Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 202-206
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24031 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Viscosity Hybrid Subsequence Iterative Algorithm for the Fixed Points of Asymptotic Nonexpansive Mappings*

Weiwei Sun, Yuanheng Wang#

College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua
Email: #yhwang@zjnu.edu.cn

Received: Jun. 20th, 2012; revised: Jul. 2nd, 2012; accepted: Jul. 17th, 2012

Abstract: A new viscosity hybrid subsequence iterative method for the fixed points of asymptotic nonexpansive mappings is given and studied in Hilbert spaces. The strong convergent theorem for this kind of the iterative sequences is proved. The results in the present paper extend and improve some resent results of other authors.

Keywords: Asymptotic Nonexpansive Mapping; Fixed Point; Viscosity Hybrid Iterative; Subsequence Sequence

渐近非扩张映象不动点的黏性混杂子序列迭代算法收敛性*

孙玮玮，王元恒#

浙江师范大学数理与信息工程学院，金华
Email: #yhwang@zjnu.edu.cn

收稿日期：2012 年 6 月 20 日；修回日期：2012 年 7 月 2 日；录用日期：2012 年 7 月 17 日

摘　要：在 Hilbert 空间中研究了渐近非扩张映象 T 的不动点的一种新型黏性混杂子序列迭代法算法，并利用该迭代算法特点在一定条件下证明了迭代序列强收敛于 T 的不动点。其结果改进和推广了一些相应的近代结果。

关键词：渐近非扩张映象；不动点；黏性混杂迭代；子序列

1. 引言

不动点的理论及其迭代算法是现在非线性泛函分析的一项重要内容。早在 1953 年 Mann 提出了一种称之为 Mann 的迭代格式[1]，其迭代逼近非线性算子 T 的不动点序列 $\{x_n\}$ 的迭代方式为：

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T x_n, n \ge 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha_n \in [0,1]$。1974 年，Ishikawa 修改了 Mann 的迭代格式，提出了一种称之为 Ishikawa 的迭代格式[2]，其序列 $\{x_n\}$ 的构造方式为：

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T y_n, \\ y_{n+1} = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T x_n, \end{cases} \tag{2}$$

*资助项目：国家自然科学基金(11071169)和浙江省自然科学基金(Y6100696)。
#通讯作者。

其中 α_n， $\beta_n \in [0,1]$。并且证明了在一定条件下相应迭代序列 $\{x_n\}$ 的弱收敛性定理。

另一方面，1967 年 Halpern 引进如下称之为 Halpern 迭代程序[3]：

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n) T x_n. \end{cases} \tag{3}$$

由于 Halpern 迭代格式的启发及解决问题的需要，近年来，Xu[4]、张石生[5]等学者又构造了黏性迭代。所谓的黏性迭代格式就是用一个给定的压缩 f 代替 Halpern 迭代的 u，这样我们就得到了下面的格式：

$$\begin{cases} \forall x_0 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) T x_n, n \ge 0. \end{cases} \tag{4}$$

因 Mann 迭代和 Ishikawa 迭代，即使是在 Hilbert 空间下一般也仅有弱收敛性，为克服这一缺点，得到强收敛结果，Nakajo 等[6,7]、黄建峰等[8]结合 Mann 迭代和 Halpern 迭代提出了混杂迭代方法并得到了强收敛定理。2010 年刘立红等[9]关于 k-严格伪压缩映像，提出并改进给出了如下混杂迭代序列：

$$\begin{cases} H = H_0, x_0 \in H_0, \\ T_\alpha = (1-\alpha) I + \alpha T, \\ z_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T x_n, \\ y_n = \beta_n x_0 + (I-\beta_n) T z_n, \\ H_{n+1} = \left\{ z \in H_n : \|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 + \beta_n \left(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z \rangle \right) \right\}, \\ x_{n+1} = P_{H_{n+1}} x_0, n \ge 0. \end{cases} \tag{5}$$

并且证明了序列在一定条件下，该迭代序列关于非扩张映像的收敛性。

受上述文章启发，本文的目的是在 Hilbert 空间中提出如下关于渐近非扩张映像 T 的黏性混杂子列迭代序列：

$$\begin{cases} C = C_0, x_0 \in C_0, \\ z_n = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) T^{l(n)} x_n, \\ y_n = \beta_n f(x_0) + (I-\beta_n) T^{l(n)} z_n, \\ C_n = \left\{ v \in C : \|z_n - v\|^2 \le \|x_n - v\|^2 \right\}, \\ Q_n = \left\{ v \in C : \|y_n - v\|^2 \le \|x_n - v\|^2 + \beta_n \left(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, v \rangle \right) \right\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, n \ge 0. \end{cases} \tag{6}$$

其中 $l(n)$ 为自然数列的一个子序列。并且我们利用这种新的混杂迭代算法特点，证明了在一定条件下序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $P_F(T)(x_0)$。因此，当渐近非扩张映像 T 为非扩张映像时，可取 $k_n = 1, l(n) = 1, f(x) = x_0$，从而将[4-9]等近代文献中的有关部分结果推广到渐近非扩张映像的黏性混杂迭代上来。

2. 预备知识

假设 H 是一个 Hilbert 空间，C 为 H 的一个非空闭凸子集，内积和范数分别为 $\langle \cdot,\cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$，记 $Fix(T) = \{x \in C : x = Tx\}$ 为映像 $T: C \to C$ 的不动点集合，$N = \{1, 2, \cdots\}$ 为自然数集，I 为恒等映像。记 $P_C : H \to C$ 为 H 到 C 上的投影。

定义 2.1

1) T 称为 Lipschitz 的，如果存在常数 $L \ge 0$，对所有 $x, y \in C$，有 $\|Tx - Ty\| \le L\|x - y\|$；$T$ 称为非扩张的，如果常数 $L = 1$；T 称为(具有系数 α 的)压缩的，如果常数 $L = \alpha < 1$。

2) T 称为一致 Lipschitz 的，如果存在数列 $\{k_n\}\subset(0,L]$，使得 $\|T^n x-T^n y\|\le k_n\|x-y\|,\forall x,y\in C,\forall n>1$；$T$ 称为(具有系数 k_n 的)渐近非扩张的，如果上述的 $\lim_{n\to\infty}k_n=1(n\to\infty)$。

为了证明本文的主要结果，还需要下列引理。

引理 2.1[10] 在实 Hilbert 空间，成立下列不等式：

1) $\|x-y\|^2\le\|x\|^2-\|y\|^2-2\langle x-y,y\rangle,\forall x,y\in H;$

2) $\|tx+(1-t)x\|^2=t\|x\|^2+(1-t)\|y\|^2-t(1-t)\|x-y\|^2,\forall t\in[0,1],\forall x,y\in H.$

引理 2.2[11] 设 C 是 Hilbert 空间 H 中的非空闭凸子集，$\forall x\in H,\forall y\in C$，则存在唯一的 $u_0\in C$，满足

1) $u_0=P_C x\Leftrightarrow\langle u_0-x,y-u_0\rangle\ge 0;$

2) $\|u_0-x\|\le\|y-x\|.$

3. 主要结果

定理 3.1 设 C 是实 *Hilbert* 空间 H 中的非空闭凸子集。$f:C\to C$ 为具有系数 α 的压缩映射，$T:C\to C$ 为具有系数 k_n 的渐近非扩张映像，不动点 $F(T)\ne\varnothing$。当 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$ 时，则存在子数列 $\{l_n\}\subset N$，使得由式(6)迭代生成的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $P_{F(T)}(x_0)$。

证明 第一步证明 $F(T)\subset C_n\cap Q_n$。

$\forall p\in F(T)$ 有

$$\begin{aligned}\|z_n-p\|&=\alpha_n\|(f(x_n)-p)\|+(1-\alpha_n)\|(T^{l(n)}x_n-p)\|\\&\le\alpha_n\|f(x_n)-p\|+(1-\alpha_n)\|T^{l(n)}x_n-p\|\\&\le\alpha_n\alpha\|x_n-p\|+(1-\alpha_n)k_{l(n)}\|x_n-p\|\\&=(\alpha_n\alpha+(1-\alpha_n)k_{l(n)})\|x_n-p\|.\end{aligned}$$

对于每一个 $\alpha_n\in[0,1]$，由 $\lim_{n\to\infty}k_n=1$ 可得，存在一个正整数序列 $l(n)$ 使得 $k_{l(n)}-1=o(\alpha_n)(n\to\infty)$，故存在 $n_0>N$，当 $n\ge n_0$ 时，必有 $\frac{k_{l(n)}-1}{\alpha_n}\le 1-\alpha<\frac{1-\alpha}{1-\alpha_n}$，即得 $\alpha\alpha_n+(1-\alpha_n)k_{l(n)}<1$，则当 n 充分大时

$$\|z_n-p\|\le\|x_n-p\|. \tag{7}$$

由 p 的任意性可得 $F(T)\subset C_n$。

对 $\forall p\in F(T)$，由引理 1 得

$$\begin{aligned}\|y_n-p\|^2&=\|\beta_n(f(x_0)-p)+(1-\beta_n)(T^{l(n)}z_n-p)\|^2\\&\le\beta_n\|f(x_0)-p\|^2+(1-\beta_n)k_{l(n)}^2\|T^{l(n)}z_n-p\|^2\\&\le\beta_n\alpha^2\|x_0-p\|^2+(1-\beta_n)k_{l(n)}^2\|x_n-p\|^2\\&\le\beta_n\alpha^2\|x_0-p\|^2+\|x_n-p\|^2-(1-(1-\beta_n)k_{l(n)}^2)\|x_n-p\|^2.\end{aligned}$$

因 $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$，同理由 $\lim_{n\to\infty}k_{l(n)}=1$ 可得，存在一个正整数序列 $l'(n)$ 使得 $k_{l'(n)}-1=o(\beta_n)(n\to\infty)$。为了方便，我们仍记 $l'(n)$ 为 $l(n)$。于是又存在 $n_1>N$，当 $n>n_1$ 时，由 $\frac{k_{l(n)}-1}{\beta_n}\le\frac{k_{l(n)}^2-\alpha^2}{k_{l(n)}+1}$ 可得 $(1-(1-\beta_n)k_{l(n)})\ge\beta_n\alpha^2$，从而有

$$\begin{aligned}\|y_n-p\|^2&=\left\|\beta_n\left(f\left(x_0\right)-p\right)+\left(1-\beta_{\mathrm{n}}\right)\left(T^{l(n)}z_n-p\right)\right\|^2\\&\le\beta_n\alpha^2\|x_0-p\|^2+\|x_n-p\|^2-\beta_{\mathrm{n}}\alpha^2\|x_n-p\|^2\\&\le\|x_n-p\|^2+\beta_{\mathrm{n}}\left(\|x_0-p\|^2-\|x_n-p\|^2\right)\\&\le\|x_n-p\|^2+\beta_n\left(\|x_0\|^2+2\left\langle x_n-x_0,p\right\rangle\right).\end{aligned}$$

由 p 的任意性可得，当 n 充分大时有 $F(T)\subset Q_n$。综上可得 $F(T)\subset C_n\cap Q_n$。

第二步证明 $\{x_n\}$ 为柯西列。

显然 $F(T)$ 是 H 的非空闭凸子集。由引理 1.2 知，$\forall x\in H$，存在唯一的 $u_0\in F(T)$，使得 $u_0\in P_{F(T)}x_0$。对于固定的正整数 m，

$$\|x_{n+m}-x_0\|=\left\|P_{C_{n+m}\cap Q_{n+m}}x_0-x_0\right\|\le\|z-x_0\|,\forall z\in C_{n+m}\cap Q_{n+m}$$

所以 $\{x_n\}$ 有界，由式(7)得 $\{z_n\}$ 也有界。

由 $u_0\in F(T)\subset C_n\cap Q_n$ 得，对于 $\forall n>0,\|x_{n+m}-x_0\|\le\|u_0-x_0\|$。由 $C_n\cap Q_n$ 的定义，显然 $Q_{n+m}\subseteq Q_n,\|x_n-x\|_0\le\|x_{n+m}-x_0\|$。

对 $\forall n>0$，存在常数 c，使得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=c$，由引理 2 可知，$x_{n+m}\in C_n\cap Q_n$，$x_n=P_{C_n\cap Q_n}x_0$ 且 $\left\langle x_n-x_0,x_{n+m}-x_n\right\rangle\ge0$。因此，

$$\|x_{n+m}-x_n\|^2=\|x_{n+m}-x_0\|^2-\|x_n-x_0\|^2-2\left\langle x_n-x_0,x_{n+q}-x_n\right\rangle\le\|x_{n+m}-x_0\|^2-\|x_n-x_0\|^2. \tag{8}$$

故 $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+m}-x_n\|=0$，所以 $\{x_n\}$ 为柯西列。即 $x_n\xrightarrow{s}q\in H\left(n\to\infty\right)$。

第三步 证明 $\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0$ 和 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|=0$ 以及 $\lim_{n\to\infty}\left(\|x_n-p\|-\|z_n-p\|\right)=0$。

由 $x_{n+m}\in H$：

$$\|y_n-x_{n+m}\|^2\le\|x_n-x_{n+m}\|^2+\beta_n\left(\|x_0\|^2+2\left\langle x_n-x_0,x_{n+m}\right\rangle\right)$$

由已知条件 $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$ 及 $\{x_n\}$ 的有界性易得

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0. \tag{9}$$

同理由 $x_{n+m}\in H$，得：$\|z_n-x_{n+m}\|\le\|x_n-x_{n+m}\|$，由 $\{x_n\}$ 的有界性易得以下两式：

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|=0. \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|x_n-p\|-\|z_n-p\|\right)=0. \tag{11}$$

第四步 证明 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$。

$$\begin{aligned}\alpha_n\left(1-\alpha_n\right)\left\|f\left(x_n\right)-T^{l(n)}x_n\right\|^2&=\alpha_n\left\|f\left(x_n\right)-p\right\|^2+\left(1-\alpha_n\right)\left\|T^{l(n)}x_n-p\right\|^2-\left\|\alpha_n\left(f\left(x_n\right)-p\right)+\left(1-\alpha_n\right)\left(T^{l(n)}x_n-p\right)\right\|^2\\&=\alpha_n\left\|f\left(x_n\right)-p\right\|^2+\left(1-\alpha_n\right)\left\|T^{l(n)}x_n-p\right\|^2-\|z_n-p\|^2\\&\le\alpha_n\alpha^2\|x_n-p\|^2+\left(1-\alpha_n\right)k_{l(n)}^2\|x_n-p\|^2-\|z_n-p\|^2\\&\le\left(\alpha_n\alpha^2+\left(1-\alpha_n\right)k_{l(n)}^2\right)\|x_n-p\|^2-\|z_n-p\|^2.\end{aligned}$$

因 $\lim_{n\to\infty}k_{l(n)}=1$，则 $\lim_{n\to\infty}k_{l(n)}^2=1$，同第一步可得 $k_{l(n)}^2-1=o\left(\alpha_n\right)\left(n\to\infty\right)$，故存 n_1，当 $n>n_1$ 时，必有 $\dfrac{k_{l(n)}^2-1}{\alpha_n}\le1-\alpha^2<\dfrac{1-\alpha^2}{1-\alpha_n}$ 即得 $\alpha_n\alpha^2+\left(1-\alpha_n\right)k_{l(n)}^2<1$，则

$$\alpha_n\left(1-\alpha_n\right)\left\|f\left(x_n\right)-T^{l(n)}x_n\right\|^2\le\left\|x_n-p\right\|^2-\left\|z_n-p\right\|^2=\left(\left\|x_n-p\right\|-\left\|z_n-p\right\|\right)\left(\left\|x_n-p\right\|+\left\|z_n-p\right\|\right)$$

由(11)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f\left(x_n\right)-T^{l(n)}x_n\right\|^2=0. \tag{12}$$

$$\left\|x_n-T^{l(n)}x_n\right\|=\left\|x_n-z_n+\alpha\left(f\left(x_n\right)-T^{l(n)}x_n\right)\right\|\le\left\|x_n-z_n\right\|+\alpha\left\|f\left(x_n\right)-T^{l(n)}x_n\right\|$$

由(10)，(12)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-T^{l(n)}x_n\right\|=0 \tag{13}$$

在(8)式中取在 $m=1$，可得

$$\begin{aligned}\left\|x_n-Tx_n\right\|&=\left\|x_n-x_{n+1}+x_{n+1}-T^{l(n+1)}x_{n+1}+T^{l(n+1)}x_{n+1}-T^{l(n+1)}x_n+T^{l(n+1)}x_n-Tx_n\right\|\\&\le\left\|x_n-x_{n+1}\right\|+\left\|x_{n+1}-T^{l(n+1)}x_{n+1}\right\|+L_1\left\|x_{n+1}-x_n\right\|+L_2\left\|T^{l(n)}x_n-x_n\right\|\end{aligned}$$

则 $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-Tx_n\right\|=0$，由(7)(9)式可得 $\{x_n\}\{y_n\}\{z_n\}$ 均强收敛于 $P_{F(T)x_0}$。

定理 3.2 设 C 是实 *Hilbert* 空间 H 中的非空闭凸子集，且 $T:C\to C$ 为非扩张影像。$F(T)\ne\varnothing$ 序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 由下列迭代生成：

$$\begin{cases}H=H_0,x_0\in H_0\\ y_n=\alpha_n f\left(x_n\right)+\left(1-\alpha_n\right)T^{l(n)}x_n\\ H_{n+1}=\left\{z\in H_n:\left\|y_n-z\right\|^2\le\left\|x_n-z\right\|^2\right\}\\ x_{n+1}=P_{H_{n+1}}x_0\end{cases}$$

其中 $\alpha_n\in(0,1),\alpha_n\to0$。则序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均强收敛于 $P_{F(T)}x_0$。

证明 在定理 2.1 中令 $\beta\equiv0,k_n=1$，则上述结论成立。

注 3.1 由此可见，此文结果为[4-9]等近代文献中有关部分结果的推广与改进。

参考文献 (References)

[1] W. R. Mann. Mean value methods in iteration. Proceedings of American Mathematical Society, 1953, 4: 506-501.
[2] S. Ishikawa. Fixed points by a new iteration method. Proceedings of American Mathematical Society, 1974, 44: 147-150.
[3] B. Halpern. Fixed points of nonexpanding maps. Bulletin of the American Mathematical Society, 1967, 73: 957-961.
[4] H. K. Xu. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 298: 279-291.
[5] 张石生. Banach 空间中非扩张映像的黏性逼近方法[J]. 数学学报(中文版), 2007, 50(3): 485-492.
[6] K. Nakajo, W. Takahash. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 279(2): 372-379.
[7] K. Nakajo, K. Shimoji and W. Takahashi. Strong convergence theorems by the hybrid method for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. Taiwanese Journal of Mathematics, 2006, 10(2): 339-360.
[8] 黄建锋, 王元恒. 关于一种严格伪压缩映象 Mann 迭代序列的强收敛性[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2006, 29(4): 378-381.
[9] 刘立红, 陈东青. Hilbert 空间 k-严格伪压缩映像不动点的迭代算法[J]. 数学的实践与认识, 2010, 41(9): 11-17.
[10] 谈斌. 几类非线性算子零点或不动点迭代算法追究[D]. 军械工程学院, 2004: 6-11.
[11] 王元恒, 曾六川. Banach 空间中广义投影变形迭代法的收敛性[J]. 数学年刊, 2009, 30A(1): 55-62.

