Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 41-45
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.31007 Published Online January 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

A Class of New Impulsive Integral Inequality and Its Application*

Zizun Li, Yong Huang

Department of Mathematics and Computer Science, Baise University, Baise
Email: zzlqfnu@qq.com, huangyong861@sohu.com

Received: Nov. 21st, 2012; revised: Dec. 6th, 2012; accepted: Dec. 25th, 2012

Abstract: In this paper, we establish a class of new integro-sum inequality for discontinuous function, and the left hand of the inequality is a nonlinear factor of unknown function, and the sum-term of the right hand of the inequality for the unknown function is also a nonlinear factor. We obtain the estimation of bound of the unknown function. Finally, we apply our result to present estimation of the solution of impulsive differential equation.

Keywords: Impulsive Integral Inequality; Impulsive Differential Equation; Estimation of Solution

一类新的脉冲积分不等式及其应用*

李自尊，黄　勇

百色学院数学与计算机信息工程系，百色
Email: zzlqfnu@qq.com, huangyong861@sohu.com

收稿日期：2012 年 11 月 21 日；修回日期：2012 年 12 月 6 日；录用日期：2012 年 12 月 25 日

摘　要：本文建立了一类新的非连续函数积分和不等式，其不等式左端为未知函数的非线性因子，右端和项中也为未知函数的非线性因子。我们给出了未知函数的界的估计。最后，我们用求得的结果给出了脉冲微分方程解的估计。

关键词：脉冲积分不等式；脉冲微分方程；解的估计

1. 引言

众所周知，著名的 Gronwall-Bellman-Bihari 型不等式和它们的各种推广形式，已成为研究微分方程与积分方程解的存在性、唯一性、有界性和其它定性性质的重要工具，例如近期工作有[1-8]。对非连续函数主要研究具有脉冲扰动的微分方程，积分方程和泛函微分方程解的定性性质，例如解的有界性，吸引性，Lyapunov 稳定性等。由于某些实际应用方面的需要，许多新的非连续函数积分不等式已经建立，这方面的工作见[9-16]。

对研究某些具有脉冲的积分方程的定性分析，早期的不等式对上界的估计有一些不足之处，所以有必要寻求一些新的积分和不等式来达到结果的多样性，以及作为研究积分方程的工具。本文，我们建立了一类新的非连续函数积分和不等式，研究了不等式左端为未知函数的非线性项的类型。并给出未知函数的上界估计。我们的结果可作为研究某些积分方程定性理论的重要工具。

2. 主要结果

*基金项目：资助广西自然科学基金项目(2012GXNSFAA053009)；广西教育厅科研项目(201204LX423, 200911MS223)；百色学院一般科研项目(2011KB08)；百色学院教改项目(2012JG09, 2010JG13)。

本文主要研究了具有下面形式的脉冲积分不等式

$$\varphi\left(u\left(t\right)\right)\le c+\int_{t_0}^{t}f\left(s\right)u\left(\sigma\left(s\right)\right)\mathrm{d}s+\sum_{t_0<t_i<t}\beta_i\varphi\left(u\left(t_i-0\right)\right),\ \forall t\ge t_0\,, \tag{2.1}$$

和

$$\varphi\left(u\left(t\right)\right)\le c+\int_{t_0}^{t}f\left(s\right)w\left(u\left(\sigma\left(s\right)\right)\right)\mathrm{d}s+\sum_{t_0<t_i<t}\beta_i\varphi\left(u\left(t_i-0\right)\right),\ \forall t\ge t_0\,, \tag{2.2}$$

其中：$t_0<t_1<\cdots,\ \lim_{i\to\infty}t_i=\infty$，$\beta_i\ge 0,\ i=1,2,\cdots$，是常数。在本文中，$R$ 表示全体实数的集合，令 $R_+:=[0,\infty)$，函数 $z(t)$ 对 t 的导数记为 $z(t)_t$。

我们对不等式(2.1)，(2.2)中的函数做如下假设：

(H_1) φ 是 R_+ 上严格增的连续函数，在 $(0,\infty)$ 上取正值，并且满足 $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$；

(H_2) $c\ge 0$ 为常数；

(H_3) $\sigma(t)$ 是 $[t_0,\infty)\to[t_0,\infty)$ 的非递减的函数，并且满足 $\sigma(t)\le t$，$\forall t\in[t_0,\infty)$，$\sigma(t_0)=t_0$；

(H_4) w 是 R_+ 上不减的连续函数；

(H_5) $f(t)$ 是 $[t_0,\infty)$ 上的非负连续函数；

(H_6) $u(t)$ 是 $[t_0,\infty)$ 上只有第一类不连续点 $\left\{t_i:t_0<t_1<t_2<\cdots,\lim_{i\to\infty}t_i=\infty\right\}$ 的非负逐段连续函数。

定理 1. 假设非负逐段连续函数 $u(t)$ 满足积分和不等式(2.1)，则下面的估计式成立：

$$u\left(t\right)\le\varphi^{-1}\left(G_i^{-1}\left(\int_{t_i}^{t}f\left(s\right)\mathrm{d}s\right)\right),\ \forall t\in\left[t_i,t_{i+1}\right), \tag{2.3}$$

$$\int_{t_i}^{t}f\left(s\right)\mathrm{d}s\in Dom\left(G_i^{-1}\right).$$

其中：

$$G_0\left(t\right):=\int_{c}^{t}\frac{\mathrm{d}s}{\varphi^{-1}\left(s\right)},\quad t>0\,, \tag{2.4}$$

$$G_i\left(t\right):=\int_{c_i}^{t}\frac{\mathrm{d}s}{\varphi^{-1}\left(s\right)},\ i=1,2,\cdots,t>0\,, \tag{2.5}$$

$$c_i:=\left(1+\beta_i\right)\left(G_i^{-1}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}f\left(s\right)\mathrm{d}s\right)\right),\ i=1,2,\cdots,\forall t\ge t_0\,. \tag{2.6}$$

G_i^{-1} 表示函数 G_i 的逆函数，$i=0,1,2,\cdots$。

证明：考虑 $t\in[t_0,t_1)$，则不等式(2.1)变成

$$\varphi\left(u\left(t\right)\right)\le c+\int_{t_0}^{t}f\left(s\right)u\left(\sigma\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\,. \tag{2.7}$$

令 $\eta(t)$ 表示不等式(2.7)的右边，即

$$\eta\left(t\right)=c+\int_{t_0}^{t}f\left(s\right)u\left(\sigma\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\,, \tag{2.8}$$

则 $\eta(t)>0$ 是单调不减函数，满足 $\eta(t_0)=c$，且

$$u\left(t\right)\le\varphi^{-1}\left(\eta\left(t\right)\right). \tag{2.9}$$

(2.8)的两边关于 t 求导，并利用关系式(2.9)和假设 H_3 可得

$$\eta\left(t\right)_t=f\left(t\right)u\left(\sigma\left(t\right)\right)\le f\left(t\right)\varphi^{-1}\left(\eta\left(\sigma\left(t\right)\right)\right)\le f\left(t\right)\varphi^{-1}\left(\eta\left(t\right)\right), \tag{2.10}$$

由(2.10)可得

$$\frac{\eta(t)_t}{\varphi^{-1}(\eta(t))} \le f(t), \tag{2.11}$$

改变(2.11)中的变量，令 $s = t$，然后两边关于 s 从 t_0 到 t 积分，我们得到

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\eta(s)_s \mathrm{d}s}{\varphi^{-1}(\eta(s))} \le \int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s .$$

由 G_0 的定义(2.4)可得

$$G_0(\eta(t)) - G_0(\eta(t_0)) \le \int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s ,$$

即为

$$\eta(t) \le G_0^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s\right). \tag{2.12}$$

由(2.9)和(2.12)我们可得定理的估计式(2.3)。

当 $t \in [t_1, t_2)$ 时，则不等式(2.1)变成

$$\begin{aligned} \varphi(u(t)) &\le c + \int_{t_0}^{t} f(s)u(\sigma(s))\mathrm{d}s + \beta_1\varphi(u(t_1 - 0)) \\ &= c + \int_{t_0}^{t_1} f(s)u(\sigma(s))\mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t} f(s)u(\sigma(s))\mathrm{d}s + \beta_1\varphi(u(t_1 - 0)). \end{aligned} \tag{2.13}$$

令 $\Gamma(t)$ 表示(2.13)的右边，则 $\Gamma(t)$ 是单调不减函数，且由 $t \in [t_0, t_1)$ 的估计式可得

$$\begin{aligned} \varphi(u(t_1)) &\le \Gamma(t_1) = c + \int_{t_0}^{t_1} f(s)u(\sigma(s))\mathrm{d}s + \beta_1\varphi(u(t_1 - 0)) \\ &\le G_0^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s\right) + \beta_1 G_0^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s\right) \\ &= (1+\beta_1)G_0^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s\right),\ \forall t \in [t_0, t_1). \end{aligned} \tag{2.14}$$

$\Gamma(t)$ 两边关于 t 求导，并利用 $u(t) \le \varphi^{-1}(\Gamma(t))$ 和假设 H_3 可得

$$\frac{\Gamma(t)_t}{\varphi^{-1}(\Gamma(t))} \le f(t), \tag{2.15}$$

改变(2.15)中的变量，令 $s = t$，然后两边关于 s 从 t_1 到 t 积分可得

$$\int_{t_1}^{t} \frac{\Gamma(s)_s \mathrm{d}s}{\varphi^{-1}(\Gamma(s))} \le \int_{t_1}^{t} f(s)\mathrm{d}s ,$$

由 G_i 的定义(2.5)我们得

$$G_1(\Gamma(t)) - G_1(\Gamma(t_1)) \le \int_{t_1}^{t} f(s)\mathrm{d}s , \tag{2.16}$$

由(2.5)以及(2.6)、(2.14)和(2.16)我们推出

$$\Gamma(t) \le G_1^{-1}\left(\int_{t_1}^{t} f(s)\mathrm{d}s\right), \tag{2.17}$$

则我们利用关系式 $u(t) \le \varphi^{-1}(\Gamma(t))$ 和(2.17)可得

$$u(t) \le \varphi^{-1}(\Gamma(t)) \le \varphi^{-1}\left(G_1^{-1}\left(\int_{t_1}^{t} f(s)\mathrm{d}s\right)\right).$$

同理，对任意自然数 k，当 $t\in[t_k,t_{k+1})$ 时，我们可以得到未知函数的估计式

$$u(t)\le\varphi^{-1}\left(G_k^{-1}\left(\int_{t_k}^{t}f(s)\mathrm{d}s\right)\right),\ t\in[t_k,t_{k+1}).$$

综上定理被证明。

定理 2. 假设非负逐段连续函数 $u(t)$ 满足积分和不等式(2.2)，则下面的估计式成立：

$$u(t)\le\varphi^{-1}\left(W_i^{-1}\left(\int_{t_i}^{t}f(s)\mathrm{d}s\right)\right),\ \forall t\in[t_i,t_{i+1}),\ \int_{t_i}^{t}f(s)\mathrm{d}s\in Dom\left(G_i^{-1}\right).$$

其中：

$$W_0(t):=\int_c^t\frac{\mathrm{d}s}{w\left(\varphi^{-1}(s)\right)},\ t>0,$$

$$W_i(t):=\int_{c_i}^t\frac{\mathrm{d}s}{w\left(\varphi^{-1}(s)\right)},\ i=1,2,\cdots,t>0,$$

$$c_i:=(1+\beta_i)\left(W_i^{-1}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(s)\mathrm{d}s\right)\right),i=1,2,\cdots,\forall t\ge t_0.$$

W_i^{-1} 表示函数 W_i 的逆函数，$i=0,1,2,\cdots$。

证明：作适当的改变，定理 2 的证明和定理 1 类似，这里不给出详细证明过程。

3. 脉冲微分方程解的估计

考虑下列脉冲微分系统

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}t}&=F(t,x),\ t\ne t_i,\\ \Delta x\big|_{t=t_i}&=I_i(x),\\ \psi(x(t_0))&=c.\end{aligned}\tag{3.18}$$

其中：$c>0$，$x\in R^2$，$F\in R^2$，$I_i(x)\in R^2\ (i=1,2,\cdots)$，$t_0\le t_1\le\cdots$，$\lim\limits_{i\to\infty}t_i=\infty$，$\psi$ 是 R_+ 上连续的严格增函数，且在 $(0,\infty)$ 上取正值，$|\psi(r)|=\psi(|r|)$，当 $t\to\infty$ 时，$\psi(t)\to\infty$。

假设 $F(t,x)$ 和 $I_i(x)$ 的定义域为 $R_1=\left\{(t,x):t\in[t_0,T],T\le\infty,|x|\le M\right\}$，且满足下面的条件：

$$|F(t,x)|\le f(t)|\psi(x)|,\tag{3.19}$$

$$|I_i(x)|\le\beta_i|\psi(x)|,\tag{3.20}$$

其中：$f(t)$ 是 $[t_0,\infty)$ 上的非负连续函数，$\beta_i\ge 0$ 为常数。

推论 1. 满足条件(3.19)和(3.20)的脉冲微分系统(3.18)的所有解 $x(t)$ 有估计式

$$|x(t)|\le\psi^{-1}\left(G_i^{-1}\left(\int_{t_i}^{t}f(s)\mathrm{d}s\right)\right),\ \forall t\in[t_i,t_{i+1}),\tag{3.21}$$

$$\int_{t_i}^{t}f(s)\mathrm{d}s\in Dom\left(G_i^{-1}\right).$$

其中：

$$G_0(t):=\int_c^t\frac{\mathrm{d}s}{\psi^{-1}(s)},\ t>0,$$

$$G_i(t) := \int_{c_i}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{\psi^{-1}(s)},\ i = 1, 2\cdots,\ t > 0\ ,$$

$$c_i := (1+\beta_i)\left(G_i^{-1}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(s)\,\mathrm{d}s\right)\right), i = 1, 2, \cdots, \forall t \ge t_0\ .$$

G_i^{-1}表示G_i的逆函数，$i = 0, 1, 2, \cdots$。

证明：脉冲微分系统(3.18)等价于积分方程

$$\psi(x(t)) = \int_{t_0}^{t} F(s, x)\,\mathrm{d}s + \sum_{t_0 < t_i < t} I_i(x(t_i - 0)),\ \ \forall t \ge t_0\ . \tag{3.22}$$

利用条件(3.19)和(3.20)，由(3.22)我们可得

$$|\psi(x(t))| = \psi(|x(t)|) \le c + \int_{t_0}^{t} f(s)|x(s)|\,\mathrm{d}s + \sum_{t_0 < t_i < t} \beta_i \psi(|x(t_i - 0)|), \forall t \ge t_0\ , \tag{3.23}$$

令$u(t) = |x(t)|$，则(3.23)可以写为

$$\psi(u(t)) \le c + \int_{t_0}^{t} f(s)u(s)\,\mathrm{d}s + \sum_{t_0 < t_i < t} \beta_i \psi(u(t_i - 0)), \forall t \ge t_0\ , \tag{3.24}$$

我们可以看出积分和不等式(3.24)具有(2.1)的形式，且积分和不等式(3.24)中的函数满足定理 1 的条件，由定理 1 我们可以推出估计式(3.21)，推论得证。

参考文献 (References)

[1] W. Zhang, S. Deng. Projected Gronwall-Bellman's inequality for integrable functions. Mathematical and Computer Modelling, 2001, 34(3-4): 394-402.

[2] S. K. Choi, S. F. Deng, N. J. Koo and W. Zhang. Nonlinear integral inequalities of Bihari-Type without class H. Mathematical Inequalities & Application, 2005, 8(4): 643-654.

[3] W. S. Wang. A generalized retarded Gronwall-like inequality in two variables and applications to BVP. Applied Mathematics and Computation, 2007, 191(1): 144-154.

[4] W. S. Wang. Estimation on certain nonlinear discrete inequality and applications to boundary value problem. Advances in Difference Equations, 2009, 2009: Article ID: 708587.

[5] R. P. Agarwal, S. Deng and W. Zhang. Generalization of a retarded Gronwall-like inequality and its applications. Applied Mathematics and Computation, 2005, 165(3): 599-612.

[6] W. S. Cheung. Some new nonlinear inequalities and applications to boundary value problems. Nonlinear Analysis, 2006, 64: 2112-2128.

[7] R. P. Agarwal, Y. H. Kim and S. K. Sen. New retarded integral inequalities with applications. Journal of Inequalities and Applications, 2008, 2008: Article ID: 908784.

[8] C. J. Chen, W. S. Cheung and D. Zhao. Gronwall-Bellman-Type integral inequalities and applications to BVPs. Journal of Inequalities and Applications, 2009, 2009: Article ID: 258569.

[9] S. D. Borysenko. About asymptotical stability on linear approximation of the systems with impulse influence. Ukrainian Mathematical Journal, 1983, 35(2): 144-150.

[10] A. M. Samoilenko, N. Perestyuk. Differential equations with impulse effect. Kyiv: Visha Shkola, 1987.

[11] S. D. Borysenko. About one integral inequality for piece-wise continuous functions. Proceedings of X. International Kravchuk Conference, Kyiv, 2004: 323.

[12] G. Iovane. Some new integral inequalities of Bellman-Bihari type with delay for discontinuous functions. Nonlinear Analysis, 2007, 66: 498-508.

[13] A. Gallo, A. M. Piccirillo. About new analogies of Gronwall-Bellman-Bihari type inequalities for discontinuous functions and estimated solutions for impulsive differential systems. Nonlinear Analysis, 2007, 67: 1550-1559.

[14] Y. A. Mitropolskiy, G. Iovane and S. D. Borysenko. About a generalization of Bellman-Bihari type inequalities for discontinuous functions and their applitions. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2007, 66(10): 2140-2165.

[15] A. Gallo, A. M. Piccirillo. On some generalizations Bellman-Bihari result for integro-functional inequalities for discontinuous functions and their applications. Boundary Value Problems, 2009, 2009: Article ID: 808124.

[16] A. Gallo, A. M. Piccirillo. About some new generalizations of Bellman-Bihari results for integro-functional inequalities with discontinuous functions and applications. Nonlinear Anal, 2009, 71(12): 2276-2287.

