Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 243-248
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24037 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Self-Dual Permutation Codes over F_2+vF_2

Guanghui Zhang

School of Mathematical Sciences, Luoyang Normal University, Luoyang
Email: zgh09@yahoo.com.cn

Received: Jul. 25th, 2012; revised: Aug. 11th, 2012; accepted: Aug. 26th, 2012

Abstract: Self-dual permutation codes over F_2+vF_2 are studied in this paper. The relationship of the existence of self-dual permutation codes over F_2+vF_2 and the existence of self-dual permutation codes over the binary field F_2 are obtained. Finally, a necessary and sufficient condition and a sufficient condition for the existence of self-dual permutation codes over F_2+vF_2 are given under some group theoretical conditions.

Keywords: F_2+vF_2; Self-Dual Permutation Code; Gray Map

环F_2+vF_2上的自对偶置换码

张光辉

洛阳师范学院数学科学学院，洛阳
Email: zgh09@yahoo.com.cn

收稿日期：2012 年 7 月 25 日；修回日期：2012 年 8 月 11 日；录用日期：2012 年 8 月 26 日

摘　要：利用 Gray 映射，研究了环 F_2+vF_2 上的自对偶置换码，把环 F_2+vF_2 上自对偶置换码的研究归结到二元域上自对偶置换码的研究。依据群论条件，给出了环 F_2+vF_2 上自对偶置换码存在的一个充要条件和一个充分条件。

关键词： F_2+vF_2；自对偶置换码；Gray 映射

1. 引言

群码是一类非常重要的码。设 R 是一个交换环，G 是一个 n 阶有限群，群代数 RG 的一个 $R-$子模 C 称为环 R 上一个长为 n 的线性码；如果线性码 C 是群代数 RG 的一个左理想，就称 C 是一个群码。循环码就是群码，此时 G 是一个循环群；Reed-Muller 码也是群码，此时 G 是一个初等交换 $P-$群[1]。所以群码很早就是一个重要的研究对象，见[2]。而群代数 RG 自然地被附带一个非退化的 $G-$不变的对称双线性型，对于这个双线性型，可以定义线性码 C 的对偶码 $C^{\perp}$。如果 $C=C^{\perp}$，我们称线性码 C 是自对偶的。因此可以考虑一个自然的问题：R 和 G 满足什么条件时，RG 中存在或不存在自对偶的群码？Hughes 在[3]中考虑了有限交换群的情形；Willems 在[4]中探讨了 Galois 环的情形，给出了 Galois 环上群代数 RG 中存在自对偶群码的一个充分必要条件，特别地对于奇阶群 G，RG 中不存在自对偶群码。因此对于奇阶群，Martinez-Pérez 和 Willems 在[5]和[6]中研究了自对偶的扩展群码的存在性条件。

群码的自然推广是置换码。所谓置换码就是群代数上的置换模的一个子模。同样在置换模中也自然地被赋予一个非退化的对称双线性型，因此可以考虑自对偶的置换码。Fan 和 Yuan 在[7]中首次提出了置换码的概念，并且给出了有限域上自对偶的传递置换码的一些存在性和不存在性条件；Fan 和 Zhang 在[8]中探讨了有限域上

自对偶的扩展的传递置换码，给出了一个有限域上自对偶的扩展的传递置换码的存在性条件，这是一个数论条件。与群码不同的是，我们可以举例说明这个数论条件是充分非必要的，这一点也恰说明了置换码是群码的一种真正意义上的推广；在[9]中 Fan 和 Jin 研究了半单的对称模的正交不可分解性，并把它用于探讨自对偶的置换码，由此说明对称模和双曲模理论(详细内容参看[10]和[11])可用于群码和置换码的研究。进一步，Yuan 在[12]中研究了有限链环上的自对偶的传递置换码，得到了有限链环上的自对偶的传递置换码的存在性条件。这样我们的研究兴趣在于探讨其它有限交换环上的自对偶置换码的存在性条件和不存在性条件。

文献[13]证明了某些高效的二元非线性码，如 Kerdock 码、Delsarte-Goethals 码可以看做是 Z_4-线性码的 Gray 像，这使得有限交换环上的码受到广泛关注，从而环上码的研究成为编码理论研究的一个新的方向。我们知道，除了 Z_4 和四元域 F_4 之外，还有两个四元素环：$F_2+uF_2=\{0,1,u,1+u\}$，这里 $u^2=0$；$F_2+vF_2=\{0,1,v,1+v\}$，这里 $v^2=v$。与前三个不一样的是，F_2+vF_2 不是链环，所以我们不能把环 F_2+vF_2 上的置换码的研究提升到一个剩余类域上去。我们这里采用的研究方法是通过 Gray 映射来探讨环 F_2+vF_2 上的自对偶置换码，把环 F_2+vF_2 上的自对偶置换码的存在性问题研究归结到二元域上的情形。

2. 预备知识

设 $F_2+vF_2=\{0,1,v,1+v\}$，这里 $v^2=v$。易知，环 F_2+vF_2 等同于商环 $F_2[v]/\langle v^2+v\rangle$；它是一个半局部环，仅有的两个极大理想是 $\langle v\rangle$ 和 $\langle 1+v\rangle$。环 F_2+vF_2 中的每一个元素均可以表示成 $c=a+vb$ 的形式，这里 $a,b\in F_2$。

下面设 R 是一个有单位元的有限交换环。环 R 上长为 n 的线性码 C 就是 R^n 的一个 $R-$ 子模，这里 $R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)/x_i\in R\}$。对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$，我们定义 x,y 的内积如下：

$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

如果 C 是环 R 上长为 n 的线性码，那么定义

$$C^{\perp}=\{x\in R^n\,|\,\langle x,c\rangle=0,\forall c\in C\},$$

易知 $C^{\perp}$ 也是环 R 上长为 n 的线性码，称之为 C 的对偶码。如果 $C\subseteq C^{\perp}$，称线性码 C 是自正交的；如果 $C=C^{\perp}$，称线性码 C 是自对偶的。[14]证明了对有限 Frobenius 环 R 上的任一线性码 C，均有

$$|C||C^{\perp}|=|R|^n.$$

仍设 R 是一个有单位元的交换环，G 是一个有限群，X 是一个有限 $G-$ 集，即 X 是有限集，并且在 X 上有一个 $G-$ 作用，也就是说存在一个 $G\times X\to X,(s,x)\mapsto sx$ 的映射，满足条件：$(st)x=s(tx)$；$1x=x$，$\forall s,t\in G;$ $x\in X$。对每个 $x\in X$，$G_x=\{g\in G\,|\,gx=x\}$ 是 G 的子群，称作点 x 的稳定子群。设 $RX=\{\sum_{x\in X}a_xx\,|\,a_x\in R\}$ 是一个基为 X 的自由 $R-$ 模，通过线性延拓 G 在 X 上的作用，RX 成为一个 $RG-$ 模，称之为 $RG-$ 置换模。如果 C 是 RX 的一个 $RG-$ 子模，我们就称 C 是 RX 的一个置换码；如果 X 是一个有限的传递 $G-$ 集，那么此时置换码就是传递的。显然，群码是置换码，此时 $X=G$，G 在 X 上的作用是一个左正则作用。但是置换码不一定是群码，例如 $m-$ 循环码就是置换码，但不是群码，这里 $m\geq 2$，见[7]。

自由 $R-$ 模 RX 自然地附带一个非退化的对称双线性型 $\langle -,-\rangle$：

$$\left\langle\sum_{x\in X}a_xx,\sum_{x\in X}b_xx\right\rangle=\sum_{x\in X}a_xb_x,\ \forall\sum_{x\in X}a_xx,\sum_{x\in X}b_xx\in RX.$$

我们称之为 RX 上的标准内积。对任意的 $s\in G$；$a=\sum_{x\in X}a_xx,b=\sum_{x\in X}b_xx\in RX$，我们有

$$\langle sa,sb\rangle=\left\langle s\left(\sum_{x\in X}a_xx\right),s\left(\sum_{x\in X}b_xx\right)\right\rangle=\left\langle\sum_{x\in X}a_x(sx),\sum_{x\in X}b_x(sx)\right\rangle=\sum_{x\in X}a_xb_x=\langle a,b\rangle,$$

即得 RX 上的标准内积是 $G-$不变的：

$$\langle sa,sb\rangle=\langle a,b\rangle,\ \forall s\in G;\ a,b\in RX\ .$$

在 RX 中可以如下方式定义乘法，使之成为一个环：

$$\left(\sum_{x\in X}a_x x\right)\left(\sum_{x\in X}b_x x\right)=\sum_{x\in X}\left(a_x b_x\right)x,\ \forall\sum_{x\in X}a_x x,\sum_{x\in X}b_x x\in RX\ .$$

设 C 是 RX 的一个置换码，定义 $C^{\perp}=\left\{a\in RX\,\middle|\,\langle a,c\rangle=0,\forall c\in C\right\}$。任取 $s\in G$， $c'\in C^{\perp}$， $c\in C$，根据内积的 $G-$不变性，得到

$$\langle sc',c\rangle=\left\langle sc',ss^{-1}c\right\rangle=\left\langle c',s^{-1}c\right\rangle=0\ .$$

所以 $sc'\in C^{\perp}$，因此 $C^{\perp}$ 也是一个置换码，称之为 C 的对偶码。如果 $C\in C^{\perp}$，称置换码 C 是自正交的；如果 $C=C^{\perp}$，称置换码 C 是自对偶的。

3. 主要结果

以后总假设 $R=F_2+vF_2=\{0,1,v,1+v\}$，这里 $v^2=v$； G 是一个有限群； X 是一个有限 $G-$集，$|X|=n$。既然 R 是一个有单位元的交换环，那么 R 具有维数不变性，所以作为自由 $R-$模， RX 同构于 R^n。因此 RX 的一个 $R-$子模可视为一个环 R 上长为 n 的线性码。

首先构造一个环 R 到环 $F_2\oplus F_2$ 的一个 Gray 映射 ϕ 如下： $\phi(c)=(a,a+b)$，这里 $c=a+vb$， $a,b\in F_2$，这样 ϕ 是一个环同构。利用 Gray 映射 ϕ，我们可以构造一个如下的自然的环同构：

$$RX\to F_2X\times F_2X,\ \sum_{x\in X}a_x x\mapsto\left(\sum_{x\in X}r_x x,\sum_{x\in X}\left(r_x+q_x\right)x\right),$$

其中 $a_x=r_x+vq_x$， $r_x,q_x\in F_2,\forall x\in X$ 。仍记这个环同构为 ϕ。显然 ϕ 由下面两个自然的环同构合成而得：

$$\psi:RX\to\left(F_2\oplus F_2\right)X,\ \sum_{x\in X}a_x x\mapsto\sum_{x\in X}\left(r_x,r_x+q_x\right)x,$$

其中 $a_x=r_x+vq_x$， $r_x,q_x\in F_2,\forall x\in X$ ；

$$\eta:\left(F_2\oplus F_2\right)X\to F_2X\times F_2X,\ \sum_{x\in X}\left(a_x,b_x\right)x\mapsto\left(\sum_{x\in X}a_x x,\sum_{x\in X}b_x x\right),$$

所以 $\varphi=\eta\psi$ 是一个环同构，且

$$\phi(ga)=g\phi(a),\ \forall a\in RX,g\in G,$$

即 ϕ 是 $G-$同态的。

设 $F_2X\times F_2X$ 到第一个 F_2X 的典范投射为 π_1，到第二个 F_2X 的典范投射为 π_2。记 $\phi_i=\pi_i\phi$， $i=1,2$。设 C_1,C_2 是 F_2X 中的两个置换码，记

$$C=CRT\left(C_1,C_2\right)=\phi^{-1}\left(C_1\times C_2\right)=\left\{\varphi^{-1}\left(c_1,c_2\right)\middle|c_i\in C_i,i=1,2\right\},$$

称 C 为置换码 C_1,C_2 的中国积。

在 $F_2X\times F_2X$ 上定义内积 $[-,-]$ 如下：任取 $a=\left(a_1,a_2\right)$， $b=\left(b_1,b_2\right)\in F_2X\times F_2X$ ，

$$[a,b]=\left(\langle a_1,b_1\rangle_1,\langle a_2,b_2\rangle_1\right),$$

其中 $\langle-,-\rangle_1$ 是 F_2X 上的内积。

引理 1 符号如上。设 $a,b\in RX$ ，则

$$\varphi\left(\langle a,b\rangle\right)=\left[\varphi(a),\varphi(b)\right].$$

证明：设 $a=\sum_{x\in X}\left(r_x+vq_x\right)x$， $b=\sum_{x\in X}\left(s_x+vp_x\right)x\in RX$，则

$$\langle a,b\rangle=\sum_{x\in X}\left(r_x+vq_x\right)\left(s_x+vp_x\right)=\sum_{x\in X}\left(r_xs_x\right)+v\sum_{x\in X}\left(r_xp_x+q_xs_x+p_xq_x\right).$$

故

$$\phi\left(\langle a,b\rangle\right)=\left(\sum_{x\in X}\left(r_xs_x\right),\sum\left(r_xs_x+r_xp_x+q_xs_x+p_xq_x\right)\right)=\left(\sum_{x\in X}\left(r_xs_x\right),\sum\left(r_x+q_x\right)\left(s_x+p_x\right)\right).$$

又

$$\phi(a)=\left(\sum_{x\in X}r_xx,\sum\left(r_x+q_x\right)x\right),\ \phi(b)=\left(\sum_{x\in X}s_xx,\sum\left(s_x+p_x\right)x\right),$$

故

$$\left[\phi(a),\varphi(b)\right]=\left(\sum_{x\in X}\left(r_xs_x\right),\sum\left(r_x+q_x\right)\left(s_x+p_x\right)\right)=\phi\left(\langle a,b\rangle\right).$$

引理 2 符号如上。设 C_1,C_2 是 F_2X 中的任意两个置换码，$C=CRT\left(C_1,C_2\right)$，则 C 是 RX 中自正交的置换码当且仅当 C_1,C_2 是 F_2X 中两个自正交的置换码。

证明：由 $\varphi^{-1},\varphi_i,i=1,2$ 的 $G-$同态性，易证 C 是 RX 中的置换码当且仅当 C_1,C_2 是 F_2X 中置换码。首先设 C 是 RX 中自正交的置换码。任取 $a=\sum_{x\in X}\left(r_x+vq_x\right)x$， $b=\sum_{x\in X}\left(s_x+vp_x\right)x\in C$，则有

$$0=\langle a,b\rangle=\sum_{x\in X}\left(r_x+vq_x\right)\left(s_x+vp_x\right)=\sum_{x\in X}\left(r_xs_x\right)+v\sum_{x\in X}\left(r_xp_x+q_xs_x+p_xq_x\right),$$

即得

$$\sum_{x\in X}\left(r_xs_x\right)=0;\ \sum_{x\in X}\left(r_xp_x+q_xs_x+p_xq_x\right)=0.$$

因此

$$\left\langle\phi_1(a),\phi_1(b)\right\rangle=\left\langle\sum_{x\in X}r_xx,\sum_{x\in X}s_xx\right\rangle=\sum_{x\in X}\left(r_xs_x\right)=0;$$

$$\begin{aligned}\left\langle\phi_2(a),\phi_2(b)\right\rangle&=\left\langle\sum_{x\in X}\left(r_x+q_x\right)x,\sum_{x\in X}\left(s_x+p_x\right)x\right\rangle=\sum_{x\in X}\left(r_x+q_x\right)\left(s_x+p_x\right)\\&=\sum_{x\in X}\left(r_xs_x\right)+\sum_{x\in X}\left(r_xp_x+q_xs_x+p_xq_x\right)=0\end{aligned},$$

由此可得 $C_1=\phi_1(C)$， $C_2=\phi_2(C)$ 均是自正交的。

再设 C_1,C_2 是 F_2X 中两个自正交的置换码。任取 $a=\sum_{x\in X}\left(r_x+vq_x\right)x$， $b=\sum_{x\in X}\left(s_x+vp_x\right)x\in C$，则有

$$\phi(a)=\left(\sum_{x\in X}r_xx,\sum\left(r_x+q_x\right)x\right),\ \phi(b)=\left(\sum_{x\in X}s_xx,\sum\left(s_x+p_x\right)x\right),$$

进而得

$$\left[\phi(a),\phi(b)\right]=\left(\sum_{x\in X}\left(r_xs_x\right),\sum\left(r_x+q_x\right)\left(s_x+p_x\right)\right)=\left(\left\langle\phi_1(a),\phi_1(b)\right\rangle_1,\left\langle\phi_2(a),\phi_2(b)\right\rangle_1\right)=0.$$

由引理 1 知 $\phi\left(\langle a,b\rangle\right)=0$。而 ϕ 是双射，所以 $\langle a,b\rangle=0$， $\forall a,b\in C$，即得 C 是 RX 中自正交的置换码。

引理 3 符号如上。设 C_1,C_2 是 F_2X 中的任意两个置换码，$C=CRT\left(C_1,C_2\right)$，则 C 是 RX 中自对偶的置换码当且仅当 C_1,C_2 是 F_2X 中两个自对偶的置换码。

证明：首先设 C_1,C_2 是 F_2X 中两个自对偶的置换码，则对于每个 $1\le i\le 2$，都有 $\left|C_i\right|^2=\left|C_i\right|\left|C_i^\perp\right|=\left|F_2\right|^n=2^n$。既然 $R\cong F_2\oplus F_2$ 是 Frobenius 环，则有 $\left|C\right|\left|C^\perp\right|=\left|R\right|^n=4^n$；又 $\left|C\right|=\left|C_1\right|\left|C_2\right|$，因此 $\left|C\right|^2=\left|C_1\right|^2\left|C_2\right|^2=4^n=\left|C\right|\left|C^\perp\right|$，由此可得 $\left|C\right|=\left|C^\perp\right|$。再根据引理 2，有 $C\subseteq C^\perp$。因此 $C=C^\perp$，即 C 是 RX 中自对偶的置换码。

再设 C 是 RX 中自对偶的置换码，那么可视 C 是环 R 上的长为 n 的自对偶的线性码。既然 R 是 Frobenius 环，则有 $\left|C\right|^2=\left|C\right|\left|C^\perp\right|=\left|R\right|^n=4^n$。根据引理 2，对于每个 $1\le i\le 2$，我们有 $C_i\subseteq C_i^\perp$，所以 $\left|C_i\right|^2\le\left|C_i\right|\left|C_i^\perp\right|=\left|F_2\right|^n=2^n$。因此 $4^n=\left|R\right|^n=\left|C\right|^2=\left|C_1\right|^2\left|C_2\right|^2\le 4^n$，这表明对于每个 $1\le i\le 2$，都有 $\left|C_i\right|^2=\left|F_2\right|^n=2^n$；进而可得 $\left|C_i\right|=\left|C_i^\perp\right|$，$i=1,2$。这样就得到 $C_i=C_i^\perp$，$i=1,2$，即 C_1,C_2 是 F_2X 中两个自对偶的置换码。

定理 4 RX 中存在自对偶的置换码当且仅当 F_2X 中存在自对偶的置换码。

证明：由引理 3 即得。

引理 5([7]，命题 2)设有限域 F 的特征为 2；X 是一个有限的传递 $G-$集；$x\in X$。若 G 有一个子群 H 满足 $H\supseteq G_x$ 且 $|H:G_x|=2$，则 FX 中含有自对偶的置换码。

定理 6 设 X 是一个有限的传递 $G-$集；$x\in X$。若 G 有一个子群 H 满足 $H\supseteq G_x$ 且 $|H:G_x|=2$，则 RX 中含有自对偶的置换码。

证明：由定理 4 和引理 5 可得。

引理 7 ([7]，定理 1)设 F 是一个有限域；$G=T\times S$，这里 T 是一个有限 $2-$群，S 是一个有限的 $2'-$群；X 是一个有限的传递 $G-$集，则 FX 中存在自对偶的置换码当且仅当域 F 的特征和 $\left|X\right|$ 均为偶数。

定理 8 设 $G=T\times S$，这里 T 是一个有限 $2-$群，S 是一个有限的 $2'-$群；X 是一个有限的传递 $G-$集，则 RX 中存在自对偶的置换码当且仅当 $\left|X\right|$ 为偶数。

证明：由定理 4 和引理 7 可得。

4. 例子

例：设 G 是一个有限群，X 是一个有限的传递 $G-$集，$x\in X$；G 有一个子群 H 满足 $H\supseteq G_x$，$|H:G_x|=2$，$|G:H|=2$。设 $H=G_x\bigcup hG_x$，$h\in H-G_x$，$h^2\in G_x$；$G=H\bigcup sH$，$s\in G-H$，$s^2\in H$。再令 $Y=\{x,hx\}$，那么 $X=Y\bigcup sY=\{x,hx,sx,shx\}$。则 RX 中的一个自对偶置换码 C 为

$$C=R\left(x+hx\right)\oplus R\left(sx+shx\right).$$

下面我们分步证明 $C=R\left(x+hx\right)\oplus R\left(sx+shx\right)$ 是 RX 中的自对偶置换码。

1) $R\left(x+hx\right)$ 是 $RH-$模 RY 的子模，即 $R\left(x+hx\right)$ 是 $H-$不变的。任取 $h'\in H=G_x\bigcup hG_x$，这里 $h^2\in G_x$。若 $h'\in G_x$，则 $h'h\in G_xh=hG_x$，所以 $h'\left(x+hx\right)=h'x+h'hx=x+hx$；若 $h'\in hG_x$，注意到 $G_xh=hG_x$，$h^2\in G_x$，则 $h'h\in hG_xh=h^2G_x=G_x$，所以有 $h'\left(x+hx\right)=h'x+h'hx=hx+x$。因此 $R\left(x+hx\right)$ 是 $H-$不变的。

2) $C=R\left(x+hx\right)\oplus R\left(sx+shx\right)$ 是 $G-$不变的。注意到

$$C=R\left(x+hx\right)\oplus R\left(sx+shx\right)=R\left(x+hx\right)\oplus sR\left(x+hx\right).$$

任取 $g\in G=H\bigcup sH$，$s^2\in H$。若 $g\in H$，则 $gs\in Hs=sH$。既然 $R\left(x+hx\right)$ 是 $H-$不变的，那么 $gC\subseteq C$；若 $g\in sH$，则 $gs\in sHs=s^2H=H$，因此仍有 $gC\subseteq C$。故 $C=R\left(x+hx\right)\oplus R\left(sx+shx\right)$ 是 $G-$不变的。

3) $C=R\left(x+hx\right)\oplus R\left(sx+shx\right)$ 是自正交的。任取 $a=r_1\left(x+hx\right)+r_2\left(sx+shx\right)$，$b=q_1\left(x+hx\right)+q_2\left(sx+shx\right)$，这里 $r_1,r_2,q_1,q_2\in R$，则

$$\left\langle a,b\right\rangle=r_1q_1+r_1q_1+r_2q_2+r_2q_2=2r_1q_1+2r_2q_2=0.$$

所以 $C=R\left(x+hx\right)\oplus R\left(sx+shx\right)$ 是自正交的。

4) $C=R(x+hx)\oplus R(sx+shx)$ 是自对偶的。因为 $|C|=4^2$，$|C||C^{\perp}|=|R|^4=4^4$，所以 $|C^{\perp}|=4^2=|C|$，因此 $C=C^{\perp}$，即得 $C=R(x+hx)\oplus R(sx+shx)$ 是自对偶的。证毕。

参考文献 (References)

[1] P. Landrock, O. Manz. Classical codes as ideal in group algebras. Designs, Codes and Cryptography, 1992, 2(1): 273-285.

[2] F. Bernhardt, P. Landrock and O. Manz. The extended Golay codes considered as ideal. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 1990, 55(2): 235-246.

[3] G. Hughes. Structure theorems for group ring codes with an application to self-dual codes. Designs, Codes and Cryptography, 2001, 24(1): 5-14.

[4] W. Willems. A note on self-dual group codes. IEEE Transactions on Information Theory, 2002, 48(12): 3107-3109.

[5] C. Martinez-Perez, W. Willems. Self-dual codes and modules for finite groups in characteristic two. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(8): 1798-1803.

[6] C. Martinez-Perez, W. Willems. Self-dual extended cyclic codes. Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, 2006, 17(1): 1-16.

[7] Y. Fan, Y. Yuan. On self-dual permutaiotn codes. Acta Mathematica Scientia, 2008, 28B(3): 633-638.

[8] Y. Fan, G. Zhang. On the existence of self-dual permutation codes of finite groups. Designs, Codes and Cryptography, 2012, 62(1): 19-29.

[9] Y. Fan, P. Jin. Symmetric semisimple modules of group algebra over finite fields and self-dual permutation codes. Journal of Algebra, 2012, 355(1): 80-92.

[10] P. Jin. Self-dual modules for finite groups of odd order. Journal of Algebra, 2011, 330(4): 418-430.

[11] 靳平. 群代数的双曲模[D]. 华中师范大学, 2011.

[12] Y. Yuan, H. Zhang. Self-dual permutation codes over finite chain rings. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2007, 12(6): 992-996.

[13] A. R. Hammons, P. V. Kumar, A. R. Calderbank, et al. The Z_4 -linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes. IEEE Transactions on Information Theory, 1994, 40(2): 301-319.

[14] J. Wood. Duality for modules over finite rings and applications to coding theory. American Journal of Mathematics, 1999, 121(3): 555-575.

