Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 81-86
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.31013 Published Online January 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

A Comparison of Two Topologies for $L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$ and the Completeness of $L_{\mathcal{F}}^{p}(S)$

Mingzhi Wu[1], Yuan Zhao[2]

[1]School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing
[2]Basic Subjects Department, Hebei Finance University, Baoding
Email: wumz@smss.buaa.edu.cn, zhaoyuan135821@163.com

Received: Nov. 21st, 2012; revised: Dec. 9th, 2012; accepted: Dec. 21st, 2012

Abstract: First, we make a primary comparison of the (ε,λ)-topology and the topology of convergence in probability for $L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$. Then, using the relation of the two kinds of topologies for $L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$, we give a proof of Stricker's lemma based on a result in the theory of random normed modules. At last, we show that the random normed module $L_{\mathcal{F}}^{p}(S)$ is complete if and only if S is complete.

Keywords: Random Normed Module; (ε,λ)-Topology; Topology of Convergence in Probability

$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$上两种拓扑的比较与$L_{\mathcal{F}}^{p}(S)$的完备性

吴明智[1]，赵　媛[2]

[1]北京航空航天大学数学与系统科学学院，北京
[2]河北金融学院基础部，保定
Email: wumz@smss.buaa.edu.cn, zhaoyuan135821@163.com

收稿日期：2012 年 11 月 21 日；修回日期：2012 年 12 月 9 日；录用日期：2012 年 12 月 21 日

摘　要：首先，本文对$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$上的$(\varepsilon,\lambda)$-拓扑和依概率收敛拓扑作了一点初步的对比。接着，以$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$为桥梁，利用其上两种拓扑的关系，运用随机赋范模理论中的一些结果给出 Stricker 引理的证明。最后，本文证明随机赋范模S生成的随机赋范模$L_{\mathcal{F}}^{p}(S)$是完备的当且仅当S是完备的。

关键词：随机赋范模；(ε,λ)-拓扑；依概率收敛拓扑

1. 引言

2009 年，数理金融学家 D. Filipović, M. Kupper 和 N. Vogelpoth 在[1,2]中提出了研究条件风险度量理论的模途径，其中极其关键的一点是，他们引入比L^p空间更广泛的具有模结构的$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$空间作为模型空间。2011 年，郭铁信在[3]中证明$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$空间可作为统一研究先前文献中提出的最主要的几类条件风险度量的最一般的模型空间。在随机赋范模(简记为$RN-$模)及其随机共轭空间理论的框架下，以$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$空间作为模型空间的条件风险度量的 Fenchel-Moreau 型表示定理已经得到清晰的阐释。要进一步发展以$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$空间作为模型空间的条件风险度量理论，例如，考虑此类条件风险度量的优化问题，对$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$空间的各种性质的研究是必要的基础。

注意到在$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$上可赋以两种重要的拓扑：一种是在$RN$-模及其随机共轭空间理论框架下自然使用的

(ε,λ)-拓扑，一种是作为由随机变量等价类所构成的空间自然具有的依概率收敛拓扑。尽管(ε,λ)-拓扑是研究$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$的主要拓扑，但是依概率收敛拓扑是风险度量理论乃至数理金融研究文献中广泛使用的拓扑。要充分开发$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$在条件风险度量理论研究领域中的应用，对于$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$空间上的$(\varepsilon,\lambda)$-拓扑和依概率收敛拓扑作一些对比研究是有益的。二者的对比将有助于RN-模及其随机共轭空间理论在条件风险度量理论研究中的进一步应用。本文以$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$为桥梁，利用其上两种拓扑的关系，运用$RN$-模理论中的一些结果，给出在数理金融领域多时期市场资产定价基本定理的研究中有着重要作用的 Stricker 引理的证明。

另外，本文还将考虑比$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$空间更一般的空间$L_{\mathcal{F}}^{p}(S)$，其中$S$是一个$RN$-模，此类空间由郭铁信于文[4]中类比引入。注意到S生成的赋范空间$L^{p}(S)$在一些关于S的研究中所起的桥梁作用(参见，例如[5,6])，从RN-模及其随机共轭空间理论来说，对于空间$L_{\mathcal{F}}^{p}(S)$的研究可能会为今后对于RN-模S上的问题的研究增加工具。本文证明了$L_{\mathcal{F}}^{p}(S)$完备当且仅当S完备。

2. 相关的概念和记号

本文将采用如下记号，$(\Omega,\mathcal{F},P)$表示一个概率空间，N为正整数集合，K表示实数域R或复数域C，$L^{0}(\mathcal{F},K)$表示Ω上的所有K-值$\mathcal{F}$-可测随机变量的等价类在通常的点式加法、乘法和数乘运算下所成的代数。$L^{0}(\mathcal{F})$ $\left(\bar{L}^{0}(\mathcal{F})\right)$表示$\Omega$上的所有实值(相应地，广义实值)$\mathcal{F}$-可测随机变量等价类所成的集合，其上具有序关系$\le$：$\xi\le\eta$当且仅当$\xi^{0}(\omega)\le\eta^{0}(\omega)$，$P$-$a.s.$，其中$\xi^{0}$和$\eta^{0}$分别是$\xi$与$\eta$的任一代表元，对于$L^{0}(\mathcal{F})$，$\left(\bar{L}^{0}(\mathcal{F})\right)$的任一非空子集$\mathcal{H}$，$\wedge\mathcal{H}$和$\vee\mathcal{H}$分别表示$\mathcal{H}$的本性下确界和本性上确界。符号$L_{+}^{0}(\mathcal{F})$以及$L_{++}^{0}(\mathcal{F})$分别表示$P$-$a.s.$非负以及$P$-$a.s.$严格正的$\mathcal{F}$-可测实值随机变量等价类的全体。对所有$\xi\in L^{0}(\mathcal{F},K)$以及$\eta\in L_{++}^{0}(\mathcal{F})$，$|\xi|$和$\eta^{-1}$分别表示随机变量$\left|\xi^{0}\right|$与$\left(\eta^{0}\right)^{-1}$的等价类，这里$\xi^{0}$是$\xi$的任一选定的代表元，而$\eta^{0}$是$\eta$的任一处处严格正的代表元。最后，对于适当的$\xi\in L^{0}(\mathcal{F})$，$E\xi$和$E\left[\xi|\mathcal{G}\right]$将分别表示$\xi$的期望以及$\xi$关于$\mathcal{F}$的子$\sigma$-代数$\mathcal{G}$的条件期望。关于本性上(下)确界和条件期望等概念请参考测度论教材[7]。

定义 2.1[3,4] 称有序对$(S,\|\cdot\|)$为数域K上以$(\Omega,\mathcal{F},P)$为基的一个随机赋范模(简记为RN-模)，如果S是代数$L^{0}(\mathcal{F},K)$上的左模，$\|\cdot\|$是从S到$L_{+}^{0}(\mathcal{F})$的映射，使得如下三条公理满足：

(RN-1) $\|\xi x\|=|\xi|\|x\|$，$\forall\xi\in L^{0}(\mathcal{F},K)$以及$\forall x\in S$；

(RN-2) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|,\forall x,y\in S$；

(RN-3) $\|x\|=0$蕴含x是S中的零向量。

例 2.2 显然，$L^{0}(\mathcal{F},K)$是自身的一个左模，$\left(L^{0}(\mathcal{F},K),|\cdot|\right)$就是数域$K$上以$(\Omega,\mathcal{F},P)$为基的一个$RN$-模。

设$(S,\|\cdot\|)$为数域K上以概率空间$(\Omega,\mathcal{E},P)$为基的一个RN-模，$\mathcal{F}$为$\mathcal{E}$的一个子σ-代数，$p\in[1,+\infty]$。如下我们引入由S生成的赋范空间$L^{p}(S)$和S生成的RN-模$L_{\mathcal{F}}^{p}(S)$。

定义S上的映射$\|\cdot\|_{p}:S\to[0,+\infty]$为：对于任一$x\in S$，

$$\|x\|_{p}=\begin{cases}\left(E\|x\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<+\infty;\\ \underset{\omega\in\Omega}{esssup}\|x\|(\omega), & p=+\infty.\end{cases}$$

以及映射$|||\cdot|||_{p,\mathcal{F}}:S\to\bar{L}_{+}^{0}(\mathcal{F})$为：对于任一$x\in S$，

$$|||x|||_{p,\mathcal{F}}=\begin{cases}\left(E\left[\|x\|^{p}|\mathcal{F}\right]\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<+\infty;\\ \wedge\left\{\xi\in\bar{L}_{+}^{0}(\mathcal{F})\middle|\xi\ge\|x\|\right\}, & p=+\infty.\end{cases}$$

记$L^{p}(S)=\left\{x\in S\middle|\|x\|_{p}<\infty\right\}$，$L_{\mathcal{F}}^{p}(S)=\left\{x\in S\middle||||x|||_{p}\in L_{+}^{0}(\mathcal{F})\right\}$，则可知$\left(L^{p}(S),\|\cdot\|_{p}\right)$为数域$K$上的一个赋范空间，

$\left(L_{\mathcal{F}}^{p}(S),\|\cdot\|_{p,\mathcal{F}}\right)$ 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为基的一个 RN-模。在 $\mathcal{F}$ 明确，不会引起混淆的情况下，$\|\cdot\|_{p,\mathcal{F}}$ 简记为 $\|\cdot\|_{p}$。

对于两种极端的情况：如果 $\mathcal{F}=\mathcal{E}$，则 $\left(L_{\mathcal{F}}^{p}(S),\|\cdot\|_{p}\right)$ 就是 $(S,\|\cdot\|)$ 自身；如果 $\mathcal{F}$ 为平凡 σ-代数 $\{\Omega,\varnothing\}$，则 $\left(L_{\mathcal{F}}^{p}(S),\|\cdot\|_{p}\right)$ 即是由 S 生成的赋范空间 $\left(L^{p}(S),\|\cdot\|_{p}\right)$。由于对于任给 $x\in L_{\mathcal{F}}^{p}(S)$，若令 $\xi=\|x\|_{p}+1$，则有 $\xi\in L_{++}^{0}(\mathcal{F})$，且 $\xi^{-1}x\in L^{p}(S)$，易知

$$L_{\mathcal{F}}^{p}(S)=L^{0}(\mathcal{F})\cdot L^{p}(S)=\left\{\xi x\,\middle|\,\xi\in L^{0}(\mathcal{F}),x\in L^{p}(S)\right\},$$

进而，如果 $\mathcal{G}$ 也为 $\mathcal{F}$ 的一个子 σ-代数并且 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$，则有 $L_{\mathcal{G}}^{p}(S)\subset L_{\mathcal{F}}^{p}(S)$。

当 RN-模 $(S,\|\cdot\|)$ 为 $\left(L^{0}(\mathcal{E}),|\cdot|\right)$ 时，我们记 $L_{\mathcal{F}}^{p}(S)=L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$，此时 $L^{p}(S)$ 空间就是熟知的全体 p-可积(或者本性有界，如果 $p=+\infty$) $\mathcal{E}$-可测实值随机变量等价类构成的 Banach 空间 L^{p}。

在本文中，任给 RN-模 $(S,\|\cdot\|)$，S 上都被赋予 (ε,λ)-拓扑。此种拓扑最初是 B. Schweizer 和 A. Sklar 为研究概率度量空间理论而于 1961 年引入的，更多内容请参见专著[8]。对于本文，我们提请读者记住：RN-模 S 上的 (ε,λ)-拓扑是一个可度量化线性拓扑，S 中的序列 $\{x_n,n\in N\}$ 依 (ε,λ)-拓扑收敛于 $x\in S$ 当且仅当序列 $\{\|x_n-x\|,n\in N\}$ 依概率 P 收敛于 0；因而特别地，$\left(L^{0}(\mathcal{F},K),|\cdot|\right)$ 上的 (ε,λ)-拓扑就是熟知的依概率收敛拓扑。

3. $L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$ 上两种拓扑的对比

$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$ 作为实数域上以 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为基的 RN-模，在 RN-模及其随机共轭空间理论框架下，其上自然赋以 (ε,λ)-拓扑，具体地，序列 $\{x_n,n\in N\}$ 依 (ε,λ)-拓扑收敛于 $x\in S$ 当且仅当 $L_{+}^{0}(\mathcal{F})$ 中的序列 $\left\{\|x_n-x\|_{p},n\in N\right\}$ 依概率收敛于 0；另一方面，$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$ 作为 $L^{0}(\mathcal{E})$ 的一个子集，其上具有依概率收敛拓扑。$L_{\mathcal{F}}^{p}(\mathcal{E})$ 上的 (ε,λ)-拓扑和依概率收敛拓扑都是可度量拓扑，下面将说明前者强于后者。实际上有下述更一般的结论。

定理 3.1 设 $(S,\|\cdot\|)$ 为数域 K 上以概率空间 $(\Omega,\mathcal{E},P)$ 为基的一个 RN-模，$\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{E}$ 的两个子 σ-代数且 $\mathcal{G}\subset\mathcal{H}$，$p\in[1,+\infty]$。那么，如果 $\{x_n,n\in N\}$ 为 $\left(L_{\mathcal{G}}^{p}(S),\|\cdot\|_{p,\mathcal{G}}\right)$ 中的 Cauchy 列，则它也是 $\left(L_{\mathcal{H}}^{p}(S),\|\cdot\|_{p,\mathcal{H}}\right)$ 中的 Cauchy 列。

证明 对于 $p=+\infty$，由定义，$\|x\|_{\infty,\mathcal{H}}\le\|x\|_{\infty,\mathcal{G}}$ 对任给 $x\in L_{\mathcal{G}}^{p}(S)$ 成立，结论是显然的。

对于 $1\le p<+\infty$，采用反证法。假设 $\{x_n,n\in N\}$ 不是 $L_{\mathcal{H}}^{p}(S)$ 中 Cauchy 列，则存在 $\varepsilon>0$ 以及 $0<\lambda<1$，使得任给正整数 L，存在两个正整数 $m\ge n\ge L$ 满足 $P\{A(n,m)\}\ge\lambda$，其中

$$A(n,m)=\left\{\omega\in\Omega\,\middle|\,\|x_n-x_m\|_{p,\mathcal{H}}(\omega)\ge\varepsilon\right\}.$$

注意到条件期望的性质，

$$\|x_n-x_m\|_{p,\mathcal{G}}=\left(E\left[\|x_n-x_m\|_{p,\mathcal{H}}^{p}\,|\mathcal{G}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\ge\left(E\left[\|x_n-x_m\|_{p,\mathcal{H}}^{p}I_{A(n,m)}\,|\mathcal{G}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\ge\left(E\left[\varepsilon^{p}I_{A(n,m)}\,|\mathcal{G}\right]\right)^{\frac{1}{p}}=\varepsilon\left(E\left[I_{A(n,m)}\,|\mathcal{G}\right]\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $I_{A(n,m)}$ 为 $A(n,m)$ 的特征函数。令 $\xi=\left(E\left[I_{A(n,m)}\,|\mathcal{G}\right]\right)^{\frac{1}{p}}$，则 $0\le\xi\le1$ 且 $E\xi^{p}=P\{A(n,m)\}\ge\lambda$，因而

$$E\xi^{p}=E\xi^{p}I_{[\xi<\lambda]}+E\xi^{p}I_{[\xi\ge\lambda]}\le\lambda^{p}+P\{\xi\ge\lambda\},$$

于是 $P\{\xi\ge\lambda\}\ge\lambda-\lambda^{p}$，进而

$$P\left\{\omega\in\Omega\,\middle|\,\|x_n-x_m\|_{p,\mathcal{G}}(\omega)\ge\varepsilon\lambda\right\}\ge\lambda-\lambda^{p},$$

结合前述，上式即说明 $\{x_n,n\in N\}$ 也不是 $L_{\mathcal{G}}^{p}(S)$ 中的 Cauchy 列，矛盾。

推论 3.2 $L^p_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$上的$(\varepsilon,\lambda)$-拓扑强于依概率收敛拓扑。

证明 在上述定理 3.1 中，取$(S,\|\cdot\|)$为$(L^0(\mathcal{E}),|\cdot|)$，$\mathcal{H}$取为$\mathcal{E}$同时$\mathcal{G}$取成$\mathcal{F}$，则可见$L^p_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$中$(\varepsilon,\lambda)$-拓扑下的收敛列也必是$(L^0(\mathcal{E}),|\cdot|)$中的收敛列，也即必然按概率收敛。

一般而言，上述结论中两拓扑的强弱关系是严格的。考虑极端的情形，$\mathcal{F}$为平凡σ-代数$\{\Omega,\varnothing\}$，此时$\left(L^p_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}),\|\cdot\|_p\right)$就是 Banach 空间$\left(L^p(\mathcal{E},R),\|\cdot\|_p\right)$，其上的$(\varepsilon,\lambda)$-拓扑就是$L^p$范数拓扑，熟知一般情况下它是严格强于依概率收敛拓扑的。

接下来是一个利用(ε,λ)-拓扑的结果解决依概率收敛拓扑下的问题的例子：我们将以$L^p_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$为桥梁，运用$RN$-模理论中的结论来证明如下结果：

Stricker 引理 设$(\Omega,\mathcal{E},P)$是一概率空间，$\mathcal{F}$为$\mathcal{E}$的子σ-代数，$Y_1,\cdots,Y_n$是$L^0(\mathcal{E})$中给定n元，则

$$S=\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_iY_i\middle|\xi_i\in L^0(\mathcal{F}),i=1,\cdots,n\right\}$$

在依概率收敛拓扑下是$L^0(\mathcal{E})$中的闭子集。

在数理金融学关于资产定价未定初始值的单周期市场模型中，设Y_i表示第i种资产在一个周期的单股(折现)净收益，而ξ_i表示现有信息$\mathcal{F}$下在此周期持有的第i种资产的股数，那么$\sum_{i=1}^{n}\xi_iY_i$就表示此周期的(折现)净收益，从而上述集合S表示全体可能的(折现)净收益，Stricker 引理断言S在依概率收敛拓扑下是$L^0(\mathcal{E})$中的闭子集，这个事实在多周期市场模型资产定价基本定理的证明中有重要作用，参见教材[9]第 1 和第 5 章。我们下面给出的证明，其基础是RN-模中有限个元生成的子模总是完备的，此结论蕴含在[10]推论 2.7 的证明中。

Stricker 引理的证明 设$\{x_n,n\in N\}$为S中依概率收敛 Cauchy 列，则$\{x_n,n\in N\}$依概率收敛于某$x\in L^0(\mathcal{E})$，只须证明$x\in S$。依 Riesz 定理，存在$\{x_n,n\in N\}$的子列$\{x_{n(k)},k\in N\}$ $P-a.s.$收敛于x，由此$X:=\vee_{k\geq1}\left|x_{n(k)}\right|+1\in L^0_{++}(\mathcal{E})$。令

$$Y=\sum_{i=1}^{n}|Y_i|+1,\quad Z=XY,$$

则$\left|\frac{x_{n(k)}}{Z}\right|\leq\left|\frac{x_{n(k)}}{X}\right|<1$且$\left\{\frac{x_{n(k)}}{Z},k\in N\right\}$ $P-a.s.$收敛于$\frac{x}{Z}$。

对每个i，记$Z_i=\frac{Y_i}{Z}$，可知$|Z_i|\leq\left|\frac{Y_i}{Y}\right|<1$，于是所有的$Z_i\in L^1(\mathcal{E})$。若设$T=Z^{-1}S$，则可见

$$T=\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_iZ_i\middle|\xi_i\in L^0(\mathcal{F}),i=1,\cdots,n\right\}\subset L^1_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}),$$

且T为$L^1_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$的有限生成的子模，因而$T$为$RN$-模$L^1_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$中$(\varepsilon,\lambda)$-拓扑下的完备子集。因为$\frac{x_{n(k)}}{Z}\in T$，并且根据 Lebesgue 控制收敛定理，当$k\to\infty$时，$E\left[\left|\frac{x_{n(k)}}{Z}-\frac{x}{Z}\right|\middle|\mathcal{F}\right]\to0$，$P-a.s.$，也即$\left\{\frac{x_{n(k)}}{Z},k\in N\right\}$在$L^1_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$中依$(\varepsilon,\lambda)$-拓扑收敛于$\frac{x}{Z}$，于是可知$\frac{x}{Z}\in T$，进而有$x\in ZT=S$。

4. $L^p_{\mathcal{F}}(S)$的完备性

设$(S,\|\cdot\|)$为数域K上以概率空间$(\Omega,\mathcal{E},P)$为基的一个RN-模，$\mathcal{F}$为$\mathcal{E}$的一个子σ-代数，$p\in[1,+\infty]$，本节的目的是证明RN-模$L^p_{\mathcal{F}}(S)$完备当且仅当S完备。为此我们先建立S完备和其生成的赋范空间$L^p(S)$完备二者

的等价性。

定理 4.1 若S完备，则对于所有$p\in[1,+\infty]$，$L^p(S)$都是完备的。

证明 $p=+\infty$时，结论是显然的，因而我们假设$p\in[1,+\infty)$。设$\{x_n,n\in N\}$为$L^p(S)$中的一个Cauchy列，即有，当$m,n\to\infty$时，$E\|x_m-x_n\|^p\to 0$，由此$\|x_m-x_n\|\xrightarrow{P}0$，从而$\{x_n,n\in N\}$也必为$S$中的一个Cauchy列，故收敛于某$x\in S$。根据Fatou引理，

$$E\|x_m-x_n\|^p\le\varliminf_{n\to\infty}E\|x_m-x_n\|^p<+\infty,$$

因而$x\in L^p(S)$，进一步对m取极限，有

$$\lim_{m\to\infty}E\|x_m-x\|^p\le\lim_{m\to\infty}\varliminf_{n\to\infty}E\|x_m-x_n\|^p=0,$$

由此即说明$\{x_n,n\in N\}$在$L^p(S)$中收敛于x。

定理 4.2 若对于某一$p\in[1,+\infty]$，$L^p(S)$是完备的，则S完备。

证明 设$\{x_n,n\in N\}$是S中的一个Cauchy序列，则$\{\|x_n\|,n\in N\}$是$L^0(\mathcal{E})$中的Cauchy列，于是存在子列$\{\|x_{n(k)}\|,k\in N\}$ $P-a.s.$收敛于某$\xi\in L^0(\mathcal{E})$，进而$\eta=\vee_{k\ge1}\|x_{n(k)}\|+1\in L^0_{++}(\mathcal{E})$。对任一$k\in N$，记$y_k=\eta^{-1}x_{n(k)}$，则$\{y_k,k\in N\}$也是$S$中的Cauchy列。只须证明$\{y_k,k\in N\}$收敛于某$y\in S$。事实上，如果证明了这一点，那么我们易见$\{x_n,n\in N\}$收敛于$\eta y$。

A. 先证明$p\in[1,+\infty)$的情形。

显见$\|y_k\|<1$，由此$y_k\in L^p(S)$，依据Lebesgue控制收敛定理我们可知，$\{y_k,k\in N\}$也为$L^p(S)$中的Cauchy列，由$L^p(S)$的完备性可设其在$L^p(S)$中收敛于$y\in L^p(S)$，此即蕴含$\{y_k,k\in N\}$在S中收敛于$y\in S$。

B. 接下来证明$p=+\infty$的情形。我们将分两步完成证明。

(1) 先证明S具有可数连接性质。

为此，任取S中的一个序列$\{p_n,n\in N\}$以及Ω的一个可数$\mathcal{F}$-剖分$\{A(n),n\in N\}$，我们需要找到$p\in S$使得$\tilde{I}_{A(n)}p=\tilde{I}_{A(n)}x_n$ (其中$\tilde{I}_{A(n)}$表示$A(n)$的特征函数的等价类)。下面我们将p构造出来。

对于每一个$n\in N$，我们可适当选取$\xi_n\in L^0_{++}(\mathcal{E})$使得$\|\xi_n p_n\|\le\frac{1}{2^n}$，例如可取$\xi_n=\frac{1}{(2^n\|p_n\|+1)}$，令$q_n=\sum_{i=1}^{n}\tilde{I}_{A(i)}\xi_i p_i$。可知$q_n\in L^\infty(S)$，并且$\{q_n,n\in N\}$是$L^\infty(S)$中的一个Cauchy列，由于$L^\infty(S)$完备，因而$\{q_n,n\in N\}$收敛于某$q\in L^\infty(S)$。

根据我们的构造，可知$\tilde{I}_{A(n)}q=\tilde{I}_{A(n)}\xi_n p_n,\forall n\in N$。记$\xi=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{I}_{A(i)}(\xi_i)^{-1}\in L^0_+(\mathcal{E})$，令$p=\xi q$，则有

$$\tilde{I}_{A(n)}p=\tilde{I}_{A(n)}\xi q=\tilde{I}_{A(n)}(\xi_n)^{-1}\tilde{I}_{A(n)}\xi_n p_n=\tilde{I}_{A(n)}p_n,\forall n\in N,$$

这即说明p正是我们所寻。

(2) 证明S的完备性。

由于$\{y_k,k\in N\}$也是S中的Cauchy列，即有

$$\lim_{k,l\to\infty}P\{\omega\in\Omega\,\big|\,\|y_k-y_l\|(\omega)<\varepsilon\}=1,\quad\forall\varepsilon>0,$$

因而可选取严格增趋于∞的正整数序列$\{k(m),m\in N\}$使得，对任一$i\in N$，

$$P\{\omega\in\Omega\,\big|\,\|y_{k(l)}-y_{k(m)}\|(\omega)<2^{-i}\}>1-2^{-i},\forall l,m\ge i,$$

设$B(i)$是$\{\omega\in\Omega\,\big|\,\|y_{k(i+1)}-y_{k(i)}\|(\omega)<2^{-i}\}$的代表元，$i=1,2,\cdots$，则$P\{B(i)\}>1-2^{-i}$。令$A(n)=\bigcap_{i=n}^{\infty}B(i)$，则

$$P\{A(n)\}=1-P\{A(n)^c\}=1-P\left\{\bigcup_{i=n}^{\infty}B(i)^c\right\}>1-\sum_{i=n}^{\infty}2^{-i}=1-\frac{1}{2^{n-1}}\nearrow 1。$$

由于$\sum_{i=n}^{\infty}\left\|\tilde{I}_{A(n)}y_{k(i+1)}-\tilde{I}_{A(n)}y_{k(i)}\right\|\le\sum_{i=n}^{\infty}\tilde{I}_{A(n)}2^{-i}\le 2^{-n+1}\tilde{I}_{A(n)}$，于是，$l\to\infty$时，

$\sum_{i=n}^{l}\left(\tilde{I}_{A(n)}y_{k(i+1)}-\tilde{I}_{A(n)}y_{k(i)}\right)=\tilde{I}_{A(n)}y_{k(l+1)}-\tilde{I}_{A(n)}y_{k(n)}$在$L^\infty(S)$中收敛于某$z_n$，故$l\to\infty$时，$\tilde{I}_{A(n)}y_{k(l)}$在$S$中收敛于$\tilde{I}_{A(n)}y_{k(n)}+z_n$。

最后，我们令$C(1)=A(1)$，$C(n+1)=A(n+1)\setminus A(n),\forall n\in N$，根据(1)，我们令$y$为$\left\{\tilde{I}_{A(n)}y_{k(n)}+z_n,n\in N\right\}$关于$\{C(n),n\in N\}$的可数连接，也即，$y:=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{I}_{C(n)}\left(\tilde{I}_{A(n)}y_{k(n)}+z_n\right)$，于是$\{y_k,k\in N\}$的子列因而它自身在$S$中收敛于$y$。

现在我们陈述并证明本节的主要结果。

定理 4.3 对任一$p\in[1,+\infty]$，$L^p_{\mathcal{F}}(S)$完备当且仅当S完备。

证明 考察RN-模$L^p_{\mathcal{F}}(S)$生成的L^p空间$L^p\left(L^p_{\mathcal{F}}(S)\right)$，其中的范数设为$\|\cdot\|_{\mathcal{F},p}$，我们将证明$L^p_{\mathcal{F}}(S)$生成的赋范空间$\left(L^p\left(L^p_{\mathcal{F}}(S)\right),\|\cdot\|_{\mathcal{F},p}\right)$就是$S$生成的赋范空间$\left(L^p(S),\|\cdot\|_p\right)$。为此，只须对任给$x\in L^p\left(L^p_{\mathcal{F}}(S)\right)$，证明$\|x\|_{\mathcal{F},p}=\|x\|_p$。如下分两种情况进行讨论：

(1) $p\in[1,+\infty)$，则$\|x\|^p_{\mathcal{F},p}=\left[E\|x\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}\cdot p}=E\left(E\left[\|x\|^p|\mathcal{F}\right]\right)=E\|x\|^p$；

(2) $p=+\infty$，根据定义有关系式：$\left\|\|x\|\right\|_\infty\le\|x\|_\infty$以及$\left\|\|x\|\right\|_\infty\ge\|x\|$，进而

$$\|x\|_{\mathcal{F},\infty}=\underset{\omega\in\Omega}{esssup}\left\|x\right\|_\infty(\omega)\le\|x\|_\infty\text{ 以及 }\|x\|_{\mathcal{F},\infty}=\underset{\omega\in\Omega}{esssup}\left\|x\right\|_\infty(\omega)\ge\|x\|_\infty,$$

因而综合起来有$\|x\|_{\mathcal{F},\infty}=\|x\|_\infty$。

于是，我们运用前述定理 4.1 和定理 4.2 即得

$$L^p_{\mathcal{F}}(S)\text{ 完备，当且仅当 }L^p\left(L^p_{\mathcal{F}}(S)\right)=L^p(S)\text{ 完备，当且仅当 }S\text{ 完备。}$$

注记 4.4 $L^p_{\mathcal{F}}(S)$生成的赋范空间$\left(L^p\left(L^p_{\mathcal{F}}(S)\right),\|\cdot\|_{\mathcal{F},p}\right)$就是$S$生成的赋范空间$\left(L^p_{\mathcal{F}}(S),\|\cdot\|_p\right)$，实际上，这一结论在[4]中就已经被证明。在上述证明中，我们提请读者注意我们的符号，$\left\|\|x\|\right\|_\infty$和$\|x\|$是随机变量(等价类)而$\|x\|_\infty$是非负实数。

参考文献 (References)

[1] D. Filipović, M. Kupper and N. Vogelpoth. Separation and duality in locally L^0-convex modules. Journal of Functional Analysis, 2009, 256: 3996-4029.

[2] D. Filipović, M. Kupper and N. Vogelpoth. Approaches to conditional risks. Working Paper Series No. 28, Vienna: Vienna Institute of Finance, 2009.

[3] T. X. Guo. Recent progress in random metric theory and its applications to conditional risk measures. Science China Mathematics, 2011, 54(4): 633-660.

[4] T. X. Guo. Relations between some basic results derived from two kinds of topologies for a random locally convex module. Journal of Functional Analysis, 2010, 258: 3024-3047.

[5] T. X. Guo, S. B. Li. The James theorem in complete random normed modules. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 308: 257-265.

[6] M. Z. Wu. The Bishop-Phelps theorem in complete random normed modules endowed with the (ε,λ)-topology. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 391: 648-652.

[7] 严加安. 测度论讲义[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[8] B. Schweizer, A. Sklar. Probabilistic metric spaces. New York: Dover Publications, 2005.

[9] H. Föllmer, A. Schied. Stochastic finance, an introduction in discrete time. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2002.

[10] T. X. Guo, G. Shi. The algebraic structure of finitely generated $L^0(\mathcal{F},K)$-modules and the Helly theorem in random normed modules. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 381: 833-842.

