Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 21-27
Published Online March 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.52004

Hans汉斯

Multiplicity of Positive Solutions for Kirchhoff Type of Equation with Hardy Singular Item

Hong Rong, Chunyu Lei, Hongmin Suo*

School of Science, Guizhou Minzu University, Guiyang Guizhou
Email: 402453552@qq.com, *gzmysxx88@sina.com

Received: Feb. 13th, 2015; accepted: Feb. 25th, 2015; published: Mar. 2nd, 2015

Abstract

In this paper, using the local minimum theorem and mountain pass lemma of variational methods, we study the Kirchhoff equation with Hardy singular term, and obtain multiplicity results of solutions for this equation near resonance with principal eigenvalue.

Keywords

Kirchhoff Type of Equation, Hardy Singular Term, Variational Methods, Near Resonance

具有Hardy奇异项的近共振Kirchhoff方程正解的多重性

容　红，雷春雨，索洪敏*

贵州民族大学理学院，贵州　贵阳
Email: 402453552@qq.com, *gzmysxx88@sina.com

收稿日期：2015年2月13日；录用日期：2015年2月25日；发布日期：2015年3月2日

*通讯作者。

摘　要

本文利用变分法中的局部极小定理和山路引理，研究了具有 Hardy 奇异项的 Kirchhoff 方程，从而得到了具有 Hardy 奇异项的 Kirchhoff 方程在主特征值处近共振问题解的多重性结果。

关键词

Kirchhoff方程，Hardy奇异项，变分法，近共振

1. 引言

本文考虑下面的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -\left(1+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u-\mu\dfrac{u}{|x|^2}=\lambda u+|u|^{p-2}u, & x\in\Omega; \\ u=0 & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset R^3$ 是具有光滑边界的有界开区域，$0\in\Omega$，b，$\lambda>0$ 是实参数，$4<p<6$，$0\le\mu<\dfrac{1}{4}$。

在方程(1)中，当 $\mu\dfrac{u}{|x|^2}+\lambda u+u^{p-1}=f(x,u)$ 时，是通常具 Dirichlet 边值条件的 Kirchoff 型方程。

Ma et al. [1]运用变分法得到了方程的正解。Zou [2]使用局部极小原理和喷泉定理得到了方程非平凡解的存在性和多重性。特别地，Chen [3]考虑下面的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -\left(1+b\int_{R^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+u=v(x)|u|^{p-2}u+\lambda k(x)u, & \text{in } R^3, \\ u>0, & \text{in } R^3,\ u(x)\to 0 \text{ as } |x|\to\infty. \end{cases}$$

当参数 $\lambda\in(0,\lambda_1+\delta)$ 充分小时，得到上面方程至少存在三个正解。而对含 Hardy 奇异项的 Kirchhoff 方程目前还没有人研究。

方程(1)对应的特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u-\mu\dfrac{u}{|x|^2}=\lambda u, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

其中，第一特征值 λ_1 表示为

$$\lambda_1=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^2-\mu\dfrac{u^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x}{\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x} \tag{3}$$

$\phi_1>0$ 是对应于 λ_1 的特征函数。$H_0^1(\Omega)$ 是 Sobolev 空间，它的范数是 $\|u\|=\left(\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^2-\mu\dfrac{u^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$，

内积为 $\langle u,v\rangle=\int_\Omega\left(\nabla u\nabla v-\mu\frac{u^2}{|x|^2}v\right)\mathrm{d}x$； $L^p(\Omega)$ 的范数是 $|\cdot|_p$； $S_R=\left\{u\in H_0^1(\Omega):\|u\|=R\right\}$，$B_R=\left\{u\in H_0^1(\Omega):\|u\|\le R\right\}$； S_μ 是最佳 Sobolev 嵌入常数，即

$$S_\mu=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_{R^3}\left(|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x}{\left(\int_{R^3}u^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}} \tag{4}$$

方程(1)的能量泛函表示为

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x,\quad \forall u\in H_0^1(\Omega)。$$

通常，对任意的 $v\in H_0^1(\Omega)$，方程

$$\left(1+b\|u\|^2\right)\int_\Omega\left(\nabla u\nabla v-\mu\frac{u}{|x|^2}v\right)\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega uv\mathrm{d}x-\int_\Omega|u|^{p-2}uv\mathrm{d}x=0.$$

成立时，则称 u 是(1)的解。

2. 预备知识

引理 2.1 如果 $4<p<6$，存在 $\delta>0$ 充分小，则对任意的 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta)$，存在 $R,\ \rho>0$ 有

$$I_\delta(u)\big|_{u\in S_R}\ge\rho>0,\quad \inf_{u\in B_R}I_\lambda(u)<0 \tag{5}$$

证明：由 Hölder 不等式和(4)式，有

$$\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\le|u|_6^p|\Omega|^{\frac{6-p}{6}}\le|\Omega|^{\frac{6-p}{6}}S_\mu^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p。 \tag{6}$$

由于 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta)$ 和 $\delta>0$ 充分小时，有 $\left|\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^2\right|<\frac{b}{8}\|u\|^4$，可得

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^2>-\frac{b}{8}\|u\|^4 \tag{7}$$

所以，由(3)，(6)和(7)，有

$$\begin{aligned}I_\lambda(u)&=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\\&\ge\|u\|^4\left(\frac{b}{8}-\frac{1}{p}|\Omega|^{\frac{6-p}{6}}S_\mu^{-\frac{p}{2}}\|u\|^{p-4}\right)\end{aligned}$$

设 $\frac{b}{8}=A$，$\frac{1}{p}|\Omega|^{\frac{6-p}{6}}S_\mu^{-\frac{p}{2}}=B$，$A-B\|u\|^{p-4}=\frac{A}{2}$ 有 $B\|u\|^{p-4}=\frac{A}{2}$，$\|u\|=\left(\frac{A}{2B}\right)^{\frac{1}{p-4}}=\left(\frac{\frac{b}{8}}{\frac{2}{p}|\Omega|^{\frac{6-p}{6}}S_\mu^{-\frac{p}{2}}}\right)^{\frac{1}{p-4}}$。

因此，存在常数 $R=\left(\dfrac{\frac{b}{8}}{\frac{2}{p}|\Omega|^{\frac{6-p}{6}}S_{\mu}^{-\frac{p}{2}}}\right)^{\frac{1}{p-4}}>0$， $I_{\lambda}(u)\geq\|R\|^{4}\left(A-B\|R\|^{p-4}\right)$。所以，存在常数 ρ，对任意 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta)$，有 $I_{\lambda}(u)\big|_{u\in S_R}\geq\rho$。

对给定的 R，选择 $u\in B_R$ 且 $u\neq0$，证明不等式

$$\inf_{u\in B_R} I_{\lambda}(u)<0 \tag{8}$$

即就是对任意 $t>0$ 充分小，有 $I_{\lambda}(t\phi_1)<0$。事实上，由(2)，有 $\phi_1\in H_0^1(\Omega)$，也可得

$$I_{\lambda}(t\phi_1)=\frac{t^2}{2}\|\phi_1\|^2+\frac{bt^4}{4}\|\phi_1\|^4-\frac{\lambda t^2}{2}\int_{\Omega}\phi_1^2\mathrm{d}x-\frac{t^p}{p}\int_{\Omega}|\phi_1|^p\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

另一方面，方程 $-\Delta\phi_1-\mu\dfrac{\phi_1}{|x|^2}=\lambda_1\phi_1$ 两边同乘 ϕ_1,且在 Ω 上两边同时积分，可得

$$\int_{\Omega}\left(|\nabla\phi_1|^2-\mu\frac{\phi_1^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\lambda_1\phi_1^2\mathrm{d}x \tag{10}$$

对任意的 $\lambda>\lambda_1$，把(10)代入(9)，可得

$$\begin{aligned}I_{\lambda}(t\phi_1)&=\frac{t^2}{2}(\lambda_1-\lambda)\int_{\Omega}\phi_1^2\mathrm{d}x+\frac{bt^4}{4}\|\phi_1\|^4-\frac{t^p}{p}\int_{\Omega}|\phi_1|^p\mathrm{d}x\\&\leq\frac{t^2}{2}(\lambda_1-\lambda)\int_{\Omega}\phi_1^2\mathrm{d}x+\frac{bt^4}{4}\|\phi_1\|^4\\&\leq-Ct^2+C_1t^4\end{aligned}$$

这里 $C=-\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda)\int_{\Omega}\phi_1^2\mathrm{d}x$， $C_1=\frac{b}{4}\|\phi_1\|^4$。对所有的 $t>0$ 充分小时， $I_{\lambda}(t\phi_1)<0$。因此，对给定的 R 且 $\|\phi_1\|$ 充分小时，对所有的 $\phi_1\neq0$，有 $\inf\limits_{u\in B_R}I_{\lambda}(u)<0$，证毕。

引理 2.2 假设 $4<p<6$，存在正常数 δ， $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta)$， R， $\rho>0$ 泛函 I_{λ} 满足如下条件：

1) $I_{\lambda}(u)\geq\rho>0$ 如果 $u\in S_R$；

2) 存在 $u_1\in H_0^1(\Omega)$，当 $\|u_1\|>R$ 时， $I_{\lambda}(u_1)<\rho$；

证明：

1) 由引理 2.1，可知引理 2.2 的条件(1)成立，证毕。

2) 对任意的 $u\in H_0^1(\Omega)$， $u\neq0$ 且 $t>0$，有

$$\begin{aligned}I_{\lambda}(tu)&=\frac{1}{2}t^2\|u\|^2+\frac{b}{4}t^4\|u\|^4-\frac{\lambda}{2}t^2\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}t^p\int_{\Omega}|u|^p\,\mathrm{d}x\\&\leq\frac{1}{2}t^2\|u\|^2+\frac{b}{4}t^4\|u\|^4-\frac{1}{p}t^p\int_{\Omega}|u|^p\,\mathrm{d}x\\&\to-\infty\end{aligned}$$

当 $t\to+\infty$。因此，存在 R 使得 $\|u_1\|>R$ 时，有 $I_{\lambda}(u_1)<\rho$，证毕。

引理 2.3 假设 $4<p<6$， $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta)$，则对任意的 $c\in R$，泛函 I_{λ} 满足 (PS_c) 条件。

证明：当 $n\to\infty$ 时， $\{v_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 使得

$$I_\lambda(v_n)\to c,\quad I'_\lambda(v_n)\to 0 \tag{11}$$

要证 $\{v_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是有界的。假设当 $n\to\infty$，有 $\|v_n\|\to\infty$。由(11)和(3)可知

$$\begin{aligned}1+c+o(1)\|v_n\|&=I_\lambda(v_n)-\frac{1}{p}\langle I'_\lambda(v_n),v_n\rangle\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|v_n\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)b\|v_n\|^4-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\lambda\int_\Omega v_n^2\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|v_n\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)b\|v_n\|^4\end{aligned}$$

上式得出矛盾。因此 $\{v_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是有界的，即存在 $\{v_n\}$ 的一个子序列，仍记为 $\{v_n\}$，且存在 $v_*\in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$v_n\text{ 在 }H_0^1(\Omega)\text{ 中弱收敛于 }v_*\text{，在 }L^p(\Omega)\text{ 中强收敛于 }v_*\text{，}(4<p<6) \tag{12}$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n\|=m$， m 是一个正常数。由(11)，(12)， $\lim\limits_{n\to\infty}\langle I'_\lambda(v_n),v_*\rangle=0$，可得

$$0=\left(1+b\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2\right)\int_\Omega\left(\nabla v_*\nabla\phi-\mu\frac{v_*}{|x|^2}\phi\right)\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega v_*\phi\mathrm{d}x-\int_\Omega|v_*|^{p-2}v_*\phi\mathrm{d}x \tag{13}$$

特别，对任意 $\phi\in H_0^1(\Omega)$，在(13)中选 $\phi=v_*$，有

$$0=\left(1+b\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2\right)\|v_*\|^2-\lambda\int_\Omega v_*^2\mathrm{d}x-\int_\Omega|v_*|^p\,\mathrm{d}x$$

上式两边当 $n\to\infty$ 取极限，可得

$$0=\left(1+bm^2\right)\|v_*\|^2-\lambda\int_\Omega v_*^2\mathrm{d}x-\int_\Omega|v_*|^p\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

另一方面，当 n 充分大时，由(11)有，

$$0=\langle I'_\lambda(v_n),v_n\rangle=\left(1+b\|v_n\|^2\right)\|v_n\|^2-\lambda\int_\Omega v_n^2\mathrm{d}x-\int_\Omega|v_n|^p\,\mathrm{d}x$$

上式两边当 $n\to\infty$ 取极限时，可得

$$0=\left(1+bm^2\right)m^2-\lambda\int_\Omega v_*^2\mathrm{d}x-\int_\Omega|v_*|^p\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

因此，由上面不等式(14)和(15)，可知 $m=\|v_*\|$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n\|=v_*$。则证明了当 $n\to\infty$ 时， v_n 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有 $v_n\to v_*$。综上所述，可知 I_λ 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件，证毕。

3. 主要结果及其证明

定理 3.1 假设 $b>0$，$4<p<6$。则存在 $\delta>0$ 充分小，使得对任意的 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta)$，方程(1)在 $H_0^1(\Omega)$ 中至少有两个不同的正解。

证明：当 $4<p<6$，则对任意的 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta)$，方程(1)有一个正解 $u_0\in H_0^1(\Omega)$ 满足 $I_\lambda(u_0)<0$。事实上，由于 B_R 是一个闭球，这里定义

$$\inf_{u\in B_R}I_\lambda(u)=c_1 \tag{16}$$

由引理 2.1，有 $c_1<0$。对于给定的 n，由(16)，存在 $w_n\ge 0$ 且 $\|w_n\|\le R$ 使得

$$c_1\le I_\lambda(w_n)<c_1+\frac{1}{n}$$

因此，根据 Ekeland 变分原理[4]，存在 w_n' 且 $\|w_n'\| \le R$ 满足

$$c_1 \le I_\lambda(w_n') < I_\lambda(w_n) < c_1 + \frac{1}{n}$$

和

$$\|w_n' - w_n\| \le \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \|I_\lambda'(w_n')\| \le \frac{1}{n} \tag{17}$$

当 $n \to \infty$ 时，序列 $\{w_n'\}$ 满足 $I_\lambda(w_n') \to c_1$，$I_\lambda'(w_n') \to 0$。再由引理 2.1 可知在 $H_0^1(\Omega)$ 中，$w \in B_R$ 是泛函 I_λ 的一个局部极小解且 $w_n' \to w$。因此，由(17)，有 $w_n \to w$，又因 $w_n \ge 0$ 可知，当 $I_\lambda(w) < 0$ 时，在 Ω 中有 $w \ge 0$ 几乎处处成立，且是方程(1)的解。由强极大值原理可知：在 Ω 中，有 $w > 0$，这里可选 $u_0 = w$ 即可。

另一方面，当 $4 < p < 6$，则对 $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$，方程(1)有一个正解 $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ 满足 $I_\lambda(u_2) > \rho$。

事实上，由于 $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$，则由引理 2.2 和引理 2.3 可知，$I_\lambda$ 满足山路引理[5]的几何结构，c_2 是 I_λ 的一个临界值且 $c_2 > 0$。因此，存在一个序列 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$，使得

$$I_\lambda(v_n) \to c_2 > \rho, \quad I_\lambda'(v_n) \to 0 \tag{18}$$

其中 $c_2 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t))$，且

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\right\}。$$

由引理 2.2，可得

$$0 < \rho < c_2 \le \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(tu_1) < c_2 + \frac{1}{n} \tag{19}$$

由引理 2.3，可知 $\{v_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ 有一个收敛的子序列，仍记为 $\{v_n\}$，假设当 $n \to \infty$ 时，v_n 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有 $v_n \to u_2$。因此由(18)和(19)有

$$I_\lambda(u_2) = \lim_{n \to \infty} I_\lambda(v_n) = c_2 > \rho > 0 \tag{20}$$

(20)式表明 $u_2 \ne 0$。再由 I_λ' 的连续性，可得 u_2 是(1)的一个解，即

$$\left(1 + b\|u_2\|^2\right)\int_\Omega \left(\nabla u_2 \nabla \varphi - \mu \frac{u_2}{|x|^2}\varphi\right) dx - \lambda \int_\Omega u_2 \varphi dx - \int_\Omega |u_2|^{p-2} u_2 \varphi dx = 0 \tag{21}$$

对任意 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$。在(21)中取测试函数 $\varphi = u_2^- = \max\{-u_2, 0\}$，有 $\|u_2^-\| = 0$，因此，$u_2 \ge 0$ 且 $u_2 \ne 0$。根据强极大值原理可知，u_2 是(1)的一个正解，证毕。

基金项目

贵州省科学厅自然科学基金资助项目([2013]2141 号)；黔教科研发[2013]405 号；2014 年贵州民族大学科研校级课题。

参考文献 (References)

[1] Ma, T.F. and Munoz Rivera, J.E. (2003) Positive solutions for a nonlinear elliptic transmission problem. *Applied Mathematics Letters*, **16**, 243-248.

[2] He, X. and Zou, W. (2010) Multiplicity of solutions for a class of Kirchhoff type problems. *Acta Mathematicae Appllicatae Sinica*, **26**, 387-394.

[3] Chen, J.Q. (2014) Multiple positive solutions to a class of Kirchhoff equation on with indefinite Nonlinearity. *Nonlinear Analysis*, **96**, 134-145.

[4] Aubin, T. and Ekeland, I. (1984) Applied nonlinear analysis. Wiley, New York.

[5] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P.H. (1973) Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, **14**, 349-381.