Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 95-100
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.31015 Published Online January 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Jordan Derivable Maps on Triangular Rings

Huiyuan Zhang, Chunhui Xue, Runling An

Department of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Tai Yuan
Email: runlingan@yahoo.com.cn

Received: Nov. 22nd, 2012; revised: Dec. 16th, 2012; accepted: Dec. 25th, 2012

Abstract: Let T be a triangular ring. We say $\delta:\mathcal{T}\to\mathcal{T}$ is a Jordan derivable map if $\delta(AB+BA)=\delta(A)B+A\delta(B)+\delta(B)A+B\delta(A)$ for every $A,B\in\mathcal{T}$. In this paper, we show that every Jordan derivable map on triangular rings is a derivation. As its application, we get a Jordan derivable map on irreducible CDCSL algebras or nest algebra is a derivation.

Keywords: Jordan Derivation; CDCSL Algebras; Triangular Rings; Nest Algebras

三角环上的 Jordan 可导映射

张慧愿，薛春慧，安润玲

太原理工大学数学学院，太原
Email: runlingan@yahoo.com.cn

收稿日期：2012 年 11 月 22 日；修回日期：2012 年 12 月 16 日；录用日期：2012 年 12 月 25 日

摘　要：设$\mathcal{T}$是一个三角环。我们称$\delta:\mathcal{T}\to\mathcal{T}$(无可加或连续假设)是一个 Jordan 可导映射，若对任意的$A,B\in\mathcal{T}$有$\delta(AB+BA)=\delta(A)B+A\delta(B)+\delta(B)A+B\delta(A)$。本文我们证明了三角环上的 Jordan 可导映射是导子。利用此结论我们得到不可约 CDCSL 代数上或套代数上的每个 Jordan 可导映射是导子。

关键词：Jordan 导子；CDCSL 代数；三角环；套代数

1. 引言

研究环或代数上的可乘映射何时可加是一个有趣的问题。开创性的工作由 Martindale 在文献[1]中所做。在此文献中他证明了从一个包含非平凡幂等元的素环$\mathcal{R}$到一个任意环$\mathcal{R}'$的可乘双射Φ (即$\Phi(AB)=\Phi(A)\Phi(B)$，$\forall A,B\in\mathcal{R}$)是可加的。随后，Martindale 的结果被推广到了 Jordan 可乘映射的情形。文献[2]中作者证明了如果$\mathcal{A}$是维数至少是 2 的巴拿赫空间上的一个标准算子代数，那么$\mathcal{A}$上的每个 Jordan 可乘映射Φ (即$\Phi\left(\frac{1}{2}(AB+BA)\right)=\frac{1}{2}(\Phi(A)\Phi(B)+\Phi(B)\Phi(A))$，$\forall A,B\in\mathcal{A}$)是可加的。文献[3]中我们证明了维数至少是 2 的希尔伯特空间H上的自伴算子空间或套代数上的每个 Jordan 可乘映射是可加的。

在这篇文章中我们考虑导子的情形。令$\mathcal{R}$是一个环，δ是$\mathcal{R}$到其自身的一个映射，我们称δ(无可加或连续假设)是一个可导映射，若对所有$A,B\in\mathcal{R}$有$\delta(AB)=\delta(A)B+A\delta(B)$；如果对所有$A,B\in\mathcal{R}$有$\delta(AB+BA)=\delta(A)B+A\delta(B)+\delta(B)A+B\delta(A)$则称$\delta$是一个 Jordan 可导映射。一个可加的可导映射称为一个导子，一个可加的 Jordan 可导映射称为 Jordan 导子。文献[4]作者证明了包含一个非平凡幂等元且特征不是 2 的素环上的每个可导映射是一个导子。后来，侯在文献[5]中证明了三角代数上的每个可导映射是一个导子。陆在

文献[6]中证明了包含一个非平凡幂等元且特征不是 2 的素环上的 Jordan 可导映射是可加的，进而它是一个导子。本文中我们将刻画三角环上的 Jordan 可导映射，证明三角环上的 Jordan 可导映射是导子。利用此结论我们证明了不可约 CDCSL 代数上或套代数上的每个 Jordan 可导映射是导子。注意到三角环既不是素环也不是半素环。

我们固定一些记号。称 $\mathcal{L}$ 是 H 上的一个子空间格，若 $\mathcal{L}$ 是 H 上包含 0 和 I 的投影族，且对运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 封闭。一个全序子空间格被称为一个套。希尔伯特空间 H 上的一个子空间格 $\mathcal{L}$ 称为交换子空间格或者 CSL，若 $\mathcal{L}$ 中的投影彼此可交换。如果 $P=\vee\left\{Q\in\mathcal{L}:Q_{\_}\not\geq P\right\}$ 对每个 $P\in\mathcal{L}$ 且 $P\neq 0$ 成立，或等价地 $P=\wedge\left\{Q_{\_}:Q\in\mathcal{L},Q\not\leq P\right\}$ 对每个 $P\in\mathcal{L}$ 且 $P\neq I$ 成立，则称子空间格 $\mathcal{L}$ 是完全分配的。给定 H 上的子空间格 $\mathcal{L}$，相应地子空间格代数

$$A\lg\mathcal{L}=\left\{T\in\mathcal{B}(H),TP=PTP,\forall P\in\mathcal{L}\right\}$$

显然，$A\lg\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 中含单位元的弱闭子代数。称 $A\lg\mathcal{L}$ 是一个 CSL 代数若 $\mathcal{L}$ 是一个交换子空间格。如果 $\mathcal{L}$ 是完全分配的 CSL 代数，则称 $A\lg\mathcal{L}$ 是一个 CDCSL 代数。CSL 代数 $A\lg\mathcal{L}$ 是不可约的当且仅当它的换位是平凡的，即 $\left(A\lg\mathcal{L}\right)'=\mathbb{C}I$。

2. 主要结果和证明

在这一部分，我们将刻画一些自反代数上的 Jordan 可导映射。首先，我们来研究三角环上 Jordan 可导映射的可加性。

定义 2.1 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是有单位元的两个环且其单位元分别为 I_1 和 I_2，$\mathcal{M}$ 是忠实的 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ -双模，即 $\mathcal{M}$ 是 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ -双模，且对任意的 $A\in\mathcal{A}$，$A\mathcal{M}=\{0\}\Rightarrow A=0$，对任意的 $B\in\mathcal{B}$，$\mathcal{M}B=\{0\}\Rightarrow B=0$。代数

$$\mathcal{T}=Tri(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{M})=\left\{\begin{pmatrix}A & M\\ 0 & B\end{pmatrix}:A\in\mathcal{A},M\in\mathcal{M},B\in\mathcal{B}\right\}$$

在通常的矩阵加法和矩阵乘法下称为一个三角环。

显然三角环 $\mathcal{T}$ 是有单位元的，其单位元是 $I=\begin{pmatrix}I_1 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}$。$\mathcal{T}$ 包含一非平凡幂等元 $P=\begin{pmatrix}I_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，我们称之为标准幂等元。我们把 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{M}$ 看作 $\mathcal{T}=Tri(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{M})$ 的子集。

下面是本文的主要结果。

定理 2.2 设 $\mathcal{T}=Tri(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{M})$ 是特征不是 2 的三角环。则映射 $\delta:\mathcal{T}\to\mathcal{T}$ 是一个 Jordan 可导映射(即对任意的 $A,B\in\mathcal{T}$，$\delta(AB+BA)=\delta(A)B+A\delta(B)+\delta(B)A+B\delta(A)$)当且仅当 δ 是一个导子。

证明 充分性是显然的。下来我们证明必要性。为了方便和阐述清楚，我们把证明过程分为若干个步骤。在接下来的证明中，设 P 是 $\mathcal{T}$ 中的标准幂等元。令 $P=P_1$ 和 $P_2=I-P_1$。

断言 1 $\delta(0)=0$。

由 $\delta(0)=\delta(00+00)=\delta(0)0+0\delta(0)+\delta(0)0+0\delta(0)$ 知 $\delta(0)=0$。

断言 2 $\delta(P)=[P,S]$，$S\in\mathcal{T}$。

对任何 $M\in\mathcal{M}$，我们有

$$\delta(M)=\delta(PM+MP)=\delta(P)M+P\delta(M)+\delta(M)P+M\delta(P).$$

等式左边和右边分别乘以 P 和 $I-P$ 得

$$P\delta(P)M+M\delta(P)(I-P)=0. \tag{2.1}$$

对任何 $B\in\mathcal{B}$，通过第一步我们有

$$0=\delta(PB+BP)=\delta(P)B+P\delta(B)+\delta(B)P+B\delta(P). \tag{2.2}$$

给这个等式两边同乘以 $I-P$，我们有 $(I-P)\delta(P)B+B\delta(P)(I-P)=0$。由于 $\mathcal{T}$ 的特征不是 2 的，因此 $(I-P)\delta(P)(I-P)=0$。由(2.1)我们有 $P\delta(P)M=0$。又因为 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的忠实左模，所以 $P\delta(P)P=0$。因此，$\delta(P)=P\delta(P)(I-P)=\left[P,P\delta(P)(I-P)\right]$。令 $S=P\delta(P)(I-P)$，则 $\delta(P)=\left[P,S\right]$。

对所有的 $A\in\mathcal{T}$，定义映射 $\Delta:\mathcal{T}\to\mathcal{T},\Delta(A)=\delta(A)-(AS-SA)$。那么 $\Delta(P)=0$ 且

$$\Delta(AB+BA)=\Delta(A)B+A\Delta(B)+\Delta(B)A+B\Delta(A)$$

对所有的 $A,B\in\mathcal{T}$ 成立，即 Δ 仍是一个 Jordan 可导映射。因此，不失一般性，在下面的证明过程中我们假设 $\delta(P)=0$。

断言 3 对所有的 $M\in\mathcal{M}$，$\delta(M)=P\delta(M)(I-P)$。

对任意的 $M\in\mathcal{M}$，由于 $\delta(M)=\delta(PM+MP)=\delta(M)P+P\delta(M)$。因此 $P\delta(M)P=(I-P)\delta(M)(I-P)=0$，$\delta(M)=P\delta(M)(I-P)$。

断言 4 $\delta(I-P)=0$。

由等式 $0=\delta\big(P(I-P)+(I-P)P\big)=P\delta(I-P)+\delta(I-P)P$ 知

$$P\delta(I-P)P=P\delta(I-P)(I-P)=0 \tag{2.3}$$

另一方面，对任何的 $M\in\mathcal{M}$，由(2.3)我们有

$$\begin{aligned}\delta(M)&=\delta\big(M(I-P)+(I-P)M\big)\\&=\delta(M)(I-P)+M\delta(I-P)+\delta(I-P)M+(I-P)\delta(M)\\&=\delta(M)(I-P)+M\delta(I-P)\end{aligned}$$

因此，由断言 3 我们有 $M\delta(I-P)(I-P)=0$。由于 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{B}$ 的忠实右模，因此 $(I-P)\delta(I-P)(I-P)=0$。所以，由(2.3)我们有 $(I-P)\delta(I-P)(I-P)=0$，$\delta(I-P)=0$。

断言 5 对任何 $A\in\mathcal{A}$，$B\in\mathcal{B}$，$\delta(A)=P\delta(A)P$，$\delta(B)=(I-P)\delta(B)(I-P)$。

对任何 $A\in\mathcal{A}$，由断言 1 和断言 4 可以得到 $0=\delta\big(A(I-P)+(I-P)A\big)=\delta(A)(I-P)+(I-P)\delta(A)$，因此，$(I-P)\delta(A)(I-P)=P\delta(A)(I-P)=0$，$\delta(A)=P\delta(A)P$，类似地，对任何 $B\in\mathcal{B}$ 我们有 $\delta(B)=(I-P)\delta(B)(I-P)$。

断言 6 对任何 $A\in\mathcal{A}$，$B\in\mathcal{B}$，$\delta(A+M)=\delta(A)+\delta(M)$，$\delta(B+M)=\delta(B)+\delta(M)$。

固定 $A\in\mathcal{A}$，$M\in\mathcal{M}$ 对任意的 $B\in\mathcal{B}$，由断言 5 我们有

$$\begin{aligned}\delta\big((A+M)B+B(A+M)\big)&=\delta(A+M)B+B\delta(A+M)+(A+M)\delta(B)+\delta(B)(A+M)\\&=\delta(A+M)B+B\delta(A+M)+M\delta(B).\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\delta\big((A+M)B+B(A+M)\big)&=\delta(MB+BM)=\delta(M)B+M\delta(B)+\delta(B)M+B\delta(M)\\&=\big(\delta(A)+\delta(M)\big)B+M\delta(B)+B\big(\delta(A)+\delta(M)\big).\end{aligned}$$

因此，对任何 $B\in\mathcal{B}$

$$\big(\delta(A+M)-\delta(A)-\delta(M)\big)B+B\big(\delta(A+M)-\delta(A)-\delta(M)\big)=0.$$

由此知 $P_2\big(\delta(A+M)-\delta(A)-\delta(M)\big)P_2=0$，$P_1\big(\delta(A)+\delta(M)-\delta(A)-\delta(M)\big)P_2=0$ 对任何 $Y\in\mathcal{M}$，

$$\begin{aligned}\delta\big((A+M)Y+Y(A+M)\big)&=\delta(A+M)Y+Y\delta(A+M)+(A+M)\delta(Y)+\delta(Y)(A+M)\\&=\delta(A+M)Y+Y\delta(A+M)+A\delta(Y).\end{aligned}$$

另一方面，由断言 3 我们有

$$\begin{aligned}\delta\left((A+M)Y+Y(A+M)\right)&=\delta(AY+YA)=\delta(A)Y+A\delta(Y)+Y\delta(A)\\&=\left(\delta(A)+\delta(M)\right)Y+A\delta(Y)+Y\left(\delta(A)+\delta(M)\right)\end{aligned}$$

由这两个等式知对任意的 $Y\in\mathcal{M}$

$$\left(\delta(A+M)-\delta(A)-\delta(M)\right)Y+Y\left(\delta(A+M)-\delta(A)-\delta(M)\right)=0$$

因此，$P_1\left(\delta(A+M)-\delta(A)-\delta(M)\right)P_1=0$，$\delta(A+M)=\delta(A)+\delta(M)$ 类似地，$\delta(B+M)=\delta(B)+\delta(M)$ 对任何 $B\in\mathcal{B}$，$M\in\mathcal{M}$ 成立。

断言 7 对任何 $M_1,M_2\in\mathcal{M},\delta(M_1+M_2)=\delta(M_1)+\delta(M_2)$。

由断言 4 和断言 6，我们有

$$\begin{aligned}\delta(M_1+M_2)&=\delta\left((P_1+M_1)(P_2+M_2)+(P_2+M_2)(P_1+M_1)\right)\\&=\delta(P_1+M_1)(P_2+M_2)+(P_1+M_1)\delta(P_2+M_2)\\&\quad+\delta(P_2+M_2)(P_1+M_1)+(P_2+M_2)\delta(P_1+M_1)\\&=\left(\delta(P_1)+\delta(M_1)\right)(P_2+M_2)+(P_1+M_1)\left(\delta(P_2)+\delta(M_2)\right)\\&\quad+\left(\delta(P_2)+\delta(M_2)\right)(P_1+M_1)+(P_2+M_2)\left(\delta(P_1)+\delta(M_1)\right)\\&=\delta(M_1)+\delta(M_2)\end{aligned}$$

因此，对所有 $M_1,M_2\in\mathcal{M},\delta(M_1+M_2)=\delta(M_1)+\delta(M_2)$。

断言 8 对任意的 $A_1,A_2\in\mathcal{A}$，$B_1,B_2\in\mathcal{B}$，$\delta(A_1+A_2)=\delta(A_1)+\delta(A_2)$，$\delta(B_1+B_2)=\delta(B_1)+\delta(B_2)$。

我们仅仅证明第一个等式，第二个等式类似。对任何 $M\in\mathcal{M}$，我们有

$$\begin{aligned}\delta\left((A_1+A_2)M\right)&=\delta\left((A_1+A_2)M+M(A_1+A_2)\right)\\&=\delta(A_1+A_2)M+(A_1+A_2)\delta(M)+\delta(M)(A_1+A_2)+M\delta(A_1+A_2)\\&=\delta(A_1+A_2)M+(A_1+A_2)\delta(M).\end{aligned}$$

另一方面，通过断言 7 我们有

$$\begin{aligned}\delta\left((A_1+A_2)M\right)&=\delta(A_1M+MA_1)+\delta(A_2M+MA_2)=\delta(A_1)M+A_1\delta(M)+M\delta(A_1)+\delta(M)A_1\\&\quad+\delta(A_2)M+A_2\delta(M)+M\delta(A_2)+\delta(M)A_2=\left(\delta(A_1)+\delta(A_2)\right)M+(A_1+A_2)\delta(M).\end{aligned}$$

因此 $\left[\delta(A_1+A_2)-\left(\delta(A_1)+\delta(A_2)\right)\right]M=0$ 对任何 $M\in\mathcal{M}$ 成立，由断言 5 以及 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的忠实左模，我们有 $\delta(A_1+A_2)=\delta(A_1)+\delta(A_2)$。

断言 9 对所有 $A\in\mathcal{A}$，$M\in\mathcal{M}$，$B\in\mathcal{B}$，$\delta(A+M+B)=\delta(A)+\delta(M)+\delta(B)$。

对任何 $W\in\mathcal{B}$，由断言 5 我们有

$$\begin{aligned}&\delta\left((A+M+B)W+W(A+M+B)\right)\\&=\delta(A+M+B)W+(A+M+B)\delta(W)+\delta(W)(A+M+B)+W\delta(A+M+B)\\&=\delta(A+M+B)W+B\delta(W)+M\delta(W)+\delta(W)B+W\delta(A+M+B).\end{aligned}$$

另一方面，由断言 5 和断言 6 可以得到

$$\begin{aligned}&\delta\left((A+M+B)W+W(A+M+B)\right)\\&=\delta(MW+BW+WB)=\delta(MW)+\delta(BW+WB)=\delta(MW+WM)+\delta(BW+WB)\\&=\delta(M)W+M\delta(W)+\delta(B)W+B\delta(W)+\delta(W)B+W\delta(B)\\&=\left(\delta(A)+\delta(M)+\delta(B)\right)W+W\left(\delta(A)+\delta(M)+\delta(B)\right)+B\delta(W)+\delta(W)B+M\delta(W).\end{aligned}$$

因此，对任何 $W \in \mathcal{B}$

$$\big(\delta(A+M+B)-\delta(A)-\delta(M)-\delta(B)\big)W+W\big(\delta(A+M+B)-\delta(A)-\delta(M)-\delta(B)\big)=0.$$

由此知 $P_2\big(\delta(A+M+B)-\delta(A)-\delta(M)-\delta(B)\big)P_2=0, P_1\big(\delta(A+M+B)-\delta(A)-\delta(M)-\delta(B)\big)P_2=0$。类似地，对任何 $Y \in \mathcal{M}, \big(\delta(A+M+B)-\delta(A)-\delta(M)-\delta(B)\big)Y+Y\big(\delta(A+M+B)-\delta(A)-\delta(M)\big)=0$，所以，

$$P_1\big(\delta(A+M+B)-\delta(A)-\delta(M)-\delta(B)\big)P_1=0.$$

从而有 $\delta(A+M+B)=\delta(A)+\delta(M)+\delta(B)$ 对所有的 $A\in\mathcal{A}$，$M\in\mathcal{M}$，$B\in\mathcal{B}$ 成立。

因此，由断言 7 到断言 9 知 δ 是一个可加映射，即 δ 是 Jordan 导子。因此，δ 是一个导子。

由定理 2.2 我们可以刻画一些自反代数 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 上的 Jordan 可导映射。我们称 $\mathcal{L}$ 中的投影 P 是可比较的，若对任何 $Q\in\mathcal{L}$，要么 $P\geq Q$ 要么 $P\leq Q$。

引理 2.3 如果 $\mathcal{L}$ 是一个包含非平凡可比较投影 P 的子空间格。那么

(1) $P\in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$，$P\mathcal{B}(H)(I-P)\subset \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$。

(2) P 是忠实的(即对 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 中的元素 T，$TP\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}(I-P)=\{0\}$ 有 $TP=0$，且 $P\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}(I-P)T=\{0\}$ 有 $(I-P)T=0$)。

证明

(1) 因为 P 与 $\mathcal{L}$ 中的元可交换，因此 $P\in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 假设 $Q\in\mathcal{L}$，$A=PA(I-P)$ 是 $P\mathcal{B}(H)(I-P)$ 中的一个任意元。如果 $Q\leq P$，那么 $AQ=QAQ=0$。如果 $Q\geq P$ 那么 $AQ=QAQ$。因此，$PA(I-P)\in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$，$P\mathcal{B}(H)(I-P)\subset \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$。

(2) 由于 $\mathcal{B}(H)$ 是一个素代数，因此(3)是正确的。

由定理 2.2 和引理 2.3 我们有

定理 2.4 令 $\mathcal{L}$ 是一个包含非平凡可比较投影 P 的子空间格，$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 是相应的子空间格代数。那么 $\delta:\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}\to\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 是一个 Jordan 可导映射(即 $\delta(AB+BA)=\delta(A)B+A\delta(B)+\delta(B)A+B\delta(A), \forall A,B\in\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$)当且仅当 δ 是一个导子。

注意到套中的所有投影是可比较的，且由文献[7]知，套代数上每一个可加导子是线性的，从而是连续的。因此由定理 2.4 我们有

定理 2.5 令 $\mathcal{N}$ 是维数至少是 2 的希尔伯特空间 H 上的一个套，$\mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$ 是相应地套代数。那么，$\delta:\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}\to\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 是一个 Jordan 可导映射(即 $\delta(AB+BA)=\delta(A)B+A\delta(B)+\delta(B)A+B\delta(A), \forall A,B\in\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$)当且仅当 δ 是一个导子。此外，存在 $T\in\mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$ 使得 $\delta(A)=TA-AT$ 对所有 $A\in\mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$ 成立。

接下来，我们刻画不可约 CDCSL 代数上的 Jordan 可导映射 δ。为了证明这一结果，我们需要文献[8]中的定理 3.4。

引理 2.6 令 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 是一个不可约 CDCSL 代数。那么 $\mathcal{L}$ 存在一个忠实投影 P。

因此，由引理 2.6 和定理 2.2 我们有

定理 2.7 令 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 是一个不可约的 CDC 代数。那么 $\delta:\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}\to\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 是一个 Jordan 可导映射(即 $\delta(AB+BA)=\delta(A)B+A\delta(B)+\delta(B)A+B\delta(A), \forall A,B\in\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$)当且仅当 δ 是一个导子。

在文献[9]中，Gilfeather 和 Larson 引入了 von Neumann 代数中套子代数的概念，它是对 Ringrose 的套代数概念的推广。令 $\mathcal{R}$ 是复希尔伯特空间 H 上的一个因子 von Neumann 代数。$\mathcal{R}$ 中的套 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{R}$ 中包含 0 和 I 的全序投影族，且 $\mathcal{N}$ 对投影的 $\vee$ 和 $\wedge$ 两种运算封闭。称一个套是非平凡的若它至少包含一个非平凡投影。相应于套 $\mathcal{N}$ 的 $\mathcal{R}$ 的套子代数记为 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$，它是 $\mathcal{R}$ 中所有满足 $PAP=AP$，$\forall P\in\mathcal{N}$ 的元素构成的集合。当 $\mathcal{R}=\mathcal{B}(H)$ 时，$\mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$ 是希尔伯特空间 H 上的套代数。

定理 2.8 令 $\mathcal{N}$ 是因子 von Neumann 代数 $\mathcal{R}$ 上的一个非平凡的套，$\mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$ 是相应的套代数。那么 $\delta:\mathrm{Alg}\,\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$ 是一个 Jordan 可导映射(即，$\delta(AB+BA)=\delta(A)B+A\delta(B)+\delta(B)A+B\delta(A), \forall A,B\in\mathrm{Alg}\,\mathcal{N}$)

当且仅当 δ 是一个导子。

证明 充分性是显然的，下来我们证明必要性。与引理 2.3 的证明过程类似，我们可以得到对任何的非平凡投影 $P \in \mathcal{N}$ 有 $P\mathcal{R}(I-P) \subset A\lg\mathcal{N}$ 且 P 是忠实投影。因此，$A\lg\mathcal{N}$ 是一个三角代数，由定理 2.2 可得 δ 是一个导子。

参考文献 (References)

[1] W. S. Matindale III. When are multiplicative mappings additive? Proceedings of the American Mathematical Society, 1969, 21(3): 695-698.
[2] L. Molnár. On isomorphisms of standard operator algebras. Studies in Mathematics, 2000, 142: 295-302.
[3] R. L. An, J. C. Hou. Additivity of Jordan multiplicative maps on Jordan Operator algebras. Taiwanese Journal of Mathematics, 2006, 10(1): 45-64.
[4] M. N. Daif. When is a multiplicative derivation additive? International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 1991, 14: 615-618.
[5] C. J. Hou, W. M. Zhang and Q. Meng. A note on (α,β) -derivations. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 432: 2600-2607.
[6] F. Y. Lu. Jordan derivable maps of prime rings. Communications in Algebra, 2010, 32: 4430-4440.
[7] D. G. Han. Continuity and linearity of additive derivation of nest algebras on Banach spaces. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 1996, 17: 227-236.
[8] F. Lu. Lie isomorphisms of reflexive algebras. Journal of Functional Analysis, 2006, 240(1): 84-104.
[9] F. Gilfeather, A. R. Larson. Nest-subalgebras of von Neumann algebras. Advances in Mathematics, 1982, 46(2): 171-199.