_0(x), \quad u_t(x,\tau) = p_0(x), \quad \tilde{\theta}(x,\tau) = \tilde{\theta}_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.4}$$

*资助信息：本文由国家自然科学基金(11172194)，山西省青年科技研究基金(2011021002-2)和山西省自然科学基金(2010011008)资助。

其中 γ,β,k 均为正常数，$g_1(x,t),g_2(x,t)\in L^2_{loc}(R,L^2(\Omega))$，$\Omega\subset R^n$ 是一有界光滑区域。本文讨论系统(1.1)~(1.4)在空间 $E_0=V\times H\times H$ 中的拉回 $\mathcal{D}$ -吸引子的存在性。

近年来，关于非自治无穷维动力系统的研究，越来越引起了人们的重视，并得到了快速的发展。在文献[1]中，Chepyzhov 和 Vishik 首先将自治系统的整体吸引子的概念推广到非自治系统的一致吸引子的概念，而一致吸引子的存在性关键在于相应的非自治系统的解算子的紧性，但是在一些非自治系统中，当 $t\to\infty$ 时，轨迹可能是无界的，这样非自治系统的一致吸引子的理论就不能应用于此系统中，对于非自治系统的这种情形的研究需引入不同的定义和不同的理论方法，其中整体吸引子作为一参数族 $\mathrm{A}(\sigma)$ 被定义，从 $-\infty$ 吸引了系统的所有解，称其为“拉回吸引子”[2]。文献[3]中，Yonghai Wang 重述了拉回吸引子的概念和定理，并证明了具有弱耗散的 Sine-Gordon 型波动方程系统当外力函数无界时的一个强的拉回吸引子的存在性。

关于非自治系统的拉回吸引子，再提到一些文献，文献[4]证明了非自治吊桥方程系统 $u_{tt}+\Delta^2u+\mu u_t+ku^+ +g(u)=f(x,t)$ 的弱的拉回 $\mathcal{D}$ -吸引子的存在性。文献[5]证明了具有强阻尼的非线性非自治梁方程系统 $u_{tt}+\alpha\Delta^2u+\gamma\Delta^2u_t-\left(\beta+k|\nabla u|^2\right)\Delta u+g(u)=f(x,t)$ 在弱空间 $H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 中的弱的拉回 $\mathcal{D}$ -吸引子的存在性。

本文证明了具有强阻尼的非自治非线性热弹耦合杆方程组系统，当外力函数和移动热源函数无界时的拉回 $\mathcal{D}$ -吸引子的存在性。事实上，外力函数 $g_1(x,t)$ 和移动热源函数 $g_2(x,t)$ 分别满足 $g_1(x,t)\in L^2_{loc}(R,L^2(\Omega))$ 和 $g_2(x,t)\in L^2_{loc}(R,L^2(\Omega))$，且对任意的 $t\in R$

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\delta s}(|g_1(s)|^2+|g_2(s)|^2)\mathrm{d}s<\infty \tag{1.5}$$

成立，其中 $0<\delta<\alpha_1(\alpha_1=\min\{\frac{\alpha}{8},\frac{\gamma\lambda}{4},\frac{k\lambda}{2}\},\ 0<\alpha\le\min\{\frac{\lambda}{4},-(1+\gamma^2\lambda)+\sqrt{(\gamma^2\lambda+1)^2+\frac{\gamma\lambda}{2}},\frac{k\lambda}{2}\})$ 是一个小的实数。

令 $V=H_0^1(\Omega)$，$H=L^2(\Omega)$，V 和 H 的内积和范数分别用 $((\cdot,\cdot))$，$\|\cdot\|$ 和 $(\cdot,\cdot)$,$|\cdot|$ 表示，它们的内积分别为 $((u,v))=\int_\Omega\nabla u\nabla v\mathrm{d}x$，$(u,v)=\int_\Omega uv\mathrm{d}x$，并用 V',H' 分别表示 V,H 的对偶空间。假设 λ 是 $(-\Delta)^{1/2}$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的第一特征值，则有

$$\|u\|^2\ge\lambda|u|^2,\quad \forall u\in V. \tag{1.6}$$

2. 整体解的存在唯一性

定理 1. 假设 $\gamma,\beta,k>0$，$g_1(x,t),g_2(x,t)\in L^2_{loc}(R,L^2(\Omega))$，则对任意给定的 $u_0\in V,p_0\in H,\tilde{\theta}_0\in H$，问题(1.1)~(1.4)存在唯一解 $(u,\tilde{\theta})$ 满足 $u\in C^0(R_\tau,V)\cap C^1(R_\tau,H)$，$\tilde{\theta}\in C^0(R_\tau,H)$，其中 $R_\tau=[\tau,\infty)$。

为了简单起见，记 $y(r)=(u(r),p(r),\tilde{\theta}(r))$，$y_0=(u_0,p_0,\tilde{\theta}_0)$，记 $E_0=V\times H\times H$，其上的范数为 $\|y\|_{E_0}=\|u\|^2+|p|^2+|\tilde{\theta}|^2$。由定理 1 解的存在唯一性，可以构建由问题(1.1)~(1.4)所产生的在空间 $E_0=V\times H\times H$ 上的非自治动力系统。考虑 $Q=R,\theta_t\tau=\tau+t$。定义

$$\Phi(t,\tau,y_0)=y(t+\tau,\tau,y_0)=\left(u(t+\tau),p(t+\tau),\tilde{\theta}(t+\tau)\right),\tau\in R,t\ge0,y_0\in E_0. \tag{2.1}$$

则问题(1.1)~(1.4)的解的存在唯一性表明

$$\Phi(t,\tau,y_0)=\Phi(t,s+\tau,\Phi(s,\tau,y_0)),\tau\in R,t\ge0,y_0\in E_0,$$

并且由(2.1)所定义的映射 Φ 是空间 $E_0=V\times H\times H$ 上的连续的光圈。

3. 拉回 $\mathcal{D}$ -吸收集

假设 $\Re_\delta$ 是由满足条件 $\lim\limits_{t\to-\infty}e^{\delta t}r^2(t)=0$ 的函数 $r:R\to(0,+\infty)$ 所组成的集合。假设 D_{δ,E_0} 表示对某个 $r_{\hat{D}}\in\Re_\delta$ 满足 $D(t)\subset\bar{B}(0,r_{\hat{D}}(t))$ 的集族 $\hat{D}=\{D(t);t\in R\}\subset P(E_0)$，其中 $\bar{B}(0,r_{\hat{D}}(t))$ 表示 E_0 中以 0 为圆心以 $r_{\hat{D}}(t)$ 为半径

的闭球。

定理 2. 假设$\gamma,\beta,k>0$， $g_1(x,t),g_2(x,t)\in L^2_{loc}\left(R,L^2(\Omega)\right)$满足(1.5)，则问题(1.1)~(1.4)所确定的通过(2.1)所定义的非自治动力系统(θ,Φ)在空间E_0中存在拉回$\mathcal{D}$-吸收集。

证明：设$t\in R,\tau\ge 0$及$y_0=\left(u_0,p_0,\tilde{\theta}_0\right)\in E_0$是固定的。对于$r\ge t-\tau$，定义

$$u(r)=u(r,t-\tau,u_0),\ p(r)=u'(r,t-\tau,p_0),\ \tilde{\theta}(r)=\tilde{\theta}\left(r,t-\tau,\tilde{\theta}_0\right),\ r\ge t-\tau,$$

和

$$\left(u(r),p(r),\tilde{\theta}(r)\right)=\Phi(r-t+\tau,t-\tau,y_0),\quad r\ge t-\tau.$$

用$v=u'+\alpha u$在H中和(1.1)作内积，$\tilde{\theta}$在H中和(1.2)作内积，两式相加得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}r}\left(\|u\|^2+|v|^2+\left|\tilde{\theta}\right|^2\right)+\gamma\|v\|^2-\alpha|v|^2+\alpha\|u\|^2+k\left\|\tilde{\theta}\right\|^2\\&\quad+\alpha^2(u,v)-\gamma\alpha(\nabla u,\nabla v)+\alpha\left(\nabla\tilde{\theta},u\right)+\beta(\sin u,v)=(g_1,v)+\left(g_2,\tilde{\theta}\right).\end{aligned}\tag{3.1}$$

由许瓦兹不等式，Young 不等式及(1.6)得

$$-\beta(\sin u,v)+(g_1,v)+\left(g_2,\tilde{\theta}\right)\le\frac{\beta^2}{\lambda\gamma}|\sin u|^2+\frac{\gamma}{4}\|v\|^2+\frac{\gamma}{4}\|v\|^2+\frac{1}{\lambda\gamma}|g_1|^2+\frac{k}{4}\left\|\tilde{\theta}\right\|^2+\frac{1}{k\lambda}|g_2|^2.$$

则从(3.1)，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}r}\left(\|u\|^2+|v|^2+\left|\tilde{\theta}\right|^2\right)+\frac{\gamma}{2}\|v\|^2-\alpha|v|^2+\alpha\|u\|^2+\frac{3k}{4}\left\|\tilde{\theta}\right\|^2\\&+\alpha^2(u,v)-\gamma\alpha(\nabla u,\nabla v)+\alpha\left(\nabla\tilde{\theta},u\right)\le\frac{\beta^2}{\lambda\gamma}|\sin u|^2+\frac{1}{\lambda\gamma}|g_1|^2+\frac{1}{k\lambda}|g_2|^2.\end{aligned}$$

又由 Young 不等式得

$$\alpha^2(u,v)\ge-\frac{\alpha^2}{2}|u|^2-\frac{\alpha^2}{2}|v|^2;$$

$$-\gamma\alpha(\nabla u,\nabla v)\ge-\gamma^2\alpha\|v\|^2-\frac{\gamma\alpha}{4\gamma}\|u\|^2=-\gamma^2\alpha\|v\|^2-\frac{\alpha}{4}\|u\|^2;$$

$$\alpha\left(\nabla\tilde{\theta},u\right)\ge-\frac{\alpha}{2}\left|\tilde{\theta}\right|^2-\frac{\alpha}{2}\|u\|^2.$$

则有

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma}{2}\|v\|^2-\alpha|v|^2+\alpha\|u\|^2+\frac{3k}{4}\left\|\tilde{\theta}\right\|^2+\alpha^2(u,v)-\gamma\alpha(\nabla u,\nabla v)+\alpha\left(\nabla\tilde{\theta},u\right)\\&\ge\frac{\alpha}{8}\|u\|^2+\left(\frac{\alpha}{8}\lambda-\frac{\alpha^2}{2}\right)|u|^2+\frac{\gamma}{4}\|v\|^2+\left(\frac{\gamma}{4}\lambda-\gamma^2\alpha\lambda-\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)|v|^2+\left(\frac{k}{4}\lambda-\frac{\alpha}{2}\right)\left|\tilde{\theta}\right|^2+\frac{k}{2}\|\theta\|^2.\end{aligned}$$

取$0<\alpha\le\min\left\{\frac{\lambda}{4},-\left(1+\gamma^2\lambda\right)+\sqrt{\left(\gamma^2\lambda+1\right)^2+\frac{\gamma\lambda}{2}},\frac{k\lambda}{2}\right\}$，则

$$\frac{\alpha}{8}\lambda-\frac{\alpha^2}{2}\ge 0,\quad \frac{\gamma}{4}\lambda-\gamma^2\alpha\lambda-\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\ge 0,\quad \frac{k}{4}\lambda-\frac{\alpha}{2}\ge 0.$$

取$\alpha_1=\min\left\{\frac{\alpha}{8},\frac{\gamma\lambda}{4},\frac{k\lambda}{2}\right\}$，则从(3.1)式有

$$\frac{d}{\mathrm{d}r}\left(\|u\|^2+|v|^2+\left|\tilde{\theta}\right|^2\right)+2\alpha_1\left(\|u\|^2+|v|^2+\left|\tilde{\theta}\right|^2\right)\le\frac{2\beta^2}{\lambda\gamma}|\Omega|+\frac{2}{\lambda\gamma}|g_1|^2+\frac{2}{k\lambda}|g_2|^2. \tag{3.2}$$

又 $\frac{d}{\mathrm{d}r}\left[e^{\delta r}\left(\|u\|^2+|v|^2+\left|\tilde{\theta}\right|^2\right)\right]=\delta e^{\delta r}\left(\|u\|^2+|v|^2+\left|\tilde{\theta}\right|^2\right)+e^{\delta r}\frac{d}{\mathrm{d}r}\left(\|u\|^2+|v|^2+\left|\tilde{\theta}\right|^2\right)$，故(3.2)式两边乘以 $e^{\delta r}$ ，并在 $[t-\tau,t]$ 上积分，得

$$\begin{aligned}
&e^{\delta t}\left(\|u(t)\|^2+|v(t)|^2+\left|\tilde{\theta}(t)\right|^2\right)\le e^{\delta(t-\tau)}\left(\|u(t-\tau)\|^2+|v(t-\tau)|^2+\left|\tilde{\theta}(t-\tau)\right|^2\right)\\
&+\int_{t-\tau}^{t}e^{\delta s}\left(\frac{2}{\lambda\gamma}|g_1(x,s)|^2+\frac{2}{k\lambda}|g_2(x,s)|^2\right)\mathrm{d}s+\frac{2\beta^2|\Omega|}{\lambda\gamma\delta}\left(e^{\delta t}-e^{\delta(t-\tau)}\right)\\
&+\int_{t-\tau}^{t}(\delta-\alpha_1)e^{\delta s}\left(\|u(s)\|^2+|v(s)|^2+\left|\tilde{\theta}(s)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

当 $\delta<\alpha_1$ 时，上式两边同乘以 $e^{-\delta t}$ 有

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|^2+|v(t)|^2+\left|\tilde{\theta}(t)\right|^2\le e^{-\delta\tau}\left(\|u(t-\tau)\|^2+|v(t-\tau)|^2+\left|\tilde{\theta}(t-\tau)\right|^2\right)\\
&+e^{-\delta t}\int_{t-\tau}^{t}e^{\delta s}\left(\frac{2}{\lambda\gamma}|g_1(x,s)|^2+\frac{2}{k\lambda}|g_2(x,s)|^2\right)\mathrm{d}s+\frac{2\beta^2|\Omega|}{\lambda\gamma\delta}\left(1-e^{-\delta\tau}\right).
\end{aligned}$$

记 $C_1=\max\left\{2,1+\frac{2\alpha^2}{\lambda}\right\}$，因为 $\|u(t)\|^2+|p|^2+\left|\tilde{\theta}\right|^2\le C_1\left(\|u(t)\|^2+|v|^2+\left|\tilde{\theta}\right|^2\right)$，故有

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|^2+|p(t)|^2+\left|\tilde{\theta}(t)\right|^2\le C_1{}^2e^{-\delta\tau}\left[\|u(t-\tau)\|^2+|p(t-\tau)|^2+\left|\tilde{\theta}(t-\tau)\right|^2\right)\\
&+C_1e^{-\delta t}\int_{t-\tau}^{t}e^{\delta s}\left(\frac{2}{\lambda\gamma}|g_1(x,s)|^2+\frac{2}{k\lambda}|g_2(x,s)|^2\right)\mathrm{d}s+\frac{2C_1\beta^2|\Omega|}{\lambda\gamma\delta}\left(1-e^{-\delta\tau}\right).
\end{aligned}\tag{3.3}$$

因此，对于任意的 $\hat{D}\in D_{\delta,E_0}$ ，对于一切的 $y(t-\tau)=y_0\in D(t-\tau)$ ， $t\in R,\ \tau\ge 0$ ，从(3.3)有

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(t,t-\tau,y_0)\|_{E_0}^2\le C_1{}^2e^{-\delta\tau}\left[\|u(t-\tau)\|^2+|p(t-\tau)|^2+\left|\tilde{\theta}(t-\tau)\right|^2\right)\\
&+C_1e^{-\delta t}\int_{-\infty}^{t}e^{\delta s}\left(\frac{2}{\lambda\gamma}|g_1(x,s)|^2+\frac{2}{k\lambda}|g_2(x,s)|^2\right)\mathrm{d}s+\frac{2C_1\beta^2|\Omega|}{\lambda\gamma\delta}\left(1-e^{-\delta\tau}\right).
\end{aligned}$$

设 $\left(R_\delta(t)\right)^2=2C_1e^{-\delta t}\int_{-\infty}^{t}e^{\delta s}\left(\frac{2}{\lambda\gamma}|g_1(x,s)|^2+\frac{2}{k\lambda}|g_2(x,s)|^2\right)\mathrm{d}s+\frac{4C_1\beta^2|\Omega|}{\lambda\gamma\delta}$，定义 $B_\delta(t)=\left\{v\in E_0,\|v\|_{E_0}\le R_\delta(t)\right\}$，考虑空间 E_0 中的闭球族 $\hat{B}_{\delta,E_0}$ ，则 $\hat{B}_{\delta,E_0}\in D_{\delta,E_0}$ 是共圈 Φ 的拉回 D_{δ,E_0} -吸收集。

4. E_0 中的拉回 D_{δ,E_0} 吸引子

为了得到拉回 D_{δ,E_0} 吸引子的存在性，首先介绍下面的引理

引理 4.1[3]：设 H 是具有正交基 $\{\omega_i\}_{i\in N}$ 的无穷维内积空间，假设 $g_1(x,t),g_2(x,t)\in L_{loc}^2(R,H)$，并且对于一切的 $t\in R$ ，某个 $\delta\ge 0$ ， $\int_{-\infty}^{t}e^{\delta s}\left(|g_1(x,s)|_H^2+|g_2(x,s)|_H^2\right)\mathrm{d}s<\infty$ 成立，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{t}e^{\delta s}\left(\left|(I-P_n)g_1(x,s)\right|_H^2+\left|(I-P_n)g_2(x,s)\right|_H^2\right)\mathrm{d}s=0,\forall t\in R. \tag{4.1}$$

其中 $P_n:H\to span\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 的一个正交投影。

引理 4.2[6]：假设 λ_n,ω_n 分别是 $-\Delta$ 的第 n 个特征值和第 n 个特征向量，并且 $\lambda_n\to\infty$ (当 $n\to\infty$)，假设 B 是 V 中的任意的有界子集，那么对于一切 $\varepsilon>0$，存在某个 n_0 使得当 $n\ge n_0$ 时，

$$\left\|\left(I-P_n\right)\sin u\right\|_V \le \varepsilon, \forall u \in B.$$

其中 $P_n : V \to span\{\omega_1, \cdots \omega_n\}$ 的一正交投影。

定理 3. 假设 $\gamma, \beta, k > 0$， $g_1(x,t), g_2(x,t) \in L^2_{loc}\left(R, L^2(\Omega)\right)$ 满足(1.5)，则与问题(1.1)~(1.4)相应的由(2.1)所定义的非自治的动力系统 (θ, Φ) 在 E_0 中存在拉回 D_{δ, E_0} -吸引子。

证明：为了证明本定理，只需要证明 E_0 中拉回 $\mathcal{D}$ -条件 (C) 成立即可。

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 为 A 的特征值， $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n \cdots$ 为其对应的在空间 H 中的特征向量，并且当 $j \to \infty$ 时，$\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \cdots, \lambda_j \to \infty$，这样 $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ 也构成 V 的直交基，记 $V_n = \{\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n\}$， $P_n : V \to V_n$ 是一直交投影，则对于任意的 $u \in V$，有 $u = P_n u + \left(I - P_n\right) u \overset{\Delta}{=} u_1 + u_2$。

用 $v_2 = u_2' + \alpha u_2$ 与(1.1)式在 H 中作内积，用 $\tilde{\theta}_2$ 与(1.2)式在 H 中作内积，两式相加，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\left\|u_2(t)\right\|^2 + \left|v_2(t)\right|^2 + \left|\tilde{\theta}_2(t)\right|^2\right) + \gamma\left\|v_2(t)\right\|^2 - \alpha\left|v_2(t)\right|^2 + \alpha\left\|u_2(t)\right\|^2 + k\left\|\tilde{\theta}_2(t)\right\|^2$$
$$+\alpha^2\left(u_2(t), v_2(t)\right) - \gamma\alpha\left(\nabla u_2(t), \nabla v_2(t)\right) + \alpha\left(\nabla\tilde{\theta}_2, u_2\right) + \beta\left(\left(I-P_n\right)\sin u, v_2\right) = \left(g_1, v_2\right) + \left(g_2, \tilde{\theta}_2\right).$$

类似于定理 2 的分析，得

$$\frac{d}{dr}\left(\left\|u_2\right\|^2 + \left|v_2\right|^2 + \left|\tilde{\theta}_2\right|^2\right) + 2\alpha_1\left(\left\|u_2\right\|^2 + \left|v_2\right|^2 + \left|\tilde{\theta}_2\right|^2\right) \le \frac{2\beta^2}{\lambda\gamma}\left|\left(I-P_n\right)\sin u\right| + \frac{2}{\lambda\gamma}\left|\left(I-P_n\right)g_1\right|^2 + \frac{2}{k\lambda}\left|\left(I-P_n\right)g_2\right|^2.$$

由 Gronwall 不等式得

$$\left\|u_2(t)\right\|^2 + \left|p_2(t)\right|^2 + \left|\tilde{\theta}_2(t)\right|^2 \le C_1^2 e^{-\alpha_1\tau}\left[\left\|u(t-\tau)\right\|^2 + \left|p(t-\tau)\right|^2 + \left|\tilde{\theta}(t-\tau)\right|^2\right]$$
$$+\frac{2C_1\beta^2}{\lambda\gamma}\int_{t-\tau}^{t} e^{-\alpha_1(t-s)}\left|\left(I-P_n\right)\sin u\right|^2 \mathrm{d}s + C_1\int_{t-\tau}^{t} e^{-\alpha_1(t-s)}\left(\frac{2}{\lambda\gamma}\left|\left(I-P_n\right)g_1(x,s)\right|^2 + \frac{2}{k\lambda}\left|\left(I-P_n\right)g_2(x,s)\right|^2\right)\mathrm{d}s.$$

对于任意的 $\hat{D} \in D_{\delta, E_0}$，一切的 $y(t-\tau) = y_0 \in D(t-\tau)$， $t \in R,\ \tau \ge 0$，由上式得

$$\left\|\Phi_2\left(\tau, t-\tau, y_0\right)\right\|_{E_0}^2 \le C_1^2\left(R(t-\tau)\right)^2 e^{-\alpha_1\tau} + \frac{2C_1\beta^2}{\lambda\gamma}\int_{t-\tau}^{t} e^{-\alpha_1(t-s)}\left|\left(I-P_n\right)\sin u\right|^2 \mathrm{d}s$$
$$+C_1\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_1(t-s)}\left(\frac{2}{\lambda\gamma}\left|\left(I-P_n\right)g_1(x,s)\right|^2 + \frac{2}{k\lambda}\left|\left(I-P_n\right)g_2(x,s)\right|^2\right)\mathrm{d}s.$$

对于任意的 $t' \in [t-\tau, t]$，

$$\int_{t-\tau}^{t'} e^{-\alpha_1(t-s)}\left|\left(I-P_n\right)\sin u\right|^2 \mathrm{d}s \le \frac{|\Omega|}{\alpha_1}\left(e^{-\alpha_1(t-t')} - e^{-\alpha_1\tau}\right) \le \frac{|\Omega|}{\alpha_1}e^{-\alpha_1(t-t')},$$

则对于任意的 $t \in R, \varepsilon > 0, \exists t_1 = t(\varepsilon, t) \in (t-\tau, t)$ 和 $\tau_1 = \tau(\varepsilon, t_1, t) \ge 0$ 使得当 $\tau \ge \tau_1$ 时， $u(s) = u(s; t-\tau, u_0) \in B_\delta(s)$，对于任意的 $s \in [t-\tau, t_1]$，任意 $y_0 \in D(t-\tau)$，

$$\int_{t-\tau}^{t_1} e^{-\alpha_1(t-s)}\left|\left(I-P_n\right)\sin u\right|^2 \mathrm{d}s \le \frac{\varepsilon\lambda\gamma}{8C_1\beta^2}, \forall \tau \ge \tau_1.$$

令 $\tilde{R} = \max_{s\in[t_1,t]} R_\delta(s) < \infty$，则对于 $\tau \ge \tau_1$，任意 $s \in [t_1, t]$， $y_0 \in D(t-\tau)$ 有 $u(s) = u(s; t-\tau, u_0) \le \tilde{R}$。由引理 4.2，我们可以选择 $n_1 = n(\varepsilon, t) \in N$，对于 $n \ge n_1, \|u\|^2 \le \tilde{R}$ 使得

$$\int_{t_1}^{t}\left|\left(I-P_n\right)\sin u\right|^2 \mathrm{d}s \le \frac{\varepsilon\lambda\gamma}{8C_1\beta^2},$$

从而对于 $n \ge n_1, \tau \ge \tau_1$，有

$$\frac{2C_1\beta^2}{\lambda\gamma}\int_{t-\tau}^{t} e^{-\alpha_1(t-s)}\left|(I-P_n)\sin u\right|^2 \mathrm{d}s \le \frac{2C_1\beta^2}{\lambda\gamma}\int_{t-\tau}^{t_1} e^{-\alpha_1(t-s)}\left|(I-P_n)\sin u\right|^2 \mathrm{d}s + \frac{2C_1\beta^2}{\lambda\gamma}\int_{t_1}^{t} e^{-\alpha_1(t-s)}\left|(I-P_n)\sin u\right|^2 \mathrm{d}s \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

由引理 4.1，可以选取 n_2, n_3 足够大使得当 $n \ge \max\{n_2, n_3\}$ 时

$$C_1\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_1(t-s)}\left(\frac{2}{\lambda\gamma}\left|(I-P_n)g_1(x,s)\right|^2 + \frac{2}{k\lambda}\left|(I-P_n)g_2(x,s)\right|^2\right)\mathrm{d}s \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

又 $\exists \tau_2 \ge 0$，使得 $\tau \ge \tau_2, y_0 \in D(t-\tau)$ 时，有

$$C_1^2\left(R(t-\tau)\right)^2 e^{-\alpha_1\tau} \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

综上，令 $\tau_0 = \max\{\tau_1, \tau_2\}$， $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$，则对于任意的 $\tau \ge \tau_0, n \ge n_0, y_0 \in D(t-\tau)$ 使得

$$\left\|\Phi_2(\tau, t-\tau, y_0)\right\|_{E_0}^2 \le \varepsilon.$$

故拉回 $\mathcal{D}$ -条件(C)成立，证毕。

参考文献 (References)

[1] T Caraballo, G. Lukaszewicz and J. Real. Pullback attractors for asymptotically compact nonautonomous dynamical systems. Nonlinear Analysis, 2006, 64(3): 484-498.

[2] V. Chepyzhov, M. Vishik. Attractors for equations of mathematical physics. American Mathematical Society Colloquium Publications, 2002.

[3] Y. Wang, C. Zhong. Pullback $\mathcal{D}$ -attractors for nonautonomous Sine-Gordon equations. Nonlinear Analysis, 2007, 67(7): 2137-2148.

[4] J. Y. Park, J. R. Kang. Pullback $\mathcal{D}$ -attractors for non-autonomous suspension brige equations. Nonlinear Analysis, 2009, 71(10): 4618-4623.

[5] X. L. Zhang, Q. Z. Ma. Existence of pullback $\mathcal{D}$ -attractors of the nonlinear extensible beam equations. Journal of Southwest University, 2011, 3: 22-26.

[6] S. Wang, D. Li and C. Zhong. On the dynamics of a class of nonclassical parabolic equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 317(2): 565-582.