Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 117-121
Published Online July 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.44018

Hans汉斯

Normal Families Concerning Exceptional Functions

Shasha Zhang, Caiyuan Ling

Faculty of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan
Email: amushasha@163.com

Received: May 27th, 2014; revised: Jun. 22nd, 2014; accepted: Jul. 1st, 2014

Abstract

In this paper, we discussed the normality of families of meromorphic functions with restricted conditions on the multiplicity of their zeros and poles, and proved a normal criterion related to the exceptional function of $f^{(k)}(z)-a(z)f^{n}(z)$, which generalized the earlier results related to the exceptional values.

Keywords

Meromorphic Function, Normal Family, Exceptional Function

一类涉及例外函数的正规定则

张莎莎，凌才原

湖北大学数学与统计学学院，武汉
Email: amushasha@163.com

收稿日期：2014年5月27日；修回日期：2014年6月22日；录用日期：2014年7月1日

摘　要

本文讨论亚纯函数族的正规性，在亚纯函数的零点和极点重级满足一定的限制条件下，证明了一类涉及

$f^{(k)}(z)-a(z)f^{n}(z)$ 的例外函数的亚纯函数族正规定则，推广了之前涉及例外值的正规定则。

关键词

亚纯函数，正规族，例外函数

1. 引言

设 D 是复平面内的一个区域，F 是 D 上的一族亚纯函数。如果对于族 F 中的任意函数列 $\{f_n\}$ 都存在一个子列 $\{f_{n_k}\}$ 在内按球面距离内闭一致收敛于一个亚纯函数或 ∞，则称 F 在 D 内正规[1]。

Bloch 曾经给出一个猜想，对于亚纯函数值分布的每个 Picard 型定理，都存在一个正规准则与之对应。尽管总体来看这个原理并不总成立，但是人们仍可以从 Picard 型定理出发来考虑相应的正规准则。

1959 年，Hayman 在[2]中证明了关于值分布中涉及导数的例外值的一个著名结果。

定理 1.1[2] 设 f 是复平面 C 上的一个亚纯函数，$n\ge 5$ 是一个正整数，$a\ne 0,\ b$ 是两个有穷复数，若 $f'-af^{n}\ne b$，则 f 是一个常数。

对应于该值分布理论，Hayman 在[3]中猜想存在相应于定理 1.1 的正规准则。

Hayman 猜想[3]：设 $n\ge 3$ 是一个正整数，$a\ne 0,\ b$ 是两个有穷复数，F 是复平面中区域 D 上的一族亚纯函数．若对于任意 $f\in F,\ f^{(k)}-af^{n}\ne b$，则 F 在 D 内正规。

李松鹰[4]，李先进[5]分别证明了 $n\ge 5$ 时 Hayman 猜想是成立的；庞学诚[6]证明了 $n=4$ 时猜想成立；1995 年，陈怀惠，方明亮[7]证明了 $n=3$ 时 Hayman 猜想也成立，完全解决了 Hayman 猜想。

定理 1.2[7] 设 $n\ge 3$ 是一个正整数，$a\ne 0,\ b$ 是两个有穷复数，F 是复平面中区域 D 上的一族亚纯函数．若对于任意 $f\in F,\ f^{(k)}-af^{n}\ne b$，则 F 在 D 内正规。

陈怀惠，方明亮也在[7]中给出例子说明了，对于亚纯函数族，当 $n=2$ 时 Hayman 猜想不成立。

随后，陈怀惠在[8]中证明了当 F 是全纯函数族时，对于 $n=2$ 及把导数 f' 替换为 k 阶导数 $f^{(k)}$ 时定理 1.2 仍成立。

定理 1.3[8] 设 $n\ge 2$ 是一个正整数，$a\ne 0$，b 是两个有穷复数，F 是复平面中区域 D 上的一族全纯函数。若对于任意 $f\in F,\ f^{(k)}-af^{n}\ne b$，则 F 在 D 内正规。

对于亚纯函数族，把 Hayman 猜想中的导数 f' 替换为 k 阶导数 $f^{(k)}$ 时，庞学诚[6]和 W. Schwick[9]证明了如下结果：

定理 1.4 设 n,k 是正整数，$n\ge k+4,\ a\ne 0,\ b$ 是两个有穷复数，F 是复平面中区域 D 上的一族亚纯函数。若对于任意 $f\in F,\ f^{(k)}-af^{n}\ne b$，则 F 在 D 内正规。

陈怀惠，顾永兴[10]对亚纯函数极点的阶数加上适当的限制条件改进了上面的定理。

定理 1.5 设 $a\ne 0$，b 是两个有穷复数，F 是复平面中区域 D 上的一族亚纯函数，若对于任意 $f\in F$ 极点的阶数至少为 $l=k+2,\ f^{(k)}-af^{3}\ne b$，则 F 在 D 内正规。

最近，徐焱[11]对亚纯函数的极点和零点阶数加上适当限制条件，改进和推广了上述结果，证明了：

定理 1.6 设 $n(\ge 2),\ k,\ l,\ t$ 是四个正整数，满足 $n-1>\dfrac{k+1}{l}+\dfrac{1}{t},\ a\ne 0,\ b$ 是两个有穷复数，F 是复平面中区域 D 上的一族亚纯函数，若对于任意 $f\in F$ 极点和零点的阶数至少分别为 l 和 t，且 $f^{(k)}-af^{n}\ne b$，则 F 在 D 内正规。

定理 1.6 是对定理 1.3，定理 1.4，定理 1.5 的推广和改进。

以上主要考虑的是函数族中的函数及其导数不取固定常数的亚纯函数族的正规性，我们很自然地考虑了涉及到函数族中的函数及其导数不取固定全纯函数的亚纯函数族的正规性。对应于定理 1.6 中涉及例外值的正规定则，本文研究了把定理 1.6 中的例外值换为例外函数的正规定则，证明了如下两个正规定则：

定理 1.7 设 1) n, k, l, t 是四个正整数，其中，$n \ge 2$, $n-1 > \frac{k+1}{l} + \frac{1}{t}$；

2) $a(z)$, $h(z)$ 是 D 内任意两个全纯函数，$a(z) \ne 0$；

3) F 是复平面中区域 D 上的一族亚纯函数，F 中每个函数的极点和零点重数至少分别为 l 和 t，且满足 $f^{(k)}(z) - a(z) f^n(z) \ne h(z)$, $\forall z \in D$, $f \in F$，则函数族 F 在区域 D 内正规。

特别地，当 $a(z) \equiv a$, $h(z) \equiv b$ $\forall z \in D$ 时，定理 1.7 即为定理 1.6，由此可见，我们的结论推广了已有结论定理 1.6。

定理 1.8 设 1) n, k, l, t 是四个正整数，其中，$n \ge 2$, $n-1 > \frac{k+1}{l} + \frac{1}{t}$；

2) $\{a_j(z)\}$, $\{h_j(z)\}$ 是 D 内任意两列全纯函数，$\{a_j(z)\}$, $\{h_j(z)\}$ 在 D 上分别内闭一致收敛于全纯函数 $a(z)$, $h(z)$，其中 $a(z) \ne 0$；

3) $F = \{f_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ 是复平面中区域 D 上的一列亚纯函数，F 中每个函数的极点和零点重数至少分别为 l 和 t，$f_j^{(k)}(z) - a_j(z) f_j^n(z) \ne h_j(z)$, $\forall z \in D$，则函数族 F 在区域 D 内正规。

特别地，当 $a_j(z) \equiv a(z)$, $a_j(z) \equiv a(z)$, $j = 1, 2, \cdots$ 时，适当调整定理 1.8 的证明即得定理 1.7。

2. 主要引理

引理 2.1[12] 设 F 是单内圆内的一族亚纯函数，F 中每个函数的零点的重级至少是 k，并且

1) 若 $f(z) = 0$，必有 $\left|f^{(k)}(z)\right| \le A$；

2) F 在单位圆内不正规；

则对于每一个 $0 \le \alpha \le k$，存在

a) 实数 r, $0 < r < 1$；

b) 点列 z_n, $|z_n| < r$；

c) 函数列 $\{f_n\} \subset F$；

d) 正数列 $\rho_n \to 0+$。

使得函数列 $\left\{\frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^{\alpha}}\right\}$ 在复平面上按球距内闭一致收敛于一个非常值亚纯函数 $g(\xi)$，并且 $g(\xi)$ 的零点重级至少为 k。

徐焱在[11]中证明了下列关于亚纯函数值分布理论的结论：

引理 2.2 设 $n(\ge 2)$, k, l, t 是四个正整数，满足 $n-1 > \frac{k+1}{l} + \frac{1}{t}$, $a \ne 0$, b 是两个有穷复数，f 是定义在复平面 C 上的亚纯函数，f 的极点和零点的阶数至少分别为 l 和 t，若 $f^{(k)} - af^n \ne b$，则在复平面 C 上 f 恒为常值。

引理 2.3 设 $n(\ge 2)$, k, l, t 是四个正整数，满足 $n-1 > \frac{k+1}{l} + \frac{1}{t}$, $a \ne 0$, b 是两个有穷复数，f 是定义在复平面 C 上的亚纯函数，f 的极点和零点的阶数至少分别为 l 和 t，若 $f^{(k)} - af^n \equiv b$，则在复平面 C 上 f 恒为常值。

注：引理 2.2，引理 2.3 及详细证明见参考文献[11]的引理 1，引理 2。

3. 主要定理的证明

定理 1.8 的证明：

反证法，假设 F 在区域 D 内不正规。

由正规族的局部性，不妨设 F 在点 $z_0 \in D$ 处不正规。

应用引理 2.1 于 $\alpha = \dfrac{k}{n-1} < l$ 及 $\dfrac{1}{f(z)}$，$\forall f \in F$ 所构成的亚纯函数族，可知存在 $\rho_j \to 0+$，$z_j \to z_0$，及 F 的子列，仍记为 $\{f_j\}$，满足：

记

$$g_j(\xi) = \rho_j^{\frac{k}{n-1}} f_j\left(z_j + \rho_j \xi\right), \tag{1}$$

则 $g_j(\xi)$ 在复平面上内闭一致收敛于非常值亚纯函数 $g(\xi)$，且由 $\forall f \in F$ 的极点阶数至少为 l 知 $g(\xi)$ 极点阶数也至少为 l。

由于 $a(z_0) \neq 0$，$g(\xi)$ 是非常值亚纯函数，由引理 2.2 和引理 2.3 知，必存在 $\xi_0 \in C$，使得

$$g^{(k)}(\xi_0) - a(z_0) g^n(\xi_0) = 0, \tag{2}$$

从而 ξ_0 不是非常值亚纯函数 $g(\xi)$ 极点。

事实上，若 ξ_0 是 $g(\xi)$ 极点，设其为 l' 阶极点，则由(2)式知，$k + l' = nl'$，从而 $l' = \dfrac{k}{n-1} < l$，即 ξ_0 是 $g(\xi)$ 的阶数小于 l 的极点，与 $g(\xi)$ 极点阶数至少为 l 矛盾。

记

$$\varphi(\xi) = g^{(k)}(\xi) - a(z_0) g^n(\xi), \tag{3}$$

$$\varphi(\xi) = g_j^{(k)}(\xi) - a_j\left(z_j + \rho_j \xi\right) g_j^n(\xi) - \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} h_j\left(z_j + \rho_j \xi\right), \tag{4}$$

由于，$\{a_j(z)\}$，$\{h_j(z)\}$ 在 D 上分别内闭一致收敛于全纯函数 $a(z)$，$h(z)$，且 $z_j + \rho_j \xi$ 在复平面 C 上内闭一致收敛于 z_0 点，故 $\{a_j(z_j + \rho_j \xi)\}$，$\{h_j(z_j + \rho_j \xi)\}$ 在复平面 C 上分别内闭一致收敛于 $a(z_0)$，$h(z_0)$。

另外，当 $j \to +\infty$ 时 $\rho_j^{\frac{nk}{n-1}} \to 0$，$g_j(\xi)$ 在复平面上内闭一致收敛于 $g(\xi)$，从而 $\varphi_j(\xi)$ 在复平面 C 上内闭一致收敛于 $\varphi(\xi)$。

由 ξ_0 不是 $g(\xi)$ 的极点知，存在 ξ_0 的某个邻域 V，使得 $\varphi(\xi)$ 在 V 内全纯，且 $\varphi(\xi_0) = 0$. 由全纯函数零点的孤立性知，$\varphi(z)$ 在 V 内的取值只可能是下列的情形 1 或者情形 2。

情形 1：若 $\varphi(\xi)$ 在 V 内只有唯一零点 ξ_0。

把(1)代入(4)可得

$$\varphi_j(\xi) = \rho_j^{\frac{nk}{n-1}}\left[f_j^{(k)}\left(z_j + \rho_j \xi\right) - a_j f_j^n\left(z_j + \rho_j \xi\right) - h_j\left(z_j + \rho_j \xi\right)\right], \tag{5}$$

由 $\varphi_j(\xi)$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上内闭一致收敛于 $\varphi(\xi)$ 知，当 j 充分大时有 $\varphi_j(\xi)$ 在 V 内全纯，且由 *Hurwitz* 定理知存在 $\xi_j \in V$，使得 $\varphi_j(\xi_j) = 0$，即

$$f_j^{(k)}\left(z_j + \rho_j \xi_j\right) - a_j\left(z_j + \rho_j \xi_j\right) f_j^n\left(z_j + \rho_j \xi_j\right) = h_j\left(z_j + \rho_j \xi_j\right),$$

这与定理条件 $f_j^{(k)}(z)-a_j(z)f_j^n(z)\neq h_j(z)$ 矛盾。

情形 2： 若 $\varphi(\xi)$ 在 V 内恒为 0。

由 $\varphi(\xi)$ 是亚纯函数知 $\varphi(\xi)\equiv 0$，即 $g^{(k)}(\xi)-ag^n(\xi)\equiv 0$，由引理 2.2 知 $g(\xi)\equiv$ 常数。

这与 $g(\xi)$ 是非常值亚纯函数矛盾。

综上，假设不成立，即 F 在 D 内正规。

定理 1.7 的证明： 在上述定理证明中，令 $a_j(z)\equiv a(z)$，$h_j(z)\equiv h(z)$，$j=1,2,\cdots$ 时，把上述证明过程中的

$$\varphi_j(\xi)=g_j^{(k)}(\xi)-a_j(z_j+\rho_j\xi)g_j^{\,n}(\xi)-\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}h_j(z_j+\rho_j\xi)$$

换为

$$\varphi_j(\xi)=g_j^{(k)}(\xi)-a(z_j+\rho_j\xi)g_j^{\,n}(\xi)-\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}h(z_j+\rho_j\xi),$$

其中 $\rho_j\to 0+$，$z_j\to z_0$ 及 F 的子列 $\{f_j\}$ 同样由引理 2.1 得出。

重复上述证明过程，即得定理 1.7。

致　谢

感谢评审专家对论文提出的宝贵意见。

基金项目

湖北省教育厅项目(Q20141009)资助。

参考文献 (References)

[1] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Spring-Verlag, Berlin.

[2] Hayman, W.K. (1959) Picard values of meromorphic functions and their derivatives. *Annals of Mathematics*, **1**, 9-42.

[3] Hayman, W.K. (1967) Research problems in function theory. Athlone Press, London.

[4] 李松鹰 (1984) 一类函数的正规定则. *福建师范大学学报：自然科学版*, **98**, 385-393.

[5] 李先进 (1985) 关于正规族的 Hayman 猜想的证明. *中国科学 A 辑*, **28**, 24-31.

[6] 庞学诚 (1988) 微分多项式的正规定则. *科学通报*, **33**, 1690-1693.

[7] 陈怀惠, 方明亮 (1995) 关于 $f^n f'$ 的值分布. *中国科学 A 辑*, **38**, 121-127.

[8] Chen, H.H. and Hua, X.H. (1995) Normal families of holomorphic functions. *Journal of the Australian Mathematical Society Series A*, **59**, 112-117.

[9] Schwick, W. (1989) Normality criteria for families of meromorphic functions. *Journal d'Analyse Mathematique*, **52**, 241-289.

[10] 陈怀惠, 顾永兴 (1993) Marty 定则的改进及其应用. *中国科学 A 辑*, **6**, 674-681.

[11] Yan, X. (2001) Normal families of meromorphic functions. *Journal of Mathematics*, **4**, 381-386.

[12] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮 (2007) 正规族理论及其应用. 科学出版社, 北京.