Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 1-4
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.41001 Published Online January 2014 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Characterizations of Completely ϑ^*-Simple Semigroups

Xiaoting He, Xiaojiang Guo

College of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang
Email: creekemily@sina.cn, xjguo1967@sohu.com

Received: Nov. 24th, 2013; revised: Dec. 16th, 2013; accepted: Dec. 19th, 2013

Abstract: Completely ϑ^*-simple semigroups form an important class of abundant semigroups. In this paper, some characteristics of completely ϑ^*-simple semigroups are obtained, which extends some important results on completely simple semigroups.

Keywords: Completely ϑ^*-Simple Semigroups; Abundant Semigroups; Completely Simple Semigroups; Cancellative Monoid

完全ϑ^*-单半群的若干特征

何晓婷，郭小江

江西师范大学数学与信息科学学院，南昌
Email: creekemily@sina.cn, xjguo1967@sohu.com

收稿日期：2013 年 11 月 24 日；修回日期：2013 年 12 月 16 日；录用日期：2013 年 12 月 19 日

摘 要：完全ϑ^*-单半群是一类重要的富足半群，本文给出了这类半群的若干特征，这些结果推广了关于完全单半群的一些重要结果。

关键词：完全ϑ^*-单半群；富足半群；完全单半群；消去幺半群

1. 引言

文中将采用[1]的记号和术语。为方便计，本文总记 S 为半群，$E(S)$ 为半群 S 的幂等元集。首先，回忆几个已知的结果，这些结果后面将会多次用到。

引理 1.1[2]：令 S 为半群且 $a,b\in S$，则下列命题等价：

(1) $a\mathcal{L}^*\left[\mathcal{R}^*\right]b$；

(2) 对于任意的 $x,y\in S^1, ax=ay \Leftrightarrow bx=by \left[xa=ya \Leftrightarrow xb=yb\right]$。

据引理 1.1，有

引理 1.2[2]：令 S 为半群且 $a,e=e^2\in S$，则下列命题等价：

(1) $a\mathcal{L}^*\left[\mathcal{R}^*\right]e$；

(2) $ae=a\left[ea=a\right]$ 且对于任意的 $x,y\in S^1, ax=ay\Rightarrow ex=ey\left[xa=ya\Rightarrow xe=ye\right]$。

众所周知，$\mathcal{L}^*$ 是 S 上的右同余，$\mathcal{R}^*$ 是 S 上的左同余。一般地，总有 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^*$ 且 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^*$，但是当 a,b 是 S 的正则元时，$a\mathcal{L}^*\left[\mathcal{R}^*\right]b$ 当且仅当 $a\mathcal{L}\left[\mathcal{R}\right]b$。

令 S 为半群，若 S 的每个 $\mathcal{L}^*$ -类都含有幂等元，则称 S 为右富足半群；对偶的，若 S 的每个 $\mathcal{R}^*$ -类都含有幂等元，则称 S 为左富足半群；若 S 既是右富足的又是左富足的，则称 S 为富足半群。对于富足半群我们可以参考[2]。显然，正则半群是富足半群。

令 I,Λ 均为非空集合，M 为幺半群，且 $P=\left(p_{\lambda i}\right)$ 为 M 的单位群(unit group)上的 $\Lambda\times I$ -矩阵。记 $T=M\times I\times\Lambda$。在 T 上，定义运算如下：

$$\left(x,i,\lambda\right)\left(y,j,\mu\right)=\left(xp_{\lambda i}y,i,\mu\right)$$

关于上面的运算，明显可知 T 构成半群，记为 $\mathcal{M}\left(M;I,\Lambda;P\right)$。称之为幺半群 M 上的关于夹心矩阵(sandwich matrix) P 的 Rees 矩阵半群。半群 S 称为完全 $\mathcal{G}^*$ -单半群(completely $\mathcal{G}^*$-simple semigroup)，如果 S 同构于某个消去幺半群 M 上的 Rees 矩阵半群 $\mathcal{M}\left(M;I,\Lambda;P\right)$ (见[2])。完全 $\mathcal{G}^*$ -单半群是完全单半群在富足半群的基础。本文的目的是探究完全 $\mathcal{G}^*$ -单半群的性质。

2. 主要结果

设 S 为富足半群，$e\in E\left(S\right)$，则局部幺半群 eSe 是以 e 为幺半群 S 的富足半群(见[3])。如果 S 的所有局部幺半群 eSe 都是消去幺半群，则 S 称为局部消去幺半群(locally cancellative monoid)。

我们可以证明下面的定理，这推广了[4] (TheoremIII.3, p. 114)。

定理 2.1：令 S 为富足半群，下列各款等价：

(1) S 为完全 $\mathcal{G}^*$ -单半群；

(2) S 为局部；消去幺半群；

(3) S 的所有幂等元都是本原的；

(4) S 满足弱消去律；即对于任意的 $a,x,y\in S$，等式 $ax=ay$ 和 $xa=ya$ 蕴含着 $x=y$；

(5) 对于任意的 $a,x\in S$，和 $a=axa$，则 $x=xax$。

证明：(1) $\Rightarrow$ (2)设 $S=\mathrm{M}\left(M;I,\Lambda;P\right)$，其中 M 为消去幺半群。令 $e\in E\left(S\right),a\in S$，则存在 $i\in I,\lambda\in\Lambda$，使得 $e=\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)$。易知，$eSe=\left\{\left(x,i,\lambda\right):x\in M\right\}$。注意到，映射：$\left(x,i,\lambda\right)\mapsto xp_{\lambda i}$ 是 eSe 到 M 上的同构。故 S 为局部消去幺半群。

(2) $\Rightarrow$ (3)仅需证，对于任意的 $e,f\in E\left(S\right)$，若 $e\le f$，则 $e=f$，我们有 $e=ef=fe$，以至于 e,f 是消去幺半群 eSe 的幂等元，但消去幺半群仅有一个幂等元，因此 $e=f$，即为所要证。

(3) $\Rightarrow$ (1)由(3)，知 S 为不含零元的本原富足半群，再利用[2] (Corollary5.2)，S 为完全 $\mathcal{G}^*$ -单半群

(1)$\Rightarrow$ (4)设 $S=\mathcal{M}\left(M;I,\Lambda;P\right)$，其中 M 为消去幺半群。若对于任意的 $\left(a,i,\lambda\right),\left(x,j,\mu\right),\left(y,k,\gamma\right)\in S$，若

$$\left(a,i,\lambda\right)\left(x,j,\mu\right)=\left(a,i,\lambda\right)\left(y,k,\gamma\right),\ \left(x,j,\mu\right)\left(a,i,\lambda\right)=\left(y,k,\gamma\right)\left(a,i,\lambda\right)$$

即 $\left(ap_{\lambda j}x,i,\mu\right)=\left(ap_{\lambda k}y,i,\gamma\right),\ \left(xp_{\mu i}a,j,\lambda\right)=\left(yp_{\gamma i}a,k,\lambda\right)$，则

$$ap_{\lambda j}x=ap_{\lambda k}y,\ xp_{\mu i}a=yp_{\gamma i}a,\ \ j=k,\ \mu=\gamma$$

但 M 为消去幺半群，第一、二两个等式可以得到 $x=y$，从而 $\left(x,j,\mu\right)=\left(y,k,\gamma\right)$，即 S 满足弱消去律。

(4) $\Rightarrow$ (5)令 $a,x\in S$，且 $a=axa$ 则 $xa=x\left(axa\right)=\left(xax\right)a$ 且 $ax=\left(axa\right)x=a\left(xax\right)$，但 S 满足弱消去律，因此 $x=xax$。

(5) $\Rightarrow$ (3) 假设 $e,f\in E(S)$，且 $e\le f$，则有 $e=ef=fe=efe$，由(5)，$f=fef$，进而我们就可得到 $f=fef=eff=ef=e$，故 S 的所有幂等元都是本原的。

令集合 $\{0,1\}$，关于数的普通乘法，构成一个半格，我们将记这个半格为 Y_2。

定理 2.2： 令 S 为富足半群，下列各款等价：

(1) S 为完全 $\mathcal{G}^*$-单半群；

(2) 对于任意的 $e,f\in E(S)$，eSf 为 S 的消去幺半群；

(3) 对于任意的 $e,f\in E(S)$，总有 $ef=e\Rightarrow fe=f$；

(4) S 没有同构于 Y_2 的子半群。

证明： (1)⇒(2)设 $S=\mathcal{M}(M;I,\Lambda;P)$，其中 M 为消去幺半群。若 $e=(x,i,\lambda),f=(y,j,\mu)\in E(S)$ 则 $eSf=\{(a,i,\mu):a\in M\}$。容易验证，映射：$(s,i,\mu)\mapsto sp_{\mu i}$ 是 eSf 到 M 上的同构。故 eSf 为消去幺半群。

(2) $\Rightarrow$ (3)对于任意的 $e,f\in E(S)$，若有 $ef=e$，则 $fe\in E(S),fe\le f$，易知，fe,f 均为 fSf 的幂等元，而由条件(2)，知 fSf 是消去幺半群，因此 fSf 只有一个幂等元，故 $fe=f$。

(3) $\Rightarrow$ (4)反设，$\{e,f\}$ 为 S 的同构于 Y_2 的子半群。则 $e,f\in E(S),ef=fe$ 且 $e\le f$ 或者 $f\le e$，进而 $e=ef$ 或 $f=ef$，利用条件(3)，我们有 $fe=f$ 或 $e=ef$，总之 $e=f$，矛盾。从而(4)成立。

(4) $\Rightarrow$ (1)对于任意的 $e,f\in E(S)$，若有 $e\le f$ 且 $e\ne f$，则 $\{e,f\}$ 为 S 的子半群，显然，同构于 Y_2，这与条件(4)矛盾。故 S 的所有幂等元都是本原的，再由定理 2.1，即 S 为完全 $\mathcal{G}^*$-单半群。

半群 S 的左理想 J 称为左*-理想$(\text{left}^*\text{-ideal})$，如果 $J=\cup_{x\in J}L_x^*$，其中 L_x^* 记 S 的含 x 的 $\mathcal{L}^*$-类。对偶地，定义右*-理想。容易验证，左(右)*-理想的交仍为左(右)*-理想。记 $L^*(a)\left[R^*(a)\right]$ 为含 a 的 S 的最小左(右)*-理想。关于左(右)*-理想，读者可以参考[2,5]。

令 S 为半群，I 为 S 的子集，若 I 既是左*-理想又是右*-理想，则称 I 为 S 的*-理想$({}^*\text{-ideal})$。若半群 S 的真*-理想，则称 S 为 $\mathcal{G}^*$-单半群$(\mathcal{G}^*\text{-simple semigroup})$。

Fountain 在[2]中指出：对于 $a,b\in S,a\mathcal{L}^*(\mathcal{R}^*)b$ 当且仅当 $L^*(a)=L^*(b)\left[R^*(a)=R^*(b)\right]$。富足半群 S 称为 IC 的$(\text{idempotent-connected})$，如果对于任意的 $a\in S$，都存在幂等元 $e,f\in E(S)$ 使得

(1) $e\mathcal{L}^*a\mathcal{R}^*f$；

(2) 对于任意的 $g\in E(S)$ 一旦 $g\le f$，则有幂等元 $h\in E(S)$ 满足 $ag=ha$。

众所周知，完全 $\mathcal{G}^*$-单半群是 IC 富足半群。反之，我们有下面的定理。

定理 2.3： 令 S 为 IC 富足半群，则 S 为完全 $\mathcal{G}^*$-单半群当且仅当

(1) S 为 $\mathcal{G}^*$-单半群；

(2) S 有极小左(右)*-理想。

证明： 设 S 为完全 $\mathcal{G}^*$-单半群，则由[2] (Theorem6.7)，知 S 是 $\mathcal{G}^*$-单半群。令 $e\in E(S)$，则 e 是本原幂等元。下证，$L^*(e)$ 为极小左*-理想。由[2] (Corollary1.9)前面的讨论，$L^*(e)=Se$。若 $L^*(e)$ 不是极小的，则必存在 $a\in S$，使得 $L^*(a)\subset L^*(e)$。而 S 为 IC 富足半群，于是有 $f\in E(S)$ 满足 $f\mathcal{L}^*a$，进而有极小左*-理想。$L^*(a)=L^*(f)=Sf$。这样，$Sf\subset Se$，再利用[2] (Lemma3.1)，$Sf=Sf$，这与 $L^*(a)\subset L^*(e)$ 矛盾。即证明了，S 反之，设 S 为 $\mathcal{G}^*$-单半群，且 S 有极小左*-理想。令 I 为 S 的极小左*-理想，则存在 $a\in S$ 使得 $I=L^*(a)$，从而有幂等元 e 满足 $L^*(a)=Se$。据[6] (Corollary4.6)，仅需证：e 为本原幂等元。若有幂等元 f，且 $f\le e$，显然，$L^*(f)=Sf\subset Se=I$，而 I 是极小的，因此 $Sf=Se$ 这意味着，$e=fe$，故有 $f=fe=e$，即 e 为本原幂等元。证毕.

注意到，在正则半群中，总有 $\mathcal{L}^*=\mathcal{L},\mathcal{R}^*=\mathcal{R}$.我们容易看出，在正则半群中，左理想(右理想)是左*-理想(右*-理想)。事实上，正则半群都是 IC 富足半群。因此 $\mathcal{G}^*$-单正则半群恰为单半群。基于此，利用定理 2.3，下面推论显然。

推论 2.4： 令 S 为正则半群，则 S 为完全单半群当且仅当

(1) S 为单半群；

(2) S 有极小左(右)理想。

现在我们利用 Green*-关系给出了完全 $\mathcal{G}^*$-单半群的一些刻画。

定理 2.5：令 S 为富足半群，则下列各款等价：

(1) S 为完全 $\mathcal{G}^*$-单半群；

(2) 对于任意的 $a,b\in S, a\mathcal{R}^*ab$；

(3) 对于任意的 $a,b\in S, ab\mathcal{L}^*b$。

证明：(1) $\Rightarrow$ (2)设 $S=\mathcal{M}(M;I,\Lambda;P)$，其中 M 为消去幺半群。对于 $(x,i,\lambda),(y,j,\mu)\in S$，由[6] (Lemma2.4) [7] (Lemma1.6)对偶叙述，知

$$(x,i,\lambda)\mathcal{R}^*(xp_{\lambda j}y,i,\mu)=(x,i,\lambda)(y,j,\mu)$$

即(2)成立。

(2) $\Rightarrow$ (1)假设(2)成立，由定理 2.1，仅需证：则 S 的所有幂等元都是本原的。为此，令 $e,f\in E(S)$，若有 $e\le f$，则 $e=fe=ef$ 利用条件(2)，有 $fR^*fe=e$，根据引理[1.2]知 $f=ef$，从而 $e=f$。这样证明了：S 的所有幂等元都是本原的。证毕.

下面的推论显然。

推论 2.6：令 S 为正则半群，下列各款等价：

(1) S 为完全单半群；

(2) 对于任意的 $a,b\in S, a\mathcal{R}ab$；

(3) 对于任意的 $a,b\in S, ab\mathcal{L}b$。

项目基金

国家自然科学基金(11361027)；江西省自然科学基金(2014BAB201009)；江西省教育厅科研项目助资(GJJ11388)。

参考文献 (References)

[1] Howie, J.M. (1976) An introduction to semigroup theory. Academic Press, London.

[2] Fountain, J.B. (1982) Abundant semigroups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **44**, 103-129.

[3] Lawson, M.V. (1987) The natural partial order on an abundant semigroup. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **30**, 169-186.

[4] Petrich, M. and Reilly, N.R. (1999) Completely regular semigroups. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[5] Guo, X.J. and Luo, Y.F. (2005) The natural partial orders on abundant semigroups. *Advances in Mathematics* (*China*), **34**, 297-304.

[6] Guo, X.J., Guo, Y.Q. and Shum, K.P. (2008) Rees matrix theorem for $D^{(\ell)}$-simple strongly rpp semigroups. *Asian-European Journal of Mathematics*, **1**, 215-223.

[7] Guo, X.J., Guo, Y.Q. and Shum, K.P. (2010) Super rpp semigroups. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **41**, 505-533.