Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 105-110
Published Online May 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.53017

A Sufficient Condition of a Class of Two Points Heteroclinic Loop Having Horseshoe

Yuerang Gao[1,2], Xue Zhao[1,2], Benyan Ding[1,2]
[1]Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan Shandong
[2]Department of Mathematics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: yueranggao@sina.com

Received: May 2nd, 2015; accepted: May 18th, 2015; published: May 21st, 2015

Abstract

In this paper, for a class of three-dimensional autonomous vector field which has heteroclinic loop containing two hyperbolic fixed points, a saddle point and a saddle-focus point, we structure the Poincare map by choosing appropriate local coordinate system and using the flow of linearized vector field inside the small neighborhood of the two fixed points and present a sufficient condition of the Poincare map possessing a countable infinite horseshoes.

Keywords

Heteroclinic Loop, Poincare Map, Local Coordinate System, Horseshoe

一类两点异宿环中含马蹄的充分条件

高岳让[1,2]，赵　雪[1,2]，丁本艳[1,2]
[1]山东师范大学数学系，山东 济南
[2]临沂大学理学院，山东 临沂
Email: yueranggao@sina.com

收稿日期：2015年5月2日；录用日期：2015年5月18日；发布日期：2015年5月21日

摘　要

本文对一类含有鞍点、鞍焦点的两点异宿环的三维自治向量场，通过选取适当的局部坐标系并利用两奇

点的小邻域内线性化向量场的流构造了庞加莱映射，并给出了庞加莱映射含有可数无穷多个马蹄的一个充分条件。

关键词

异宿环，庞加莱映射，局部坐标系，马蹄

1. 引言

文献[1]对三维自治向量场中鞍点的同宿轨和鞍焦点的同宿轨在不动点附近的流的动力学行为进行了讨论，给出了在轨道邻域内定义的庞加莱映射产生马蹄的充分条件。由文献[2]可知，对于三维系统

$$\dot{x} = \rho x - \omega y + P(x,y,z),$$
$$\dot{y} = \omega x + \rho y + Q(x,y,z),$$
$$\dot{z} = \lambda z + H(x,y,z),$$

其中 $P,Q,H \in C^2$，$P,Q,H = O(2)$，$O(2)$ 表示在 $O(0,0,0)$ 处的泰勒展式首项不低于 2 次，若假定下面两条件 1) 此系统有一同宿于 O 的轨道 Γ，2) $\lambda > -\rho > 0$ 成立，可证得在 Γ 邻域内适当定义的庞加莱映射包含可数无穷多个马蹄。

在同宿轨道研究的基础上，本文就一类含有鞍点和鞍焦点的两点异宿环问题，通过选取适当的局部坐标系定义了庞加莱映射 P，并给出了 P 包含可数无穷多个马蹄的一个充分条件。

2. 预备知识

令 H_i，$i = 1,\cdots,N$，表示不相交的 μ_h-水平带集合；V_i，$i = 1,\cdots,N$ 表示不相交的 μ_v-垂直带的集合；f 是 $H_i \to V_i$ 的同胚映射。记

$$f(H_i) \cap H_j \equiv V_{ji},\quad H_i \cap f^{-1}(H_j) \equiv H_{ij} = f^{-1}(V_{ji}),\quad H = \bigcup_{i,j\in S} H_{ij},\quad V = \bigcup_{i,j\in S} V_{ji},\quad S = \{1,\cdots,N\}\ (N \ge 2),$$

显然有 $f(H) = V$。对 $\forall z_0 \in H \cup V$，记 $S_{z_0}^s$ 为在 z_0 处稳定的扇形束；$S_{z_0}^u$ 为在 z_0 处不稳定的扇形束。令 $S_H^s = \bigcup_{z_0\in H} S_{z_0}^s$，$S_V^s = \bigcup_{z_0\in V} S_{z_0}^s$，$S_H^u = \bigcup_{z_0\in H} S_{z_0}^u$，$S_V^u = \bigcup_{z_0\in V} S_{z_0}^u$，称 S_H^s 为 H 上的稳定扇形束，S_V^s 为 V 上的稳定扇形束，S_H^u 为 H 上的不稳定扇形束，S_V^u 为 V 上的不稳定扇形束。

下面给出两个假设：

假设 1 [1]：$0 \le \mu_v \mu_h < 1$ 且 f 是 $H_i \to V_i$ 的同胚映射 $(f(H_i) = V_i)$，$i = 1,\cdots,N$。并且 H_i 的水平边界(垂直边界)映射到 V_i 的水平边界(垂直边界)。

假设 2 [1]：$Df(S_H^u) \subset S_V^u$ 并且 $Df^{-1}(S_V^s) \subset S_H^s$。

另外，如果 $(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in S_{z_0}^u$，$Df(z_0)(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \equiv (\xi_{f(z_0)}, \eta_{f(z_0)}) \in S_{f(z_0)}^u$，则有 $|\eta_{f(z_0)}| \ge \left(\frac{1}{u}\right)|\eta_{z_0}|$，其中 $0 < \mu < 1 - \mu_v \mu_h$。

由文献[1]可知，当 f 满足假设 1 和假设 2 时，f 有不变 Cantor 集 Λ，且在 Λ 上拓扑共轭于 N 符号上的全平移。

引理 1 当 k 充分大时，映射 $f^k \circ f^T$ 有不变 Cantor 集，且在其上拓扑共轭于 N 符号的一全平移，其中 $f^k \circ f^T$ 是 $D(f^T) \subset V_0 \to V_0$ 的横截映射，$D(f^T)$ 表示 f^T 的定义域。(证明参见文献 [1]的 Moser’s 定理)

引理 2 $\exists \mu_0 < 0$，使得当 $\mu_0 < \mu < 0$ 时，P 有一不变 Cantor 集，且在其上共轭于二符号上的一全平移。(证明参见文献[1]的定理 27.2.2)

3. 主要结果

在 R^3 内考虑 C^r 自治向量场(其中 r 满足所需阶数)。在 R^3 内取直角坐标系 x-y-z。假设在 x-y 平面上向量场有两个双曲不动点 p_1， p_2。

局部假设：

在 p_1 处，线性化向量场为

$$\dot{x} = \lambda_1 x,$$
$$\dot{y} = \lambda_2 y,$$
$$\dot{z} = \lambda_3 z,$$

其中 $\lambda_1 > 0$， $\lambda_3 < \lambda_2 < 0$。

在 p_2 处，线性化向量场为

$$\dot{x} = \rho x - \omega y,$$
$$\dot{y} = \omega x + \rho y,$$
$$\dot{z} = \lambda z,$$

其中， $\rho < 0$， $\lambda > 0$， $\omega \neq 0$。

全局假设：在 x-y 平面内用 Γ_{12} 表示连接 p_1， p_2 的异宿轨，在 x-y 平面外用 Γ_{21} 表示连接 p_1， p_2 的异宿轨。因此 $\Gamma_{12} \cup \Gamma_{21} \cup \{p_1\} \cup \{p_2\}$ 构成异宿环。下面将通过在异宿环的一领域内构造庞加莱映射 P 证明下面的定理。

定理：当 $\dfrac{\rho\lambda_2}{\lambda\lambda_1} < 1$ 时，庞加莱映射有可数无穷多个马蹄。

证明：证明过程主要分两部分：构造庞加莱映射 P；当 $\dfrac{\rho\lambda_2}{\lambda\lambda_1} < 1$ 时， P 有可数无穷多个马蹄。

首先构造庞加莱映射。主要分为三步：

第一步，选取适当局部坐标系。分别以 p_1、 p_2 为原点建立局部直角坐标系 $x_1 - z_1 - y_1$、 $x_2 - y_2 - z_2$，且都满足右手系。由线性化向量场的形式可知： p_1 为鞍点并且在 p_1 的邻域内线性化向量场的流在 x_1 轴上不稳定，在 y_1 轴上稳定，在 z_1 轴上强稳定； p_2 为鞍焦点且在 p_2 的邻域内线性化向量场的流在 z_2 轴上不稳定，在 x_2-y_2 平面上为稳定焦点[3]。

第二步，构造庞加莱截面。对充分小的 $\varepsilon > 0$，由文献[1]的讨论易知，可取如下四个横截面：

$$\pi_{01} = \left\{ \left(x_1, y_1, z_1\right) \in R^3 \middle| \left|x_1\right| \le \varepsilon, y_1 = \varepsilon, 0 < z_1 \le \varepsilon \right\},$$

$$\pi_{11} = \left\{ \left(x_1, y_1, z_1\right) \in R^3 \middle| x_1 = \varepsilon, 0 < y_1 \le \varepsilon, \left|z_1\right| \le \varepsilon \right\},$$

$$\pi_{02} = \left\{ \left(x_2, y_2, z_2\right) \in R^3 \middle| \varepsilon e^{2\pi\rho\omega} \le x_2 \le \varepsilon, y_2 = 0, 0 < z_2 \le \varepsilon \right\},$$

取 π_{12} 足够大，使得 π_{02} 的像在其内部。

第三步，构造庞加莱映射 $P = P_{11} \circ P_{01} \circ P_{12} \circ P_{02}$： $\pi_{02} \to \pi_{02}$。

由于，在 p_1 处线性化向量场产生的流为

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{\lambda_1 t},$$
$$y(t)=y_0\mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$
$$z(t)=z_0\mathrm{e}^{\lambda_3 t},$$

$\pi_{01}\to\pi_{11}$ 的时间 t 满足：$x_1=x_0\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=\varepsilon$，即 $t=\dfrac{1}{\lambda_1}\ln\dfrac{\varepsilon}{x_1}$。

所以 $\pi_{01}\to\pi_{11}$ 的映射 P_{01} 可近似取作 P_{01}：$\pi_{01}\to\pi_{11}$。

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \varepsilon\\ z_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon\left(\dfrac{\varepsilon}{x_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}\\ z_1\left(\dfrac{\varepsilon}{x_1}\right)^{\lambda_3/\lambda_1}\end{pmatrix}$$

同理，在 p_2 处线性化向量场的流为

$$x(t)=\mathrm{e}^{\rho t}\left(x_0\cos\omega t-y_0\sin\omega t\right),$$
$$y(t)=\mathrm{e}^{\rho t}\left(x_0\sin\omega t+y_0\cos\omega t\right),$$
$$z(t)=z_0\mathrm{e}^{\lambda t},$$

$\pi_{02}\to\pi_{12}$ 需要的时间 t 满足：$z_2=z_0\mathrm{e}^{\lambda t}=\varepsilon$，即 $t=\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{\varepsilon}{z_2}$。

所以 $\pi_{02}\to\pi_{12}$ 的映射可近似取作 P_{02}：$\pi_{02}\to\pi_{12}$。

$$\begin{pmatrix}x_2\\ 0\\ z_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x_2\left(\dfrac{\varepsilon}{z_2}\right)^{\rho/\lambda}\cos\left(\dfrac{\omega}{\lambda}\ln\dfrac{\varepsilon}{z_2}\right)\\ x_2\left(\dfrac{\varepsilon}{z_2}\right)^{\rho/\lambda}\sin\left(\dfrac{\omega}{\lambda}\ln\dfrac{\varepsilon}{z_2}\right)\\ \varepsilon\end{pmatrix}$$

另外，作如下两个仿射：P_{12}，P_{11}。

$$P_{12}:\ \pi_{12}\to\pi_{01}$$

$$\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ \varepsilon\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \varepsilon\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2 & b_2 & 0\\ c_2 & d_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ 0\end{pmatrix}$$

其中，a_1，b_1，c_1，d_1 是常数。注意到 p_1，p_2 附近点的坐标分量间的对应关系为 $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x_2\\ z_2\\ y_2\end{pmatrix}$，并且在 π_{01} 上 $y_1=\varepsilon$。所以，在第一个仿射中的线性部分第三行全为零。在 π_{12} 上 $z_2=\varepsilon$，所以第一个仿射中线性部分的第三列全为零。

$$P_{11}:\ \pi_{11}\to\pi_{02}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

其中，a_2，b_2，c_2，d_2是常数，$(\varepsilon,0,0) \equiv \Gamma_{12} \cap \pi_{02}$是$\pi_{02}$与异宿轨$\Gamma_{12}$的交集(由$\pi_{02}$的选取可知，仅相交一次)。线性部分的选取与上面类似。

因此，可得庞加莱映射$P = P_{11} \circ P_{01} \circ P_{12} \circ P_{02}$：$\pi_{02} \to \pi_{02}$。

下面只需证，当$\frac{\rho\lambda_2}{\lambda\lambda_1} < 1$时，庞加莱映射$P$有可数无穷多个马蹄。在证明定理前先给出一个引理。

引理 3 考虑$R_k = \left\{ (x_2,y_2,z_2) \in R^3 \middle| \varepsilon e^{\frac{2\pi\rho}{\omega}} \le x_2 \le \varepsilon, y_2 = 0, \varepsilon e^{\frac{-2\pi(k+1)\lambda}{\omega}} \le z_2 \le \varepsilon e^{\frac{-2\pi k\lambda}{\omega}} \right\}$。对给定的$k$（$k$足够大)，当$i \ge \frac{k}{\alpha}$时，$P(R_k)$的内边界交$R_k$的上水平边界至少 2 个点，其中$1 \le \alpha < -\frac{\lambda}{\rho}$。

证明： 考虑矩形$R_k = \left\{ (x_2,y_2,z_2) \in R^3 \middle| \varepsilon e^{\frac{2\pi\rho}{\omega}} \le x_2 \le \varepsilon, y_2 = 0, \varepsilon e^{\frac{-2\pi(k+1)\lambda}{\omega}} \le z_2 \le \varepsilon e^{\frac{-2\pi k\lambda}{\omega}} \right\}$，

显然，$\pi_{02} = \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k$。

矩形R_k的四条边分别记作h^u（上水平边)，h^l（下水平边)，v^r（右垂直边)，v^l（左垂直边)，其中

$$h^u = \left\{ (x_2,y_2,z_2) \in R^3 \middle| \varepsilon e^{\frac{2\pi\rho}{\omega}} \le x_2 \le \varepsilon, y_2 = 0, z_2 = \varepsilon e^{\frac{-2\pi k\lambda}{\omega}} \right\},$$

$$h^l = \left\{ (x_2,y_2,z_2) \in R^3 \middle| \varepsilon e^{\frac{2\pi\rho}{\omega}} \le x_2 \le \varepsilon, y_2 = 0, z_2 = \varepsilon e^{\frac{-2\pi(k+1)\lambda}{\omega}} \right\},$$

$$v^r = \left\{ (x_2,y_2,z_2) \in R^3 \middle| x_2 = \varepsilon, y_2 = 0, \varepsilon e^{\frac{-2\pi(k+1)\lambda}{\omega}} \le z_2 \le \varepsilon e^{\frac{-2\pi k\lambda}{\omega}} \right\},$$

$$v^l = \left\{ (x_2,y_2,z_2) \in R^3 \middle| x_2 = \varepsilon e^{\frac{2\pi\rho}{\omega}}, y_2 = 0, \varepsilon e^{\frac{-2\pi(k+1)\lambda}{\omega}} \le z_2 \le \varepsilon e^{\frac{-2\pi k\lambda}{\omega}} \right\}。$$

在P_{02}作用下，边h^u，h^l，v^r，v^l的像分别为

$$P_{02}(h^u) = \left\{ (r,\theta,z_2) \in R^3 \middle| \varepsilon e^{\frac{2\pi(k+1)\rho}{\omega}} \le r \le \varepsilon e^{\frac{2\pi k\rho}{\omega}}, \theta = 2\pi k, z_2 = \varepsilon \right\},$$

$$P_{02}(h^l) = \left\{ (r,\theta,z_2) \in R^3 \middle| \varepsilon e^{\frac{2\pi(k+2)\rho}{\omega}} \le r \le \varepsilon e^{\frac{2\pi(k+1)\rho}{\omega}}, \theta = 2\pi(k+1), z_2 = \varepsilon \right\},$$

$$P_{02}(v^r) = \left\{ (r,\theta,z_2) \in R^3 \middle| r = \varepsilon e^{\frac{\rho\theta}{\omega}}, 2\pi k \le \theta \le 2\pi(k+1), z_2 = \varepsilon \right\},$$

$$P_{02}(v^l) = \left\{ (r,\theta,z_2) \in R^3 \middle| r = \varepsilon e^{\frac{\rho(2\pi+\theta)}{\omega}}, 2\pi k \le \theta \le 2\pi(k+1), z_2 = \varepsilon \right\}。$$

R_i的上水平边界的z_2坐标为

$$z_2=\varepsilon \mathrm{e}^{\frac{-2\pi i\lambda}{\omega}}$$

在 $P_{02}\left(R_k\right)$ 的内边界上的点中与 $(0,0,\varepsilon)$ 距离最小的点满足下式

$$r_{\min}=\varepsilon \mathrm{e}^{\frac{4\pi\rho}{\omega}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi k\rho}{\omega}}。$$

由 P_{01} 的构造知：在 P_{01} 的作用下，分量 x_1 压缩到一定值 ε 其余分量作相应的伸缩。又由于 P_{12}，P_{11} 是仿射，故在 $P\left(R_k\right)=P_{11}\circ P_{01}\circ P_{12}\circ P_{02}\left(R_k\right)$ 的内边界上的限制可以表示为

$$\overline{r}_{\min}=K\varepsilon \mathrm{e}^{\frac{4\pi\rho}{\omega}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi k\rho}{\omega}},$$

存在 K，$K>0$。

所以，当 $\dfrac{\overline{r}_{\min}}{z_2}=K\mathrm{e}^{\frac{4\pi\rho}{\omega}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi(k\rho+i\lambda)}{\omega}}>1$ 时，$P\left(R_k\right)$ 的内边界将交 R_i 的上水平边界(至少)两点。

因为 $K\mathrm{e}^{\frac{4\pi\rho}{\omega}}$ 是固定的常数，故要使 $K\mathrm{e}^{\frac{4\pi\rho}{\omega}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi(k\rho+i\lambda)}{\omega}}>1$ 成立，只需取 $k\rho+i\lambda$ 足够大即可。而当 $\dfrac{-\rho}{\lambda}<1$ 时，存在 α 使得 $1\le\alpha<\dfrac{-\lambda}{\rho}$。当 $i\ge\dfrac{k}{\alpha}$ 时，$k\rho+i\lambda$ 是正的且当 k 充分大时，$\dfrac{\overline{r}_{\min}}{z_2}=K\mathrm{e}^{\frac{4\pi\rho}{\omega}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi(k\rho+i\lambda)}{\omega}}>1$ 成立。故得证。

接下来后半部分的证明类似于引理 1 和引理 2 的证明。

对于 π_{02} 上的矩形 R_k，只需在 R_k 中找出两个不相交的 μ_h-水平带映射为自身上的 μ_v-垂直带，使得假设 1 和假设 2 成立。

由引理 3 可知：当 $0<\dfrac{-\rho}{\lambda}<1$ 时，存在满足假设 1 的 μ_h-水平带。

当满足稳定流行比不稳定流行弱即 $0<-\lambda_2<\lambda_1$ 即 $0<\dfrac{-\lambda_2}{\lambda_1}<1$ 时，类似于引理 1 和引理 2 的计算可知假设 2 也成立。

综上，由 P 的构造可知，当满足 $\dfrac{\rho\lambda_2}{\lambda\lambda_1}<1$ 时对充分大 k，R_k 包含不变 Cantor 集 Λ_k，并且在 Λ_k 上 P 共轭于二符号上的一全平移。故 P 存在可数无穷多个马蹄。

致　谢

本文是在金银来老师的指导和赵雪、丁本艳同学的批评指正下完成的。借此再次向老师和朋友致以深深地敬意和衷心的感谢！同时也感谢《理论数学》各位老师对本文提出宝贵建议。

参考文献 (References)

[1] Wiggins, S. (2003) Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Springer-Verlag, New York.
[2] 朱德明，等 (1994) 同宿分支、广义的 Hopf 分支和马蹄. *数学年刊A 辑*, **6**, 671-680.
[3] 张芷芬，等 (2006) 微分方程定性理论. 科学出版社，北京.