Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 326-331
http://dx.doi.org/10.12677/PM.2013.35051 Published Online September 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

The Existence of a Class of Nonlinear Wave Equations with Variable Coefficients*

Peng Wang

College of Science, The PLA University of Science and Technology, Nanjing
Email: mathswp@163.com

Received: May. 9th, 2013; revised: Jun. 14th, 2013; accepted: Jun. 27th, 2013

Copyright © 2013 Peng Wang. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: This paper is devoted to the existence results for the one dimensional wave equation with *x*-dependent coefficients when resonance occurs at the eigenvalue r_N. By using the Mawhin's continuation theorem, the authors get a result which is similar to the literature.

Keywords: Wave Equations; *x*-Dependent Coefficients; Resonance; Periodic Solution

一类非线性变系数波方程解的存在性*

汪 鹏

解放军理工大学理学院，南京
Email: mathswp@163.com

收稿日期：2013 年 5 月 9 日；修回日期：2013 年 6 月 14 日；录用日期：2013 年 6 月 27 日

摘 要：本文研究了系数依赖于 x 的一维波方程当共振发生在特征值 r_N 处的解的存在性，主要利用 Mawhin 连续性定理，进而得到了一个类似于文学性的结果。

关键词：波方程；依赖于 x 的系数；共振；周期解

1. 引言

目前有许多关于常系数非线性波方程的文章，例如[1,2,4-8]，同时也有很多研究线性部分存在共振的非线性偏微分方程可解性的文献，例如[3,9-11]等等。Solimini 在[3]中讨论了椭圆型偏微分方程，其中对给定的 k，λ_k 是平凡的。作者利用奇点定理和拓扑度得到结果。在文献[9]中，Iannacci 和 Nkashama 研究了一般算子方程的共振问题，他们得到了一些很一般的抽象结果，这些结果满足共振发生在特征值 r_N 处且非线性项处于两个连续特征值之间时已知的存在性定理。其中 $h(x,t)$ 的 Landesman-Lazer 型条件在[9-11]中都起了重要的作用。

与常系数非线性微分方程相比，关于变系数非线性微分方程的文献就相对较少，例如文献[12-14]等等。在[14]中，Barbu 和 Pavel 研究了系数依赖于 x 的一维非线性波方程：

$$\rho(x)u_{tt}-\left(\rho(x)u_x\right)_x+g(u)=h(x,t) \qquad x\in(0,\pi),\ t\in R, \tag{1}$$

周期条件

$$u(x,0)=u(x,T),\quad u_t(x,0)=u_t(x,T) \qquad x\in(0,\pi), \tag{2}$$

*基金项目：本文获得解放军理工大学理学院青年科研基金支持。

 Copyright © 2013 Hanspub

Dirichlet 型边值条件

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ \ t\in R. \tag{3}$$

其中 $\rho(x)$ 和 T 满足假设：

(H_1) $\rho(x)\in H^2(0,\pi)$，当 $x\in(0,\pi)$ 时 $\rho(x)\geq s>0$，$s\in R^+$，且 $\eta_0=ess\ \ \inf\eta_\rho(x)>0$，其中 $\eta_\rho(x)=\frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho}-\frac{1}{4}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2$。

(H_2) $T=2\pi\frac{p}{q}$，其中 p，q 为互素的正整数。

设 $\Omega=(0,\pi)\times(0,T)$，记 $L^p(\Omega)(1\leq p\leq+\infty)$ 为 Lebesgue 空间，即绝对值的 p 次幂是 Lebesgue 可积的实值可测函数空间。

$$H^m(\Omega)=\left\{v\in L^2(\Omega)\middle|D^\alpha v\in L^2(\Omega),|\alpha|\leq m\right\}(m=1,2)$$

为一般的 Sobolev 空间，范数为

$$\|v\|_{H^m(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\ \ (m=1,2)。$$

在 $g(u)$ 的一些假设条件下，利用次微分作者得到问题(1)~(3)至少有一个弱解。Kim 和 Pavel 在文献[12]中研究了常系数及系数依赖于 x 的二维波方程弱周期解的存在性及正则性，其边界条件是齐次 Dirichlet 型和 Neumann-Dirichlet 型。在[13]中，他们又合作讨论了方程(1)和(2)在非齐次 Neumann-Dirichlet 型边界条件

$$-\rho(0)u_x(0,t)=\varphi(t),\ u(\pi,t)=0,\ t\in(0,T) \tag{4}$$

下的 T 周期解。

本文在上述文章的启发下，讨论一类系数依赖于 x 且共振发生在特征值 r_N 处的一维非线性波方程解的存在性，方程为

$$\begin{cases}\rho(x)u_{tt}-(\rho(x)u_x)_x=r_N\rho(x)u+h(x,t) & (x,t)\in\Omega,\\ -\rho(0)u_x(0,t)=0,u(\pi,t)=0 & t\in(0,T),\\ u(x,0)=u(x,T),u_t(x,0)=u_t(x,T) & x\in(0,\pi).\end{cases} \tag{5}$$

其中 $\Omega=(0,\pi)\times(0,T)$，$h\in L^2(\Omega)$，$\rho(x)$ 满足 (H_1) 且对 T 有假设：

$$(H_3)\ \ T=\frac{\pi(2k-1)}{p},\ k,p\in N。$$

本文得到的结论是方程(5)在假设条件下，至少存在一个解。为了证明这个结论，首先讨论方程线性部分的性质。

2. 方程线性部分的性质

考虑系数依赖于 x 的一维波方程：

$$\begin{cases}\rho(x)u_{tt}-(\rho(x)u_x)_x=\rho(x)h(x,t), & (x,t)\in\Omega,\\ -\rho(0)u_x(0,t)=0, & u(\pi,t)=0,\ t\in(0,T),\\ u(x,0)=u(x,T),u_t(x,0)=u_t(x,T), & x\in(0,\pi).\end{cases} \tag{6}$$

若对 $\forall v\in C_{\pi}^{2}\left(\bar{\Omega}\right)$，有

$$\int_{\Omega}u\left(\rho(x)v_{tt}-\left(\rho(x)v_{x}\right)_{x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{\Omega}\rho(x)h(x,t)v(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{7}$$

则称 $u\in L^{2}(\Omega)$ 为(6)的弱解，其中

$$C_{\pi}^{2}\left(\bar{\Omega}\right)=\left\{v\in C^{2}\left(\bar{\Omega}\right);v_{x}(0,t)=v(\pi,t)=0,\right.$$
$$\left.v(x,0)=v(x,T),v_{t}(x,0)=v_{t}(x,T),(x,t)\in\Omega\right\},$$

在 $L^{2}(\Omega)$ 中稠密。

令 $D(L)=\left\{u\in L^{2}(\Omega);\exists h\in L^{2}(\Omega)\right.$使得（7）成立$\left.\right\}$，

定义 $L:D(L)\to L^{2}(\Omega),\ Lu=h,\ u\in D(L)$,

即 $Lu=h$ 当且仅当

$$\int_{\Omega}u\left(\rho(x)v_{tt}-\left(\rho(x)v_{x}\right)_{x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{\Omega}\rho(x)h(x,t)v(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\quad\forall v\in C_{\pi}^{2}\left(\bar{\Omega}\right)。$$

此算子称为弱解算子，显然 L 在 $R(L)$ 上可逆，其逆 L^{-1} 为弱解算子。

定义内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为

$$\langle h_{1},h_{2}\rangle=\int_{\Omega}\rho(x)h_{1}(x,t)\bar{h}_{2}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t;\ h_{1},h_{2}\in L^{2}(\Omega),$$

其中 $\bar{h}_{2}$ 为 h_{2} 的共轭。此内积对应的范数为

$$\|h\|^{2}=\int_{\Omega}\rho(x)\left|h(x,t)\right|^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t;\ h\in L^{2}(\Omega)。$$

在 $L^{2}(\Omega)$ 中，特征函数系 $\{\phi_{n}\psi_{m};n\in N,m\in Z\}$ 构成正交系统，其中 $N=\{1,2,3,\cdots\}$， Z 为整数集，

$$\psi_{m}(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{e}^{i\mu_{m}t},\ \mu_{m}=\frac{2m\pi}{T}=\frac{2mp}{2k+1},\ m\in Z\ ,$$

ϕ_{n} 和 λ_{n} 为 Sturm-Liouville 问题

$$\left(\rho\phi_{n}'\right)'=-\rho\lambda_{n}^{2}\phi_{n},\ \phi_{n}'(0)=\phi_{n}(\pi)=0,\ n\in N.$$

的特征函数和特征值，我们知道当 $n\to+\infty$ 时， $\lambda_{n}\to+\infty$ ，且 $\lambda_{n}=\frac{1}{2}(2n-1)+\theta_{n}$

其中当 $n\to+\infty$ 时， $\theta_{n}\to+\infty$ 。记

$$u_{mn}=\int_{\Omega}\rho(x)u(x,t)\phi_{n}(x)\bar{\psi}_{m}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\qquad h_{mn}=\int_{\Omega}\rho(x)h(x,t)\phi_{n}(x)\bar{\psi}_{m}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

分别为

$$u=\sum_{m\in Z,n\in N}u_{mn}\phi_{n}(x)\psi_{m}(t)\quad h=\sum_{m\in Z,n\in N}h_{mn}\phi_{n}(x)\psi_{m}(t)$$

在 $L^{2}(\Omega)$ 中的 Fourier 系数。将 $u=\phi_{n}(x)\bar{\psi}_{m}(t)$ 代入(7)式，由 Parseval 公式 $\|u\|^{2}=\sum_{m\in Z,n\in N}|u_{mn}|^{2}$ ，$\|h\|^{2}=\sum_{m\in Z,n\in N}|h_{mn}|^{2}$ ，得 $Lu=h\Leftrightarrow\left(\lambda_{n}^{2}-\mu_{m}^{2}\right)u_{mn}=h_{mn}$ ，关于算子 L 有下面的一些性质[13]。

引理 1 L 在 $L^{2}(\Omega)$ 中是自伴的，

$$R(L)=\left\{h\in L^{2}(\Omega);\text{当}\lambda_{n}=|\mu_{m}|\text{时},h_{mn}=0\right\}=\mathrm{Span}\left\{\phi_{n}\psi_{m};m\in Z,n\in N\text{ 且}\lambda_{n}\neq|\mu_{m}|\right\}=N(L)^{\perp}$$

是闭的，

Copyright © 2013 Hanspub

$$N(L)=\mathrm{Span}\left\{\phi_n\psi_m;m\in Z,n\in N且\lambda_n=|\mu_m|\right\}$$

为有限维。$L^{-1}:R(L)\to R(L)$ 连续紧，且有

$$\left\|L^{-1}h\right\|_{H^1(\Omega)}\le C\|h\|_{L^2(\Omega)}，\left\|L^{-1}h\right\|_{L^\infty}\le C\|h\|_{L^2(\Omega)}，$$

$$\left\langle L^{-1}h,h\right\rangle\ge-\alpha^{-1}\|h\|^2，\left\langle Lu,u\right\rangle\ge-\alpha^{-1}\|Lu\|^2,\ h\in R(L),\ u\in D(L)，$$

其中 $\alpha=\inf\left\{\mu_m^2-\lambda_n^2;\mu_m^2>\lambda_n^2\right\}$。

此引理 1 已经在[13]推论 2.1 中证明。

3. 结论的证明

由引理 1 知算子 L 的谱 $\sigma(L)$ 为纯点谱，即任意的 $r\in\sigma(L)$，$r\ne0$ 是有限重特征值，$\sigma(L)=\left\{r=\lambda_n^2-\mu_m^2\middle|n\in N,m\in Z\right\}$ 无有限聚点，我们可以将他们罗列出来：$\cdots<r_{-2}<r_{-1}<r_0=0<r_1<r_2<\cdots$。

记 P_j 为到 $N(L-r_jI)$ 的正交投影，L 有下面的谱替换 $L=\sum_j r_jP_j$。

在任何赋范空间里，用 $\to$ 记强收敛，若 $F:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 是一个正的非线性算子，如果

$$(Fu-Fv,u-v)\ge0,u、v\in L^2(\Omega)$$

则称 F 在 $L^2(\Omega)$ 是单调的。

令 $N\in Z$，对任意 $u\in D(L)$，记 $u=\bar{u}(x)+u^0(x)+\tilde{u}(x)$

若 u 的 Fourier 展式为 $u=\sum_j P_ju$

则

$$\bar{u}=\sum_{j<N}P_ju,\ u^0=P_Nu,\ \tilde{u}=\sum_{j>N}P_ju，$$

且记 $u^\perp=u-u^0$。

显然 $u^0\in N(L-r_NI)$。记 $\tilde{H}=\left\{u\in D(L):u=\sum_{j>N}P_ju\right\}$ 为 $D(L)$ 的子空间，使得 $\tilde{u}\in\tilde{H}$。

定理1. 设 $p\in L^\infty(\Omega)$ 使 $a.e.\ (x,t)\in\Omega$，

$$0\le\rho^{-1}(x)p(x,t)\le r_{N+1}-r_N=r$$

且对任意 $w\in N(L-r_{N+1}I)$，$w\ne0$，

$$\int_\Omega\rho(x)\left(r-\rho^{-1}(x)p(x,t)\right)w^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t>0。\tag{8}$$

则存在常数 $\delta=\delta(p,\rho)>0$ 使得对任意的 $u\in D(L)$ 有

$$D_p(u)\equiv\left\langle Lu-\left(r_N+\rho^{-1}p\right)u,\ \bar{u}-\left(\bar{u}+u^0\right)\right\rangle\ge\delta\left\|u^\perp\right\|^2。$$

证明： 由 $\left(\bar{u}+u^0\right)$ 与 $\tilde{u}$ 的正交性及 $u^0\in N(L-r_N)$ 可得

$$D_p(u)=\left\langle L\tilde{u}-r_N\tilde{u}-\rho^{-1}p\tilde{u},\tilde{u}\right\rangle-\left\langle L\bar{u},\bar{u}\right\rangle+r_N\left\langle\bar{u},\bar{u}\right\rangle+\left\langle\rho^{-1}p\left(\bar{u}+u^0\right),\bar{u}+u^0\right\rangle，$$

因为在 $(0,\pi)$ 上 $\rho(x)\ge s>0$ 且对 $a.e.\ (x,t)\in\Omega$，$p(x,t)$ 非负，故上式中的最后一项非负，所以

$$D_p(u)\ge\left\langle L\tilde{u}-r_N\tilde{u}-\rho^{-1}p\tilde{u},\tilde{u}\right\rangle-\left\langle L\bar{u},\bar{u}\right\rangle+r_N\left\langle\bar{u},\bar{u}\right\rangle。$$

由 Parseval-Steklov 恒等式得

$$r_N\langle\bar{u},\bar{u}\rangle-\langle L\bar{u},\bar{u}\rangle=r_N\sum_{j\le N-1}\left|P_ju\right|^2-\sum_{j\le N-1}r_j\left|P_ju\right|^2=\sum_{j\le N-1}\left(r_N-r_j\right)\left|P_ju\right|^2\ge\sum_{j\le N-1}\left\{\min\left(r_N-r_j\right)\right\}\left|P_ju\right|^2$$

故可得 $r_N\langle\bar{u},\bar{u}\rangle-\langle L\bar{u},\bar{u}\rangle\ge\delta_1\|\bar{u}\|^2$，其中 $\delta_1=r_N-r_{N-1}$。

下面证明存在 $\delta_2=\delta_2(p,\rho)>0$ 使得

$$\left\langle L\tilde{u}-r_N\tilde{u}-\rho^{-1}p\tilde{u},\tilde{u}\right\rangle\ge\delta_2\|\tilde{u}\|^2。\tag{9}$$

因为 $a.e.\ (x,t)\in\Omega$，$\rho^{-1}(x)p(x,t)\le r_{N+1}-r_N=r$，所以

$$\langle L\tilde{u},\tilde{u}\rangle-\left\langle\left(r_N+\rho^{-1}p\right)\tilde{u},\tilde{u}\right\rangle\ge\langle L\tilde{u},\tilde{u}\rangle-r_{N+1}\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle=\sum_{j\ge N+1}\left(r_j-r_{N+1}\right)\left|P_ju\right|^2,$$

故 $\left\langle L\tilde{u}-r_N\tilde{u}-\rho^{-1}p\tilde{u},\tilde{u}\right\rangle\ge\sum_{j\ge N+1}\left(r_j-r_{N+1}\right)\left|P_ju\right|^2$，因此 $\left\langle L\tilde{u}-r_N\tilde{u}-\rho^{-1}p\tilde{u},\tilde{u}\right\rangle\ge0$，当且仅当 $\tilde{u}=w$，$w\in N\left(L-r_{N+1}I\right)$ 时取等号，由(8)式得，

$$\left\langle L\tilde{u}-r_N\tilde{u}-\rho^{-1}p\tilde{u},\tilde{u}\right\rangle=0\Leftrightarrow\tilde{u}=0。$$

假设(9)式不成立，则存在序列 $\{\tilde{u}_k\}\subset\tilde{H}\cap D(L)$ 使得对任意 $k\in N$，$\|\tilde{u}_k\|=1$ 且 $\left\langle L\tilde{u}-r_N\tilde{u}-\rho^{-1}p\tilde{u},\tilde{u}\right\rangle\le k^{-1}$。

记 $\tilde{H}=N\left(L-r_{N+1}I\right)\oplus\tilde{H}_1$，其中 $N\left(L-r_{N+1}I\right)$ 为有限维特征空间，$\tilde{H}_1$ 是 $\tilde{H}$ 中 $N\left(L-r_{N+1}I\right)$ 的正交空间。显然 $\tilde{u}_k=w_k+v_k$，其中 $w_k\in N\left(L-r_{N+1}I\right)$，$v_k\in\tilde{H}_1$，故当 $k\to+\infty$ 时，在 H 中 $v_k\to0$。由 $N\left(L-r_{N+1}I\right)$ 为有限维的及 $1=\|\tilde{u}_k\|^2=\|w_k\|^2+\|v_k\|^2$ 得存在 $\{w_k\}$ 的子列，仍记为 $\{w_k\}$，$w_k\to w\in N\left(L-r_{N+1}I\right)$ 且 $\|w\|=1$。从而

$$\begin{aligned}k^{-1}&\ge\left\langle L\tilde{u}_k-r_N\tilde{u}_k-\rho^{-1}p\tilde{u}_k,\tilde{u}_k\right\rangle=\left\langle Lw_k-r_Nw_k-\rho^{-1}pw_k,w_k\right\rangle-2\left\langle\left(r_N+\rho^{-1}p\right)w_k,v_k\right\rangle+\left\langle Lv_k-r_Nv_k-\rho^{-1}pv_k,v_k\right\rangle\\&\ge\left\langle\left(r_{N+1}-r_N-\rho^{-1}p\right)w_k,w_k\right\rangle-2\left\langle\left(r_N+\rho^{-1}p\right)w_k,v_k\right\rangle+\left(r_{N+2}-r_{N+1}\right)\|v_k\|^2,\end{aligned}$$

由于当 $k\to+\infty$ 时，$v_k\to0$，$w_k\to w$，故 $0\ge\int_\Omega\rho(x)\left(r_{N+1}-r_N-\rho^{-1}(x)p(x,t)\right)w^2(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$，又由于 $a.e.\ (x,t)\in\Omega$，$\rho^{-1}(x)p(x,t)\le r_{N+1}-r_N=r$，故

$$0=\int_\Omega\rho(x)\left(r-\rho^{-1}(x)p(x,t)\right)w^2(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中 $w\in N\left(L-r_{N+1}I\right)$，再由(8)式得 $w=0$，与 $\|w\|=1$ 矛盾，所以不等式(9)得证。选取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，又由 $\left\|u^\perp\right\|^2=\|\bar{u}\|^2+\|\tilde{u}\|^2$，定理得证。

我们将利用 Mawhin 连续性定理来证明本文的主要结论，为了方便，在这里作为引理给出[15]。

引理 2. 设 X 和 Y 为两个巴拿赫空间，$L:D(L)\subset X\to Y$ 为具有零指标的 Fredholm 算子，$\Omega\subset X$ 为有界开集，且 $N:\bar{\Omega}\to Y$ 为 L 紧的，$A:X\to Y$ 为 L 全连续的，如果下面的条件成立：

1) $\ker(L-A)=\{0\}$，

2) $\forall(x,\lambda)\in\left(D(L)\cap\partial\Omega\right)\times(0,1)$，$Lx-(1-\lambda)Ax-\lambda Nx\ne0$。

则 $Lx=Nx$ 在 $D(L)\cap\bar{\Omega}$ 内至少有一个解。

定理 2.设 L 的定义与前面一致，设 $r_N\in\sigma(L)$（$\sigma(L)$ 为 L 的谱），则问题(5)等价于下面方程的可解性问题

$$Lu=r_Nu+\rho^{-1}h\tag{10}$$

则(10)至少有一个解。

证明：设

$$E:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega),\ u\to\rho^{-1}h(\cdot,\cdot),$$

$$A:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega),\ u\to\rho^{-1}h(\cdot,\cdot),$$

则方程(10)等价于

 Copyright © 2013 Hanspub

$$Lu - r_N u - Eu = 0 \tag{11}$$

在 $D(L)$ 上的可解问题。

由引理 1 知道 $N(L)$ 是有限维的，则 L 为指标为零的线性 Fredholm 算子，且 E 和 A 在 $L^2(\Omega)$ 的有界子集上是 L -紧的。由引理 2 知，如果对任意使得方程

$$Lu - r_N u - (1-\lambda) Au - \lambda Eu = 0 \tag{12}$$

成立的 $\lambda \in [0,1]$ 和 $u \in D(L)$ 都有 $\|u\| < k_0$，则方程(11)有解。

根据定理 1，对任意使得方程(12)成立的 $\lambda \in [0,1]$ 和 $u \in D(L)$，均有 $\|u\| < k_0$ 成立，故由引理 2，方程(10)至少有一个解，也即方程(5)在假设条件下，至少有一个解。

参考文献 (References)

[1] L. Cesari, R. Kannan. Solutions of nonlinear hyperbolic equations at resonace. Nonlinear Analysis, 1982, 6(8): 751-805.

[2] M. Schechter. Bounded resonance problems for semilinear elliptic equations. Nonlinear Analysis, 1995, 24(10): 1471-1482.

[3] S. Solimini. On the solvability of some elliptic partial differential equations with the linear part at resonance. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1986, 117: 138-152.

[4] M. Willem. Periodic solutions of wave equations with jumping nonlinearities. Journal of Differential Equations, 1980, 36(1): 20-27.

[5] J. Berkovits, V. Mustonen. On nonresonance for systems of semilinear wave equations. Nonlinear Analysis, 1997, 29(6): 627-638.

[6] S. Rybicki. Periodic solutions of vibrating strings. Degree theory approach. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 2001, 179(1): 197-214.

[7] J. M. Coron. Periodic solutions of a nonlinear wave equation without assumption of monotonicity. Mathematische Annalen, 1983, 262(2): 273-285.

[8] P. L. Felmer, R. F. Manasevich. Periodic solutions of a coupled system of telegraph-wave equations. Journal of Mathematical Analy- sis and Applications, 1986, 116(1): 10-21.

[9] R. Iannacci, M. N. Nkashama. Nonlinear boundary value problems at resonance. Nonlinear Analysis, 1987, 11(4): 455-473.

[10] R. Iannacci, M. N. Nkashama. Nonlinear elliptic partial differential equations at resonance: Higher eigenvalues. Nonlinear Analysis, 1995, 25(5): 455-471.

[11] M. R. Grossinho, M. N. Nkashama. Periodic solutions of parabolic and telegraph equations with asymmetric nonlinearities. Nonlinear Analysis, 1998, 33(2): 187-210.

[12] J. K. Kim, N. H. Pavel. Existence and regularity of weak periodic solutions of the 2-D wave equation. Nonlinear Analysis, 1998, 32(7): 861-870.

[13] J. K. Kim, N. H. Pavel. L^∞-optimal control of the periodic 1-D wave equation with *x*-dependent coefficients. Nonlinear Analysis, 1998, 33(1): 25-39.

[14] V. Barbu, N. H. Pavel. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with *x*-dependent coefficients. Transactions of the American Mathematical Society, 1997, 349(5): 2035-2048.

[15] J. Mawhin. Compacite, monotonie et convexite dans l'Etude des problems aux limites semi-lineaires. Quebec: Universite de Sherbrooke, 1981.