Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 101-106
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.31016 Published Online January 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

On the Generalized Inflated *G*-Algebras*

Wenlin Huang

School of Information, Renmin University of China, Beijing
Email: wenlinhuang@163.com

Received: Nov. 24th, 2012; revised: Dec. 16th, 2012; accepted: Dec. 23rd, 2012

Abstract: We defined the generalized inflated *G*-algebra, and obtained the necessary and sufficient condition for the local generalized inflated *G*-algebra. We also studied the blocks of finite groups and that of its factor groups with the inflated *G*-algebra, and hence promoted the results on the block cover and the block control, moreover, we characterized the defected group of the generalized inflated *G*-algebra.

Keywords: *G*-Algebra; Generalized Inflated; Block Cover; Block Control; Defect Group

关于 *G*-代数的广义膨胀的几个结论*

黄文林

中国人民大学信息学院，北京
Email: wenlinhuang@163.com

收稿日期：2012 年 11 月 24 日；修回日期：2012 年 12 月 16 日；录用日期：2012 年 12 月 23 日

摘　要：在本文中，我们借助 *G*-代数的(内)张量积定义了广义膨胀 *G*-代数这个概念，得到了广义膨胀 *G*-代数是局部 *G*-代数的充要条件，推广了关于块覆盖和块控制的相应结论，我们还得到了关于广义膨胀 *G*-代数的亏群的一个刻画。

关键词：*G*-代数；广义膨胀；块覆盖；块控制；亏群

1. 研究背景

有限群的模表示论自上世纪四十年代创立以来就一直蓬勃发展，它为研究群结构和群代数的结构提供一种可行的线性方法，并且取得了丰硕的研究成果。*G*-代数是有限群模表示论中的一个十分重要的研究对象，比如对群代数$\mathcal{O}G$、$\mathcal{O}G$-模、矩阵 *G*-代数、斜群环 $A*G$、纽群代数 $R^{\alpha}G$、$\mathcal{O}G$-图表等等的研究都可以归结到对 *G*-代数的研究。

膨胀方法是一个自然的方法，它被用来分析群代数上的模和它的因子群所对应的群代数上的模之间的关系，许多作者研究过模和代数上的膨胀方法[1-4]。比如，文献[1]给出了膨胀模是投射模的判断条件，*Karpilovsky* 进一步将该结论推广到 *G*-代数上[4]。同样是用这种方法，群的块代数和它的因子群的特征标之间的关系、

块代数之间的许多关系也被深刻地揭示出来。不仅如此，通过膨胀方法我们还可以扩张一个正规子群上的不可约模到纽群代数上去[5]，可以借用膨胀模将群上的不可约单模表达为子群上的模的诱导[6]，以及结合模的膨胀方法可以用 *Heller* 算子提供一个构造 *p*-群上的 *Endo-permutation* 模的方法[7]。

在本文中，在上述模和 *G*-代数的膨胀方法的基础上，借助 *G*-代数的(内)张量积 方法，我们提出广义膨胀 *G*-代数这个概念，得到了广义膨胀 *G*-代数是局部 *G*-代数的充要条件，并用广义膨胀方法，我们进一步讨论群的块和它的因子群的块之间的若干关系，推广了关于块覆盖和块控制的相应结论，我们还得到了关于广义膨胀 *G*-

*基金项目：国家自然科学基金资助课题(No. 10826057)。

代数的亏群的一个刻画。

本文的写作结构是：第一节介绍研究背景，第二节先介绍广义膨胀 G-代数，然后叙述本文所获得的主要结论，第三节给出本文主要结论的完整说明。

2. 定义和主要结论

在本文中，我们设定$\mathcal{O}=k$是一个特征为素数 p 的代数封闭域，N 总是有限群 G 的一个正规子群，我们还约定$\otimes$总是表示$\otimes_k$的简写。本文的主要概念请参见文献[7]。

设(C,ϕ)是一个G/N-代数，按文献[7]，(C,ϕ)的膨胀 G-代数是一个 G-代数$(\inf(C),\inf(\phi))$，这里$\inf(C)=C$，$(\inf(\phi))(g)=\phi(gN)$，$g\in G$。明显地，如果(C,ϕ)是局部G/N-代数，那么$(\inf(C),\inf(\phi))$是一个局部 G-代数，并且，如果(C,ρ)是一个内G/N-代数，那么$(\inf(C),\inf(\rho))$也是一个内 G-代数。

(A_1,ϕ_1)和(A_1,ϕ_1)都是 G-代数，在本文中，它们的(内)张量 G-代数指的是 G-代数$(A_1\otimes A_2,\phi)$此时

$$\phi(g):=\phi_1(g)\otimes\phi_2(g),\ g\in G.$$

特别地，两个内 G-代数 A_1，A_2 的(内)张量 G-代数仍是一个内 G-代数，它的结构同态如下

$$\rho_{A_1\otimes A_2}(g)=\rho_{A_1}(g)\otimes\rho_{A_2}(g),\ g\in G.$$

设 A 是一个 G-代数，同时，$Res_N^G(A)$是一个局部 N-代数，我们称(内)张量 G-代数$A\otimes\inf(C)$是G/N-代数 C 的广义膨胀 G-代数。我们知道当 A 是平凡 G-代数 k 时，C 的广义膨胀 G-代数$A\otimes\inf(C)$就是通常的膨胀 G-代数，而且，如果 A 是内 G-代数以及 C 是内G/N-代数，则$A\otimes\inf(C)$也是一个内 G-代数。

我们回忆局部内 G-代数 A 从属于群 G 的某个块(代数)$B(=kGe_B)$是指$\rho_A(e_B)=1_A$ [2]。以及群 G 的块(代数)$B(=kGe_B)$覆盖群 N 的块(代数)$b(=kNe_b)$当且仅当$e_Be_b\neq 0$ [8]。

$N\trianglelefteq G$，下面的自然的 k-代数同态，即是群 G 相对于群 N 的增广同态[9]

$$\mu_{G/N}:kG\to k(G/N),\ \sum_{g\in G}t_g g\mapsto\sum_{g\in G}t_g\overline{g},\ t_g\in k.$$

对于 G 的块e_B，我们知道$\mu_{G/N}(e_B)$是$k(G/N)$的一个中心幂等元，在该中心幂等元是非零幂等元的情况下，我们称块(代数)$B(=kGe_B)$控制G/N的块(代数)$\overline{b}(=k(G/N)e_{\overline{b}})$，如果$e_{\overline{b}}$出现在$\mu_{G/N}(e_B)$在$Z(k(G/N))$中的唯一分解中。

下面我们给出本文的主要结论。

定理 2.1 设 A 是一个 G-代数，并且$Res_N^G(A)$是一个局部 N-代数，那么G/N-代数 C 的广义膨胀 G-代数$A\otimes_k\inf(C)$是一个局部 G-代数当且仅当 C 是一个局部G/N-代数。

显而易见，定理 2.1 推广了下面的两个事实：

1) G/N-代数 C 是局部G/N-代数当且仅当 C 的膨胀 G-代数$\inf(C)$是局部 G-代数；

2) $A\otimes_k C$ 是一个局部代数当且仅当 A 和 C 都是局部代数。

性质 2.2 设 A 是一个内 G-代数并且$Res_N^G(A)$是一个属于 N 的块 b 的局部内 N-代数，又设 C 是一个局部内G/N-代数。如果广义膨胀内 G-代数$A\otimes_k\inf(C)$属于 G 的块 B，那么 B 覆盖 b。

推论 2.3 设 C 是一个属于G/N的块$\overline{b}$的局部内G/N-代数，并且膨胀内 G-代数$\inf(C)$属于 G 的块 B。那么 B 覆盖 N 的主块并且控制$\overline{b}$，特别地，G 的主块覆盖 N 的主块并且控制G/N的主块。

定理 2.4 设 A 是属于 G 的块 B 的内 G-代数，并且$Res_N^G(A)$是一个局部内 N-代数。那么存在平凡内 N-代数 k 的诱导内 G-代数$Ind_N^G k$作为G/N-代数的某个嵌入局部内G/N-代数 C 的广义膨胀内 G-代数$A\otimes_k\inf(C)$属于 B。

定理 2.4 推广了事实：G 的主块总是控制G/N的某个块，以及总存在平凡 kN-模 k 的诱导 kG-模的某个不可

分解直因子属于 G 的主块(换句话说，G 的主块总是覆盖 N 的主块)。

下面的定理 2.5 推广了事实：如果 D 是膨胀局部 G-代数 $\inf(C)$ 的一个亏群，那么 DN/N 是局部 G/N-代数 C 的一个亏群。由此定理 2.5 给出了[4, Theorem 2.6.2]的一个广义的反方向的结论。

定理 2.5 设 A 是一个 G-代数，并且 $Res_N^G(A)$ 是一个局部 N-代数，又设 C 是一个局部 G/N-代数。如果 D 是广义膨胀 G-代数 $A\otimes_k \inf(C)$ 的一个亏群，那么 DN/N 是 C 的一个亏群。

推论 2.6 设 A 是一个 G-代数，D 是 A 的一个亏群，并且 $Res_N^G(A)$ 是一个局部 N-代数。那么 DN/N 是 G/N 的一个 Sylow p-子群。

推论 2.6 告诉我们，$Syl(G)N/N$ 是 G/N 的 Sylow p-子群。

3. 结论的证明

引理 3.1 设 A 是一个 G-代数，并且 $Res_N^G(A)$ 是一个局部 N-代数，那么局部 G/N-代数 C 的广义膨胀 G-代数是一个局部 G-代数。

证明：因为 $\left(Res_N^G(A)\right)^N$ 是一个局部代数，那么作为 k 上的向量空间，我们有下面的分解

$$A^N = k\cdot 1_A \oplus J\left(A^N\right),$$

又因为 $N \trianglelefteq G$，因此上面的分解也是 A^N 作为 kG-模的分解。

而且，因为 N 平凡地作用在 $\inf(C)$ 上我们得到

$$\begin{aligned}\left(A\otimes_k \inf(C)\right)^N &= A^N \otimes_k \left(\inf(C)\right)^N && (\text{由}[10,\ \text{Lemma 2.1}])\\ &= A^N \otimes_k \inf(C)\\ &= k\cdot 1_A \otimes_k \inf(C) \oplus J\left(A^N\right)\otimes_k \inf(C) && (\text{作为}kG\text{-模}),\end{aligned}$$

并且 $J\left(A^N\right)\otimes_k \inf(C)$ 是 $\left(A\otimes_k \inf(C)\right)^N$ 的一个幂零理想。

另一方面，由于 $1_A \neq 0$，容易得知

$$f: k\cdot 1_A \otimes_k \inf(C) \to \inf(C)$$

按下面的方式是一个 G-代数同构

$$f\left(t\cdot 1_A \otimes_k c\right) = t\cdot c,$$

对任意 $t\in k$ 和 $c\in C$，那么

$$\left(k\cdot 1_A \otimes_k \inf(C)\right)^G = \left(k\cdot 1_A \otimes_k \inf(C)\right)\cap\left(A\otimes_k \inf(C)\right)^G$$

是一个局部函数，

另一方面，因为

$$\left(J\left(A^N\right)\otimes_k \inf(C)\right)^G = \left(J\left(A^N\right)\otimes_k \inf(C)\right)\cap\left(A\otimes_k \inf(C)\right)^G$$

是 $\left(A\otimes_k \inf(C)\right)^G$ 的一个幂零理想并且 $\left(k\cdot 1_A \otimes_k \inf(C)\right)^G$ 是一个局部代数，那么

$$\left(A\otimes_k \inf(C)\right)^G = \left(k\cdot 1_A \otimes_k \inf(C)\right)^G \oplus \left(J\left(A^N\right)\otimes_k \inf(C)\right)^G$$

只有一个非零幂等元，也即，$A\otimes_k \inf(C)$ 是一个局部 G-代数。

引理 3.2 设 A 是一个 G-代数，$Res_N^G(A)$ 是一个局部 N-代数，C 是一个 G/N-代数，那么在 G-代数同构的意义下，广义膨胀 G-代数 $A\otimes_k \inf(C)$ 的任何嵌入局部 G-代数可以表达为形式 $A\otimes_k \inf(C')$，这里 C' 是 C 的某个嵌入局部 G/N-代数。

证明： 设 $1_{\inf(C)}=1_C=\sum_{k=1}^{n} i_k$，是 1_C 在 $C^{G/N}$ 中的一个本原正交幂等元分解。那么由[7, Corollary 4.6]我们知道，在 G/N-代数同构的意义下，$\{i_l C i_l \mid l=1,2,\cdots,n\}$ 包含 C 的全部的嵌入局部 G/N-代数，再由引理 3.1，

$$A\otimes_k \inf(i_l C i_l)=(1\otimes_k i_l)(A\otimes_k \inf(C))(1\otimes_k i_l)$$

是一个局部 G-代数，也即，

$$(A\otimes_k \inf(i_l C i_l))^G=(1\otimes_k i_l)(A\otimes_k \inf(C))^G(1\otimes_k i_l)$$

是一个局部代数，由此 $1\otimes_k i_l$ 是 $(A\otimes_k \inf(C))^G$ 的本原幂等元，$i=1,2,\cdots,n$。

综上得知

$$1_A\otimes_k 1_{\inf(C)}=\sum_{l=1}^{n}1\otimes_k i_l$$

是 $1_{A\otimes_k \inf(C)}$ 在 $(A\otimes_k \inf(C))^G$ 中的一个本原正交幂等元分解，也即在 G-代数同构的意义下，$A\otimes_k \inf(C)$ 的任何嵌入局部 G-代数能被表达为形式 $A\otimes_k \inf(i_l C i_l)$，对于某个 l。

定理 2.1 的证明： 由引理 3.1 和引理 3.2 便知定理 2.1 成立。

性质 2.2 的证明： 因为 $A\otimes_k \inf(C)$ 属于 B 以及 $Res_N^G(A)$ 属于 b，我们知道

$$\rho_{A\otimes\inf(C)}(e_b)=(e_b\cdot 1_A)\otimes 1_{\inf(C)}=\left(e_b\cdot 1_{Res_H^G A}\right)\otimes 1_{\inf(C)}=1_{A\otimes\inf(C)}=\rho_{A\otimes\inf(C)}(e_b),$$

由此 $e_B e_b\neq 0$，也即，B 覆盖 b。

推论 2.3 的证明： 在性质 2.2 的情形下设 $A=k$。

参见[7, Proposition 16.5]，我们有下面的内 G-代数上的 *Frobenius* 公式：

引理 3.3 设 A 是一个内 G-代数，B 是一个内 H-代数，$H\le G$。那么下面的 ϕ 是一个内 G-代数同构

$$\phi: Ind_H^G\left(Res_H^G(A)\otimes_{\mathcal{O}} B\right)\to A\otimes_{\mathcal{O}} Ind_H^G B,$$

$$(x\otimes(a\otimes b)\otimes y)\mapsto(x\otimes a\otimes y)\otimes(x\otimes b\otimes y),\ x,y\in G/H,a\in A,b\in B.$$

定理 2.4 的证明： 设 $G=\bigcup_{g_i\in T} g_i N$，这里 T 是 N 在 G 中的左陪集代表系，并且 $g_1=1$；我们有 $e_B=\sum_{g_i\in T} g_i\alpha_i$，$\alpha_i\in kN$，是 e_B 的唯一分解。

注意到

$$Ind_N^G\left(Res_N^G A\right)=kG\otimes_{kN} Res_N^G A\otimes_{kN} kG,$$

是一个内 G-代数，它的单位元是

$$1_{Ind_N^G\left(Res_N^G A\right)}=\sum_{g_i\in T} g_i\otimes_{kN} 1_A\otimes_{kN} g_i^{-1},$$

以及它的结构同态是

$$\rho_{Ind_N^G\left(Res_N^G A\right)}:\ kG\to Ind_N^G\left(Res_N^G A\right),\ g\mapsto\sum_{g_i\in T} gg_i\otimes_{kN} 1_A\otimes_{kN} g_i^{-1}.$$

我们有

$$\rho_{Ind_N^G\left(Res_N^G A\right)}(e_B)=e_B\cdot\sum_{g_i\in T} g_i\otimes_{kN} 1_A\otimes_{kN} g_i^{-1}=\sum_{g_i\in T}(e_B g_i)\otimes_{kN} 1_A\otimes_{kN} g_i^{-1}.$$

以及

$$\begin{aligned}e_B\otimes_{kN} 1_A\otimes_{kN} 1&=\sum_{g_i\in T} g_i\otimes_{kN}\alpha_i\cdot 1_A\otimes_{kN} 1=\sum_{g_i\in T} g_i\otimes_{kN}\alpha_i\rho_{Res_N^G A}(e_b)\otimes_{kN} 1\\&=\sum_{g_i\in T} g_i\otimes_{kN}\rho_{Res_N^G A}(\alpha_i e_b)\otimes_{kN} 1,\end{aligned}$$

这里我们设 $Res_N^G A$ 属于 N 的块 $b\left(=kNe_b\right)$。

如果 $\rho_{Ind_N^G\left(Res_N^G A\right)}\left(e_B\right)=0$，那么由引理 2.2，我们知道，对每个 $g_i\in T$，

$$\left(e_B g_i\right)\otimes_{kN}1_A\otimes_{kN}g_i^{-1}=0,$$

特别地，$e_B\otimes_{kN}1_A\otimes_{kN}1=0$，由此又由引理 2.2，对任意的 $g_i\in T$，$\rho_{Res_H^G A}\left(\alpha_i e_b\right)=0$。

那么

$$0=\sum_{g_i\in T}g_i\cdot\rho_{Res_N^G A}\left(\alpha_i e_b\right)=\sum_{g_i\in T}g_i\cdot\rho_A\left(\alpha_i e_b\right)=\sum_{g_i\in T}\rho_A\left(g_i\alpha_i e_b\right)$$

$$=\rho_A\left(\sum_{g_i\in T}g_i\alpha_i e_b\right)=\rho_A\left(e_B e_b\right)=\rho_A\left(e_B\right)\rho_{Res_N^G A}\left(e_b\right)=\rho_A\left(e_B\right)=1_A,$$

矛盾。也即，我们得到 $\rho_{Ind_N^G\left(Res_N^G A\right)}\left(e_B\right)$ 是 $\left(Ind_N^G\left(Res_N^G A\right)\right)^G$ 的一个非零幂等元，因此，存在 $\left(Ind_N^G\left(Res_N^G A\right)\right)^G$ 的某个嵌入局部内 G-代数 A'，属于 B。

另一方面，由引理 3.3，作为内 G-代数

$$Ind_N^G\left(Res_N^G A\right)=Ind_N^G\left(Res_N^G A\otimes_k k\right)\cong A\otimes_k Ind_N^G k,$$

这里 k 被看作平凡内 N-代数，并且因为 $N\trianglelefteq G$ 以及 k 是平凡的，内 G-代数 $Ind_N^G k$ 可以被自然地看作内 G/N-代数 $Ind_N^G k$ 的膨胀内 G-代数，因此由引理 3.2，存在 $Ind_N^G k$ 的嵌入局部内 G/N-代数 C 使得作为内 G-代数

$$A'\cong A\otimes_k \inf\left(C\right),$$

也即，广义膨胀局部内 G-代数 $A\otimes_k \inf\left(C\right)$ 属于 B。

参见[7, Lemma 14.3]，我们有下面的关于 G-代数的投射性的结论：

引理 3.4 设 A 是一个 G-代数并且它是相对子群 H 投射的，那么对于任意的 G-代数 B，$A\otimes_{\mathcal{O}}B$ 是 H-投射的，特别地，如果 A 是一个投射 G-代数，那么 $A\otimes_{\mathcal{O}}B$ 也是投射 G-代数。

定理 2.5 的证明：首先，由引理 3.1 我们知道 $A\otimes_k \inf\left(C\right)$ 是一个局部 G-代数，又因为 D 是它的一个亏群，我们设 $1_{A\otimes_k \inf(C)}=Tr_D^G\left(d\right)$，这里 $d\in\left(A\otimes_k \inf\left(C\right)\right)^D$，因此

$$Tr_D^{DN}\left(d\right)\in\left(A\otimes_k \inf\left(C\right)\right)^{DN}\subseteq\left(A\otimes_k \inf\left(C\right)\right)^N.$$

其次我们有，

$$\left(A\otimes_k \inf\left(C\right)\right)^N=A^N\otimes_k \inf\left(C\right)=k\cdot 1_A\otimes_k \inf\left(C\right)\oplus J\left(A^N\right)\otimes_k \inf\left(C\right),$$

那么存在某个 $i\in\inf\left(C\right)$ 和 $j\in J\left(A^N\right)\otimes_k \inf\left(C\right)$，使得

$$Tr_D^{DN}\left(d\right)=1_A\otimes_k i+j,$$

而且，因为 $N\trianglelefteq G$ 以及下面的 G-代数同构

$$k\cdot 1_A\otimes_k \inf\left(C\right)\cong\inf\left(C\right),$$

我们知道 $i\in\inf\left(C\right)^{DN}$ 和 $j\in\left(A\otimes_k \inf\left(C\right)\right)^{DN}$。我们得到，

$$1_{A\otimes_k \inf(C)}=Tr_D^G\left(d\right)=1_A\otimes_k Tr_{DN}^G\left(i\right)+Tr_{DN}^G\left(j\right).$$

因为 j 是一个幂零元，所以 $Tr_{DN}^G\left(j\right)\in J\left(\left(A\otimes_k inf\left(C\right)\right)^G\right)$，由此

$$1_A\otimes_k Tr_{DN}^G\left(i\right)\notin J\left(\left(A\otimes_k \inf\left(C\right)\right)^G\right),$$

又因为 $\left(A\otimes_k \inf\left(C\right)\right)^G$ 是一个局部代数，那么 $1_A\otimes_k Tr_{DN}^G\left(i\right)$ 是 $\left(A\otimes_k \inf\left(C\right)\right)^G$ 中的一个单位。

再由下面的 G-代数同构

$$k\cdot 1_A\otimes_k \inf(C)\cong \inf(C),$$

我们知道$Tr_{DN}^{G}(i)$是$(\inf(C))^G$的一个单位，也即，

$$Tr_{DN/N}^{G/N}(i)=Tr_{DN}^{G}(i)$$

是$C^{G/N}$的一个单位，由此局部G/N-代数 C 是 DN/N-投射的，那么 $DN/N\geq H/N$，这里 H 是 G 的某个子群使得 H/N 是 C 作为G/N-代数的一个亏群并且 $DN\geq H\geq N$。

我们得到$\inf(C)$是 H-投射的，并且由引理 3.4，$A\otimes_k \inf(C)$也是 H-投射的。那么 H 包含 $A\otimes_k \inf(C)$的某个亏群，也就是 D 的某个共轭，由此 $H=DN$ 以及 $H/N=DN/N$。

推论 2.6 的证明：在定理 2.5 的情形下，设$C=k$，平凡G/N-代数。我们有 DN/N 是 k 的作为平凡G/N-代数的亏群，由此 DN/N 是G/N的 Sylow p-子群。

参考文献 (References)

[1] B. Huppert, N. Blacburn. Finite groups II. Berlin: Springer, 1982.
[2] T. Ikeda. Some properties of interior G-algebras. Hokkaido Mathematical Journal, 1986, 15: 453-467.
[3] G. Karpilovsky. Group representations, Vol. 3, North-Holland Mathematics Studies 180. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1994.
[4] G. Karpilovsky. Group representations, Vol. 5, North-Holland Mathematics Studies 183. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1996.
[5] G. Karpilovsky. Induced modules over group algebras, North-Holland Mathematics Studies 161. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1990.
[6] G. Karpilovsky. Symmetric and G-algebras: With applications to group representations. Berlin: Kluwer Academic Publishers, 1990.
[7] J. Thevenaz. G-algebras and modular representation theory. Oxford: Oxford Clarendon Press, 1995.
[8] M. Collins. Blocks, normal subgroups, and Brauer's third main theory. Journal of Algebra, 1999, 213: 69-76.
[9] B. Kulshammer. Lectures on block theory, LMSLNS 161. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
[10] A. M. Aglhamdi, A. A. Khammash. Defect groups of tensor modules. Journal of Pure and Applied Algebra, 2002, 167(2-3): 165-173.