Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 248-253
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.34038 Published Online July 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Double Parameter Rational Spline Interpolation

Lin Fu[1], Bishun Bian[2]

[1]Anhui University of Science &Technology, Huainan
[2]Everbright Securities Co. LTD., Nanjing
Email: fulin07211208@163.com

Received: May 1st, 2013; revised: May 24th, 2013; accepted: Jun. 2nd, 2013

Abstract: Two parameters of rational functions described good mathematics on a closed curve. This paper presents a method of double parameters of rational spline, and on the feasibility analysis, explored this interpolation function monotonicity, convexity. Actual numerical examples are used to illustrate the effectiveness of the new method. The algorithm is simple and easy to implement.

Keywords: Two Parameter; Conformal; Locality

双参数有理插值样条

符　琳[1], 卞必顺[2]

[1]安徽理工大学，淮南
[2]光大证券股份有限公司，南京
Email: fulin07211208@163.com

收稿日期：2013 年 5 月 1 日；修回日期：2013 年 5 月 24 日；录用日期：2013 年 6 月 2 日

摘　要：双参数有理函数对封闭曲线进行了很好的数学描述。本文提出了双参数有理样条的方法，并对其进行了可行性分析，探究了这种插值函数的保单调性，保凸性，最后用实际的数值例子说明新方法的有效性。算法简易，易于实现。

关键词：双参数；保形；局部性

1. 引言

曲线曲面的构造是 CAGD 的核心问题，目前已经存在不少方法，都广泛存在于工业设计中，包括：汽车，飞机，轮船的外观设计。所谓插值问题就是从给定的离散点的值，去构造一个连续定义的(简单)函数，使得它与被逼近的函数在给定点的值完全一致。插值法是数值逼近的一种最简单的重要方法，利用插值法可以通过函数在有限个点处的取值情况估算出函数在其它点处的值。有理样条由于其极好的保形性，光滑性已经成为一种广泛应用的曲线曲面设计方法。

近些年来，不少学者在有理二次，三次，四次有理样条以及他们的性质和应用上做了研究。如：王仁宏，吴顺唐在文献[1]从实际的课题着手，构造了几种具有线性结构的有理插值样条并讨论了它们的解析；Gregory 和 Delbourgo 在文献[2]构造了 2/2 型有理插值样条，探究了它的保单调问题；Delbourgo 在文献[3]构造了 2/1 型有理插值样条，并探究了它的保凸问题；段奇、Hussain 等在文献[4-6]也是用含参数的分段三次有理函数构造了满足约束条件插值样条；方逵在文献[7]中构造了一种分子为四次，分母为双二次的二元有理插值函数，讨论了其保形性。王强在文献[8]构造了双参数 3/1 型的有理插值样条，探究了其光滑性。

上述的插值方法对于非封闭曲线确实能很好地数学描述，但针对封闭曲线的独特性，一直没有能对其进行

可行的描述。本文在有理二次样条的基础上，采用对称的思想，效仿隐函数的表示方式，引入正参数α和β，在x和y方向上各自插值，也就是参数分别表示出x和y，再通过隐函数的性质用一阶导数求证其存在性，说明“双参数有理样条”是可行的，同时由于参数的存在，可以保证插值样条的局部性，即每个区间的函数表达式只与相邻的若干节点取值有关。这样可以在数据不变的基础上，通过参数的选择经行曲面的局部修改。文章详细地介绍这种插值方法，并在此基础上由链式法得到一阶，二阶导数来探究其保单调性，保凸性。从理论上证实插值样条函数的保形性。

它具有以下优点：1) 形式简单，具有显式表达式；2) 局部性，表达式是分片的；3) 插值性，过已知数据点；4) 交互式修改性，因每片含有参数，可以通过参数的改变而不是点的变动来修改插值函数。

本文结构如下：第一部分的引言介绍了该插值方法存在的背景，目前的研究领域以及本方法的创新之处。第二部分具体讲述了这种方法。第三部分从保单调性，保凸性两方面探究了其的保形性。第四部分用数值例子证实了这种方法的可行性。第五部分是对文章的小结。

2. 双参数有理样条的构造

由于封闭曲线的特殊性，故不可以用显式函数将其直接表示，现采用参数曲线的形式，先在x方向上进行插值，再在y方向上插值。下文中的$x(t)$和$y(t)$就是曲线的参数表达式。

给定数据$(x_i, f_i), i=1,2,\cdots,n$，其中$f_i$为被插函数在分划点$x_i$上的函数值，此处$x_1<x_2<\cdots<x_n$，记$h_i=x_{i+1}-x_i$，定义：

$$x(t)=\frac{\alpha_i x_i(1-t)^2+A_1(1-t)t+\beta_i x_{i+1}t^2}{\alpha_i(1-t)+\beta_i t} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha_i\left[A-(\alpha_i+\beta_i)x_i\right](1-t)^2+2\alpha_i\beta_i h_i(1-t)t+\beta_i\left[(\alpha_i+\beta_i)x_{i+1}-A\right]t^2}{\left[\alpha_i(1-t)+\beta_i t\right]^2}$$

令

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\frac{A_1-(\alpha_i+\beta_i)x_i}{\alpha_i}=h_i,\quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\frac{(\alpha_i+\beta_i)x_{i+1}-A_1}{\beta_i}=h_i$$

$$A_1=\alpha_i x_{i+1}+\beta_i x_i$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha_i^2 h_i(1-t)^2+2\alpha_i\beta_i h_i(1-t)t+\beta_i^2 h_i t^2}{\left[\alpha_i(1-t)+\beta_i t\right]^2} \tag{2}$$

当α_i,β_i都取正数，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0$

同理

$$y(t)=\frac{\alpha_i y_i(1-t)^2+A_2(1-t)t+\beta_i y_i t^2}{\alpha_i(1-t)+\beta_i t} \tag{3}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{t=0}=d_i h_i$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\left.\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{t=1}=d_{i+1}h_i$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\frac{A_2-(\alpha_i+\beta_i)y_i}{\alpha_i}=d_i h_i,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\frac{(\alpha_i+\beta_i)y_{i+1}-A_2}{\beta_i}=d_{i+1}h_i$$

$$A_2 = \frac{\left(\alpha_i y_{i+1} d_i + \beta_i y_i d_{i+1}\right) h_i}{\Delta_i} \tag{4}$$

3. 双参数插值函数的保形性

3.1. 保单调性条件

下面我们(1)(3)式定义的双参数型插值函数的单调性。假设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 单调递增，因此 $f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n$，或 $\Delta_i \ge 0$ 。

选取导数值 d_i 满足：

$$d_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

在区间 $[x_i, x_{i+1}]$， $y(t)$ 单调递增的充要条件为：

$$y^{(1)}(x) \ge 0$$

由(1)式， $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} > 0$

故存在 $x^{-1}(t)$，将其带入(3)式

由链式法则

$$y^{(1)}(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \bigg/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$y^{(1)}(x) = \frac{p(t)}{q(t)} \tag{5}$$

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t),$$

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$$

其中

$$p_1(t) = \alpha_i \left[A - (\alpha_i + \beta_i) y_i\right] (1-t)^2,$$

$$p_3(t) = 2\alpha_i \beta_i h_i (1-t) t,$$

$$p_3(t) = \beta_i \left[(\alpha_i + \beta_i) y_{i+1} - A\right] \cdot t^2;$$

$$q_1(t) = \alpha_i^2 x_i (1-t)^2,$$

$$q_2(t) = 2\alpha_i \beta_i h_i (1-t) t,$$

$$q_3(t) = \beta_i^2 x_{i+1} t^2$$

由于 $\alpha_i, \beta_i > 0$，则只需要满足

$$\begin{cases} A - (\alpha_i + \beta_i) y_i > 0 \\ (\alpha_i + \beta_i) y_{i+1} - A > 0 \end{cases}$$

将(4)式带入，则得到插值函数的保单调条件：

$$s_i < \frac{\alpha_i}{\beta_i} < t_i \tag{6}$$

$$s_i = \frac{y_i \Delta_i - y_i d_{i+1} h_i}{y_{i+1} d_i h_i - \Delta_i y_i}$$

$$t_i = \frac{y_{i+1}\Delta_i - y_i d_{i+1} h_i}{y_{i+1} d_i h_i - \Delta_i y_{i+1}}$$

定理 2：已知数据$\left(f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n\right)$单调递增，导数值$d_i \ge 0$，当$d_i$满足(6)时，则存在含有正参数$\alpha_i, \beta_i$的双参数有理插值函数是单调递增的。

3.2. 保凸性条件

假设$f\left(x\right)$在区间$\left[a,b\right]$上是单调凸函数，因此设：

$$\Delta_1 \le \Delta_2 \le \cdots \le \Delta_{n-1}$$

选取导数满足

$$1 \le d_1 < \Delta_1 < d_2 < \cdots < \Delta_{i-1} < d_i < \Delta_i < \cdots < d_n$$

$$y^{(2)}\left(x\right) = y^{(1)}\left(x\right) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = y^{(1)}\left(x\right) \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

由(2)(5)式代入，并求导，化简得：

$$y^{(2)}\left(x\right) = \frac{\sum_{p=0}^{2} A_{ip}\left(1-t\right)^{2-p} t^p + \sum_{q=0}^{3} B_{iq}\left(1-t\right)^{3-q} t^q}{c\left(t\right)} \tag{7}$$

其中

$$A_{i0} = M_2 N_1 - M_1 N_2,$$

$$A_{i1} = 2M_2 N_1 - M_1 N_2,$$

$$A_{i2} = -2M_1 N_3 + M_2 N_3 + 2M_3 N_1 - M_3 N_2;$$

$$B_{io} = 2\left(M_1 N_2 + M_3 N_2 - M_1 N_2 - M_2 N_3\right),$$

$$B_{i3} = 2\left(M_1 N_3 - M_2 N_3 - M_3 N_1 + M_3 N_2\right);$$

$$M_1 = 2\alpha_i^2 d_i h_i,$$

$$M_2 = 2\alpha_i \beta_i h_i,$$

$$M_3 = \beta_i^2 d_{i+1} h_i;$$

$$N_1 = \alpha_i^2 h_i,$$

$$N_2 = 2\alpha_i \beta_i h_i$$

$y(x)$的保凸性条件是：

$$\begin{cases} A_2 B_1 - A_1 B_2 > 0 \\ 2A_2 B_1 - A_1 B_2 > 0 \\ -2A_1 B_3 + A_2 B_3 + 2A_3 B_1 - A_3 B_2 > 0 \\ A_1 B_2 + A_3 B_2 - A_2 B_1 - A_2 B_3 > 0 \\ -A_2 B_1 + A_3 B_1 + A_1 B_2 - A_1 B_3 > 0 \\ A_1 B_3 - A_2 B_3 - A_3 B_1 + A_3 B_2 > 0 \end{cases} \tag{8}$$

化简得：

$$A_2 B_1 - A_1 B_2 < A_3 B_1 - A_1 B_3 < A_3 B_2 - A_2 B_3 < 2\left(A_3 B_1 - A_1 B_3\right)$$

$$A_2B_1 - A_1B_2 = 2\alpha_i^3\beta_i h_i^2\left(1-d_i\right)$$

$$A_3B_1 - A_1B_3 = \alpha_i\beta_i h_i\left(\alpha_i\beta_i d_{i+1}h_i - \alpha_i\right)$$

$$A_3B_2 - A_2B_3 = 2\alpha_i\beta_i^3 h_i^2\left(d_{i+1}-1\right)$$

代入(8)得：

$$\frac{d_{i+1}-1}{d_{i+1}-d_i} < \frac{\alpha_i}{\beta_i} < \frac{2\left(d_{i+1}-1\right)}{d_{i+1}-d_i} \tag{9}$$

定理 3：对于给定的严格凸数据，当导数参数 d_i 满足(9)时，则存在一族含有非负参数 α_i,β_i 的双参数有理插值函是保凸的。

4. 数值例子

下面通过一个例子来验证本文所述的方法。

数据参考于函数 $x^2+y^2=4\ \left(y>0\right)$：见表 1

Table 1. The numerical data of standard experiment
表 1. 标准试验系统结果数据

i	1	2	3	4	5
x_i	−2	−1	0	1	2
y_i	0	1.73	2	1.73	0

首先通过已知数据 $\left\{\left(x_i,y_i\right), i=1,2,\cdots,n\right\}$, 计算出 Δ_i，赋值 $\alpha_i>0,\beta_i>0$，代入到上述(1)(3)里，绘制出图 1，曲线的视觉效果良好。算出的结果见表 2

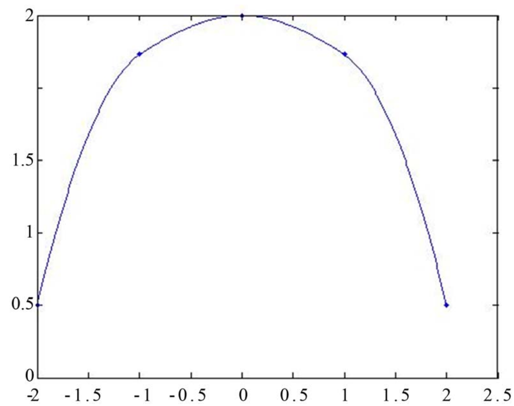

Figure 1. Curve: system result of standard experiment
图 1. 标准试验系统结果曲线

Table 2. System resulting data of standard experiment
表 2. 标准试验系统结果数据

i	1	2	3	4	5
Δ_i	1.73	0.27	−0.27	−1.73	无
h_i	1	1	1	1	无
d_i	2.99	0.46	0	−0.46	−2.99
α_i	1.26	0.27	0.69	1.26	无
β_i	1.26	0.19	0.27	1.26	无

5. 小结

本文构造了双参数有理插值样条，探究了其保形性。给出的数值例子表面由新方法生成的曲线十分光滑且保持了数据的固有形态。事实上这种新方法不仅可以用于曲线的构造，在以后的曲面构造尤其是封闭曲面的构造中也可以很好的描述。这将在以后的研究的中进一步讨论。

6. 致谢

本课题在选题和研究过程得到了王强老师的亲切关怀和悉心指导。在此向王老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意。同时感谢编者对文章提出宝贵意见，使文章更加的完整。

参考文献 (References)

[1] 王仁宏, 吴顺唐. 关于有理 spline 函数[J]. 吉林大学自然科学学报, 1978, 1: 58-70.
[2] J. A. Gregory, R. Delbourgo. Piecewise rational quadratic interpolation to monotonic data. IMA Journal of Numerical Analysis, 1982, 2(2): 123-130.
[3] R. Delbourgo. Shape preserving interpolation to convex data by rational functions with quadratic numerator and linear denominator. IMA Journal of Numerical Analysis, 1989, 9(1): 123-136.
[4] Q. Duan, K. Djidjeli, W. G. Price and E. H. Twizell. A rational cubic spline based on function values. Computers & Graphics, 1998, 22(4): 479-486.
[5] Q. Duan, L. Wang and E. H. Twizell. A C^2 rational interpolation based on function values and constrained control of the interpolant curves. Applied Mathematics and Computation, 2005, 161(1): 311-322.
[6] M. Z. Hussain, M. Hussain. Visualization of data subject to positive constraints. Information and Computing Science, 2006, 1(3): 149-160.
[7] 方逵. 一种新的二元有理插值及其性质[J]. 工程图学学报, 2010, 4: 117-122.
[8] 王强. 三次保形有理插值[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2005, 28(11): 1461-1464.

