Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 51-55
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.31009 Published Online January 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Solvability of a Class of Nonlinear Fourth-Order Three-Point Boundary Value Problems*

Yupeng Li

College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing
Email: youxiang201@163.com

Received: Dec. 1st, 2012; revised: Dec. 16th, 2012; accepted: Dec. 26th, 2012

Abstract: The existence of solutions and positive solutions for a class of fourth-order three-point boundary value problems is investigated in this paper. Employing the Green function of a third-order three-point boundary value problem, the equivalent integral equation system is established, and some sufficient conditions of existence of solutions and positive solutions are obtained for this class of fourth-order three point boundary value problems.

Keywords: Fourth-Order Ordinary Differential Equation; Three-Point Boundary Value Problem; Solution and Positive Solution; Fixed Point Theorem

一类非线性四阶三点边值问题的可解性*

李玉朋

南京航空航天大学理学院，南京
Email: youxiang201@163.com

收稿日期：2012 年 12 月 1 日；修回日期：2012 年 12 月 16 日；录用日期：2012 年 12 月 26 日

摘　要：研究了一类四阶三点边值问题解与正解的存在性。利用一类三阶三点边值问题的 Green 函数，建立了等价的积分方程组，得到了该类四阶三点边值问题解和正解存在的充分条件。

关键词：四阶常微分方程；三点边值问题；解和正解；不动点定理

1. 引言

本文研究下列非线性四阶三点边值问题的解和正解的存在性：

$$\begin{cases} y^{(4)}(t)+f\left(t,y(t),y'(t)\right)=0, 0\le t\le 1, \\ y(0)=A, y'(0)=B, y''(0)=C, y''(1)=\alpha y''(\eta), 0<\eta<1. \end{cases} \tag{p}$$

始终假定 $f:[0,1]\times R\times R\to R$ 或 $f:[0,1]\times R^+\times R^+\to R^+$ 连续，其中 $R^+=[0,+\infty)$。

在 $C[0,1]$ 中取范数 $\|y\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|y(t)|, y\in C[0,1]$。我们称 y^* 是问题(P)的一个正解，如果 y^* 是问题(P)的解，并且 $y^*(t)>0, 0<t<1$。

四阶常微分方程边值问题是熟知的刻画弹性梁状态的数学模型，在弹性力学和工程物理中有广泛的应用。本文将在较一般的情况下研究问题(P)，不要求非线性项 f 有界，同时允许边界条件是非齐次的。

2. 预备知识

*资助信息：国家自然科学基金(编号 11172125)。

设 $\alpha\eta\neq 1$ 时，设 $\varphi(t)=\dfrac{C(\alpha-1)}{2(1-\alpha\eta)}t^2+Ct+B$ 。易知：

$$\varphi(0)=B,\varphi'(0)=C,\qquad \varphi'(1)=\alpha\varphi'(\eta)=\frac{C\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}.$$

计算可知：

当 $0\le\alpha\le 1$ 或 $\alpha>1,\alpha\eta<1$ 时， $\max\limits_{0\le t\le 1}|\varphi(t)|=\max\left\{|B|,|B+C|,\left|\dfrac{C(\alpha-1)}{2-2\alpha\eta}+C+B\right|\right\}$；

当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1,\alpha\eta>1$ 时， $\max\limits_{0\le t\le 1}|\varphi(t)|=\max\left\{|B|,\left|\dfrac{C(\alpha-1)}{2-2\alpha\eta}+C+B\right|,\left|B-\dfrac{C(1-\alpha\eta)}{2(\alpha-1)}\right|\right\}$ 。

记 $\omega=\max\left\{|A|,\max\limits_{0\le t\le 1}|\varphi(t)|\right\}$ 。

引理[1,2] 设 $\alpha\eta\neq 1$，则三阶三点边值问题

$$\begin{cases} y'''(t)=0, & t\in(0,1),\\ y(0)=y'(0)=0, y'(1)=\alpha y'(\eta), & 0<\eta<1.\end{cases}$$

的 Green 函数

$$G(t,s)=\frac{1}{2(1-\alpha\eta)}\begin{cases}(2ts-s^2)(1-\alpha\eta)+t^2s(\alpha-1), & s\le\min\{\eta,t\},\\ t^2(1-\alpha\eta)+t^2s(\alpha-1), & t\le s\le\eta,\\ (2ts-s^2)(1-\alpha\eta)+t^2(\alpha\eta-s), & \eta\le s\le t,\\ t^2(1-s), & \max\{\eta,t\}\le s.\end{cases}$$

是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数。

当 $1<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$ 时， $0<G(t,s)\le g(s)\ (\forall(t,s)\in(1,1)\times(0,1))$ ，其中 $g(s)=\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha\eta}s(1-s)$ ，并且当 $(t,s)\in\left[\dfrac{\eta}{\alpha},\eta\right]\times(0,1)$ ， $G(t,s)\ge\gamma g(s)$ ，其中 $\gamma=\dfrac{\eta^2}{2\alpha^2(1+\alpha)}\min\{\alpha-1,1\}$ 。

由计算可知：

当 $\alpha\eta<1$ 或 $\alpha\eta>1,\alpha\eta^2\le 1$ 时， $\max\limits_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\right|=\left|\dfrac{1-\alpha\eta^2}{4(1-\alpha\eta)}-\dfrac{1}{6}\right|$；

当 $\alpha\eta>1,\alpha\eta^2>1$ 时， $\max\limits_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\right|=\max\left\{\left|\dfrac{1-\alpha\eta^2}{4(1-\alpha\eta)}-\dfrac{1}{6}\right|,\dfrac{(1-\alpha\eta^2)^3}{12(1-\alpha\eta)^3}\right\}$ 。

记 $M=\max\limits_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\right|$ 。

3. 主要结果与证明

定理 2.1 设 $\alpha\eta\neq 1$, $f:[0,1]\times R\times R\to R$ 。如果存在 $m>1,\dfrac{1}{m}<k\le\dfrac{m-1}{m}$ 和 $d>0$ ，使得

$$\max\left\{\left|f(t,y_0,y_1)\right|:0\le t\le 1,|y_0|\le m\omega+d,|y_1|\le k(m\omega+d)\right\}\le M^{-1}\left[(km-1)\omega+kd\right]$$

则问题(P)至少有一个解 $y^*\in C^4[0,1]$，满足

$$\left|y^*\right| \le m\omega + d \qquad \left|\left(y^*\right)'\right| \le k\left(m\omega + d\right)$$

证明 考察赋予范数$\left\|(y,x)\right\| = \max\left\{\|y\|, k^{-1}\|x\|\right\}$的 Banach 空间$C[0,1]\times C[0,1]$。

设$x(t) = y'(t), 0 \le t \le 1$。则问题(P)等价于微分方程组

$$\begin{cases} y'(t) = x(t), & 0 \le t \le 1, \\ x'''(t) + f\left(t, y(t), x(t)\right) = 0 \\ y(0) = A, x(0) = B, x'(0) = C, x'(1) = \alpha x'(\eta) \end{cases}$$

该微分方程组又等价于积分方程组

$$\begin{cases} y(t) = A + \int_0^t x(s)\mathrm{d}s \\ x(t) = \varphi(t) + \int_0^1 G(t,s) f\left(s, y(s), x(s)\right)\mathrm{d}s \end{cases}$$

设$T(y,x) = \left(T_1(y,x), T_2(y,x)\right)$，其中

$$\begin{cases} T_1(y,x) = A + \int_0^t x(s)\mathrm{d}s \\ T_2(y,x) = \varphi(t) + \int_0^1 G(y,x) f\left(s, y(s), x(s)\right)\mathrm{d}s \end{cases}$$

则上述积分方程组等价于不动点方程

$$T(y,x) = (y,x) \qquad (y,x) \in C[0,1]\times C[0,1]$$

由 Arzela-Ascoli 定理[7]易知$T_1, T_2 : C[0,1]\times C[0,1] \to C[0,1]$均是全连续的。由此$T : C[0,1]\times C[0,1] \to C[0,1]\times C[0,1]$也是全连续的。

设$V_{m\omega+d} = \left\{(y,x) \in C[0,1]\times C[0,1] : \left\|(y,x)\right\| \le m\omega + d\right\}$。显然$V_{m\omega+d}$是一个包含$(0,0)$的有界凸闭集。$\forall (y,x) \in V_{m\omega+d}$,则$\|y\| \le m\omega + d, \|x\| \le k\left(m\omega + d\right)$。由定理 2.1 条件我们知

$$\left|f\left(t, y(t), x(t)\right)\right| \le M^{-1}\left[(km-1)\omega + kd\right], \quad 0 \le t \le 1$$

$$\left\|T_1(y,x)\right\| \le |A| + \max_{0\le t\le 1}\int_0^t \left|x(s)\right|\mathrm{d}s \le \omega + \max_{0\le t\le 1}\int_0^t \left\|x(s)\right\|\mathrm{d}s \le \omega + k\left(m\omega + d\right) \le m\omega + d \qquad \left(k \le \frac{m-1}{m}\right)$$

$$\left\|T_2(y,x)\right\| \le \max_{0\le t\le 1}\left|\varphi(t)\right| + \max_{0\le t\le 1}\int_0^t G(t,s)\left|f\left(s, y(s), x(s)\right)\right|\mathrm{d}s \le \omega + (km-1)\omega + kd = k\left(m\omega + d\right)$$

由此知$\left\|T(y,x)\right\| = \max\left\{\left\|T_1(y,x)\right\|, k^{-1}\left\|T_2(y,x)\right\|\right\} \le m\omega + d$。

因此：$T : V_{m\omega+d} \to V_{m\omega+d}$。

根据 Schauder 不动点定理[6]，存在$\left(y^*, x^*\right) \in V_{m\omega+d}$，使得$T\left(y^*, x^*\right) = \left(y^*, x^*\right)$。于是$y^*$是问题(P)的一个解$y^* \in C^2[0,1]$，且满足$\left\|y^*\right\| \le m\omega + d, \left\|\left(y^*\right)'\right\| \le k\left(m\omega + d\right)$，显然$y^* \in C^4[0,1]$。

定理 2.2 设$1 < \alpha < \frac{1}{\eta}$，$f : [0,1]\times R^+ \times R^+ \to R^+$，$A \ge 0, B \ge 0, C \le 0$且$\frac{C(\alpha-1)}{2-2\alpha\eta} + C + B \ge 0$。若存在$m > 1, \frac{1}{m} < k \le \frac{m-1}{m}$和$d > 0$，使得

$$\max\left\{f\left(t, y_0, y_1\right) : 0 \le t \le 1, 0 \le y_0 \le m\omega + d, 0 \le y_1 \le k\left(m\omega + d\right)\right\} \le M^{-1}\left[(km-1)\omega + kd\right]$$

则问题(P)至少有一个非负非减解$y^* \in C^4[0,1]$，满足

$$\left|y^*\right| \le m\omega + d \qquad \left|\left(y^*\right)'\right| \le k\left(m\omega + d\right)$$

此外，如果 $A^2+B^2+C^2>0$，则 y^* 是正解；若 $A=B=C=0$，且存在 λ，使得 $f\left(\lambda,0,0\right)>0$，则 $y^*\left(t\right)>0$，当 $t\in\left[\frac{\eta}{\alpha},1\right]$。

证明 由 $1<\alpha<\frac{1}{\eta}$，$\varphi''\left(t\right)=\frac{C\left(\alpha-1\right)}{1-\alpha\eta}\le 0,0\le t\le 1$ 以及 $\varphi\left(0\right)=B\ge 0$，$\varphi\left(1\right)=\frac{C\left(\alpha-1\right)}{2-2\alpha\eta}+B+C\ge 0$ 得，$\varphi\left(t\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上是非负的凹函数。因此 $\varphi\left(t\right)\ge 0,0\le t\le 1$。

构造辅助函数

$$\tilde{f}\left(t,y_0,y_1\right)=\begin{cases} f\left(t,y_0,y_1\right), & \left(y_0,y_1\right)\in R^+\times R^+, \\ f\left(t,y_0,0\right), & \left(y_0,y_1\right)\in R^+\times R^-, \\ f\left(t,0,y_1\right), & \left(y_0,y_1\right)\in R^-\times R^+, \\ f\left(t,0,0\right), & \left(y_0,y_1\right)\in \mathrm{R}^-\times R^-. \end{cases}$$

则 $\tilde{f}:\left[0,1\right]\times R\times R\to R^+$ 连续，并且

$$\begin{aligned} &\max\left\{\left|\tilde{f}\left(t,y_0,y_1\right)\right|:0\le t\le 1,-\left(m\omega+d\right)\le y_0\le m\omega+d,-k\left(m\omega+d\right)\le y_1\le k\left(m\omega+d\right)\right\} \\ &=\max\left\{f\left(t,y_0,y_1\right):0\le t\le 1,0\le y_0\le m\omega+d,0\le y_1\le k\left(m\omega+d\right)\right\}\le M^{-1}\left[k\left(m-1\right)\omega+kd\right]. \end{aligned}$$

根据定理 2.1，边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)}\left(t\right)+\tilde{f}\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right)=0,0\le t\le 1, \\ y\left(0\right)=A,y'\left(0\right)=B,y''\left(0\right)=C,y''\left(1\right)=\alpha y''\left(\eta\right),0<\eta<1 \end{cases}$$

有一个解 y^*，满足 $\left\|y^*\right\|\le m\omega+d,\left\|\left(y^*\right)'\right\|\le k\left(m\omega+d\right)$，并且对于 $0\le t\le 1$，

$$y^*\left(t\right)=A+\int_0^t\left(y^*\right)'\left(s\right)\mathrm{d}s$$

$$\left(y^*\right)'\left(t\right)=\varphi\left(y^*\right)'+\int_0^1 G\left(t,s\right)\tilde{f}\left(s,y^*\left(s\right),\left(y^*\right)'\left(s\right)\right)\mathrm{d}s$$

结合 $1<\alpha<\frac{1}{\eta}$，$\varphi\left(t\right)\ge 0$，$G\left(t,s\right)\ge 0$，$\left(t,s\right)\in\left(0,1\right)\times\left(0,1\right)$。以及 $\tilde{f}\left(t,y^*\left(t\right),\left(y^*\right)'\left(t\right)\right)\ge 0$ 得 $\left(y^*\right)'\left(t\right)\ge 0$，于是解 $y^*\left(t\right)$ 是非减的且 $y^*\left(0\right)=A\ge 0$。所以 $y^*\left(t\right)\ge 0,0\le t\le 1$。再由 $\tilde{f}$ 的定义，对于 $0\le t\le 1$，

$$\tilde{f}\left(t,y^*\left(t\right),\left(y^*\right)'\left(t\right)\right)=f\left(t,y^*\left(t\right),\left(y^*\right)'\left(t\right)\right).$$

因此 y^* 是问题(P)的一个非负非减解。并且

$$y^*\left(t\right)=A+\int_0^t\left(y^*\right)'\left(s\right)\mathrm{d}s$$

$$\left(y^*\right)'\left(t\right)=\varphi\left(t\right)+\int_0^1 G\left(t,s\right)f\left(s,y^*\left(s\right),\left(y^*\right)'\left(s\right)\right)\mathrm{d}s$$

如果 $A>0$，则 $y^*\left(t\right)\ge A>0,0\le t\le 1$。如果 $B^2+C^2>0$，则 $\varphi\left(t\right)$ 不恒为零，于是 $\left\|\varphi\right\|>0$。由于 $\varphi\left(t\right)$ 是 $\left[0,1\right]$ 上的非负凹函数，于是 $\left(y^*\right)'\left(t\right)\ge\varphi\left(t\right)\ge\left\|\varphi\right\|\min\left\{t,1-t\right\}>0,0<t<1$ [5]。因此 $y^*\left(t\right)$ 是 $\left[0,1\right]$ 上非负严格增函数，则 $y^*\left(t\right)>0$。

若 $A=B=C=0$，则 $\varphi(t)$ 恒为零。又因为存在 λ，使得 $f(\lambda,0,0)>0$，可知零函数不是问题(P)的解[3]。则 $\|y^*\|>0$，并且 $\|(y^*)'\|>0$ [4]。根据引理知

$$\text{当}\, t\in\left[\frac{\eta}{\alpha},\eta\right],\quad G(t,s)\geq\gamma g(s);\quad g(s)\geq\max_{0\leq t\leq 1}G(t,s).$$

于是对于 $t\in\left[\frac{\eta}{\alpha},\eta\right]$，有

$$\begin{aligned}(y^*)'(t)&=\int_0^1 G(t,s)f\left(s,y^*(s),(y^*)'(s)\right)\mathrm{d}s\geq\gamma\int_0^1 g(s)f\left(s,y^*(s),(y^*)'(s)\right)\mathrm{d}s\\&\geq\gamma\max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s)f\left(s,y^*(s),(y^*)'(s)\right)\mathrm{d}s\geq\gamma\left\|(y^*)'\right\|>0\end{aligned}$$

所以 $y^*(t)$ 在 $\left[\frac{\eta}{\alpha},\eta\right]$ 上非负严格增函数，则 $y^*(t)>0, t\in\left[\frac{\eta}{\alpha},1\right]$。

4. 应用举例

例 考察边值问题

$$\begin{cases}y^{(4)}(t)=\dfrac{1}{5}\sqrt{y(t)}\,y'(t)+\mathrm{e}^{\frac{y'(t)}{3}} & 0\leq t\leq 1\\ y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=0, y''(1)=2y''\left(\dfrac{1}{3}\right)\end{cases}$$

此处 $f:[0,1]\times R^+\times R^+\to R^+$, $f(t,y_0,y_1)=\frac{1}{5}\sqrt{y_0}\,y_1+\mathrm{e}^{\frac{y_1}{3}}$。

相应条件中 $\alpha=2,\eta=\frac{1}{3},A=B=1,C=0$，则由预备知识可得 $\omega=1, M=\frac{5}{12}$。取 $m=8,k=\frac{1}{3},d=1$，则

$$m\omega+d=9,\ k(m\omega+d)=3,$$

$$\max\left\{f(t,y_0,y_1):0\leq t\leq 1,0\leq y_0\leq 9,0\leq y_1\leq 3\right\}=\frac{9}{5}+\mathrm{e}\leq\frac{12}{5}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\right).$$

根据定理 2.2，该边值问题存在一个正解 y^* 满足 $\|y^*\|\leq 9, \left\|(y^*)'\right\|\leq 3$。

5. 致谢

作者感谢导师陈芳启教授的悉心指导和热情鼓励以及国家自然科学基金的资助。

参考文献 (References)

[1] L. J. Guo, J. P. Sun and Y. H. Zhao. Existence of positive solutions for nonlinear third-order three-point boundary value problems [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 68(10): 3151T-3158T.

[2] T. Nesemann. Positive nonlinear difference equations: Some results and applications. Nonlinear Analysis—Theory Methods and Applications, 2001, 47(7): 4707-4717.

[3] 孙经先. 非线性泛函分析及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[4] 郭大钧. 非线性泛函分析(第 2 版)[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2003.

[5] Q. L. Yao. The existence and multiplicity of positive solutions for a third-order three point boundary value problems. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2003, 19(1): 117-122.

[6] 姚庆六. 一类非线性四阶三点边值问题的可解性[J]. 山东大学学报: 理学版, 2006, 41(1): 11-15.

[7] 张建国, 张福伟, 刘进生. 一类四阶方程边值问题正解的存在性与多解性[J]. 工程数学学报, 2005, 22(5): 864-868.

