Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 111-120
Published Online May 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.53018

The Extreme Points and Rotundity of Orlicz-Sobolev Spaces

Fayun Cao

College of Sciences, Shanghai University, Shanghai
Email: caofayun@126.com

Received: May 7th, 2015; accepted: May 22nd, 2015; published: May 29th, 2015

Abstract

In this paper we give a modular norm for Orlicz-Sobolev spaces, and obtain a necessary and sufficient condition for the Orlicz-Sobolev spaces which is formed by strictly convex N function to be rotund.

Keywords

Orlicz-Sobolev Spaces, Extreme Points, Rotund, Modular Norm

Orlicz-Sobolev空间的端点与严格凸性

曹法赟

上海大学理学院，上海
Email: caofayun@126.com

收稿日期：2015年5月7日；录用日期：2015年5月22日；发布日期：2015年5月29日

摘　要

本文在Orlicz-Sobolev空间上给出了一种模范数，给出了由严格凸N函数生成Orlicz-Sobolev空间严格凸的充要条件。

关键词

Olicz-Sobolev空间，端点，严格凸，模范数

1. 引言

Orlicz空间是泛函分析的一个重要分支，它深入地研究了比熟知的 L^p 空间更加广泛的一类空间，Sobolev空间是20世纪初形成的有着重要价值的数学模型，在方程理论有着重要的应用价值，Orlicz-Sobolev空间则是Sobolev空间的重要推广，Orlicz-Sobolev空间的发展不仅完善了Banach空间理论，而且为解决实际问题提供了丰富的模型。空间的严格凸性在最佳逼近和最优化控制等领域有着直接的应用。所以研究Orlicz-Sobolev空间的严格凸性有着深远的意义。本文在Orlicz-Sobolev空间上给出了一种模范数，得到了摸与范数的关系式。给出了了由严格凸N函数生成的Orlicz-Sobolev空间严格凸的充要条件。2001年，陈述涛和胡长英[1]给出了Orlicz-Sobolev空间关于Luxemburg范数的端点和严格凸的充要条件，但是文章中已经假定 M 满足 Δ_2 条件，同年二人[2]讨论Orlicz-Sobolev空间关于最大值范数的端点和严格凸的性质，但未对空间严格凸的充要条件进行深入讨论，本文给出了一种新的Luxemburg范数，在此范数形成的Orlicz-Sobolev空间与Orlicz有着很多平行的性质，可以用研究Orlicz空间的方法来研究Orlicz-Sobolev空间。

2. 预备知识

定义 1 [3]：函数 $M(u)$ 为 N 函数是指 $M(u)$ 满足如下条件：

1) $M(u)$ 为偶的，连续的，凸函数且 $M(0)=0$；
2) 当时 $u>0$ 时，$M(u)>0$；
3) $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{M(u)}{u}=\infty$，$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{M(u)}{u}=0$。

若还有：$\forall\, u\neq v\in R$，有 $M\left(\dfrac{u+v}{2}\right)<\dfrac{1}{2}\big(M(u)+M(v)\big)$ 则称 M 是严格凸的。

用 Ω 表示 n 维Euclid空间 R^n 中的有界集，$u(x)$ 是定义在 Ω 上Lebesgue可测函数，

$$\rho_M(u)=\int_\Omega M(u(x))\mathrm{d}x$$

$$L_M=\{u(x):\exists k>0,\rho_M(ku)<\infty\}$$

$E_M=\{u(x):\forall k>0,\rho_M(ku)<\infty\}$，$E_M$ 是 L_M 的线性子空间，在 L_M 上定义如下实值函数：

$$\|u\|_{(M)}=\inf\left\{k>0:\int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{k}\right)\le 1\right\}$$

则 $\left(L_M,\|u\|_{(M)}\right)$ 为Banach空间。

定义2 [4]：称 $M(u)$ 在区间 $[a,b]$ 仿射是指：$\exists k,d$ 使得 $M(u)=ku+d$，$u\in[a,b]$。

定义3 [4]：$M\in\Delta_2$ 是指：$\exists\, k>2,\exists\, u_0\ge 0$，满足：

$$M(2u)\le kM(u),\ |u|\ge u_0$$

若 $M\in\Delta_2$ 则有 $L_M=E_M$。

定义4 [4]：设 $M(u)$ 为 N 函数，$u\in R$，若 $w,v\in R, w+v=2u$ 且 $M\left(\frac{w+v}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(M(v)+M(w)\right)$，则有 $w=v$，就称 u 为 M 的严格凸点，其严格凸点全体记为 S_M。

定义5 [5]: 设 X 是Banach空间，$B(X)$ 是其单位闭球，$S(X)$ 为单位球面，$u\in B(X)$，若 $w,v\in B(X)$，且 $2u=w+v$，则有 $u=w=v$ 就称 u 为 $B(X)$ 的端点，其端点的全体记为 $extB(X)$，若有 $S(X)=extB(X)$，则称 X 是严格凸空间。

定义6 [6]：设 $M(u)$ 为 N 函数，Ω 是 R^n 中有界连通开集，定义如下集合：

$$W^mL_M=\left\{u\in L_M : D^\alpha u(t)\in L_M, 0\le|\alpha|\le m\right\}$$

其中 $D^\alpha u(t)$ 为 $u(t)$ 的 α 阶弱导数，则 W^mL_M 为 L_M 的线性子空间，在 W^mL_M 上定义如下两实值函数：

$$\|u\|_{m,(M)}^{\infty}=\max_{0\le|\alpha|\le m}\|D^\alpha u\|_{(M)}$$

$$\|u\|_{m,(M)}^{p}=\left(\sum_{0\le|\alpha|\le m}\|D^\alpha u\|_{(M)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}, 1\le p<\infty$$

则 $\left(W^mL_M, \|u\|_{m,(M)}^{\infty}\right)$，$\left(W^mL_M, \|u\|_{m,(M)}^{p}\right)$ 均是Banach空间。

3. 主要结果

定理1 设 M 为 N 函数，Ω 为 R^n 中有界连通开集，在 W^mL_M 上定义如下实值函数：

$$\|u\|_{m,(M)}=\inf\left\{k>0: \sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(\frac{D^\alpha u(t)}{k}\right)\mathrm{d}t\le 1\right\}$$

则 $\left(W^mL_M, \|u\|_{m,(M)}\right)$ 为Banach空间。

证明：容易证明 $\|u\|_{m,(M)}$ 是 W^mL_M 上的范数，记 Q 为满足 $0\le|\alpha|\le m$ 的 α 个数，$\tilde{\rho}_M(u)=\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(D^\alpha u(t)\right)\mathrm{d}t$，下面证明 $\|u\|_{m,(M)}$ 与 $\|u\|_{m,(M)}^{\infty}$ 等价，因为

$$\left\{\lambda>0: \rho_M\left(\frac{D^\alpha u}{\lambda}\right)\le 1\right\}\supset\left\{\lambda>0: \tilde{\rho}_M\left(\frac{u}{\lambda}\right)\le 1\right\}$$

所以 $\|u\|_{m,(M)}^{\infty}\le\|u\|_{m,(M)}$，另一方面

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_M\left(\frac{u}{Q\|u\|_{m,(M)}^{\infty}}\right)&=\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(\frac{D^\alpha u(t)}{Q\|u\|_{m,(M)}^{\infty}}\right)\mathrm{d}t\\&\le\frac{1}{Q}\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(\frac{D^\alpha u(t)}{\|u\|_{m,(M)}^{\infty}}\right)\mathrm{d}t\\&\le\frac{1}{Q}\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(\frac{D^\alpha u(t)}{\|D^\alpha u\|_{(M)}}\right)\mathrm{d}t\le 1\end{aligned}$$

从而有 $\|u\|_{m,(M)}\le Q\|u\|_{m,(M)}^{\infty}$，故两者等价，故 $\left(W^mL_M, \|u\|_{m,(M)}\right)$ 为Banach空间。

定理2 设 M 为 N 函数，Ω 为 R^n 中有界连通开集，设 $u\in\left(W^mL_M\right)$ 则有：

1) 若 $\tilde{\rho}_M(u)\le 1$，则 $\|u\|_{m,(M)}\le 1$；

2) $u\ne 0$，则 $\tilde{\rho}_M\left(\dfrac{u}{\|u\|_{m,(M)}}\right)\le 1$；

3) 若 $\|u\|_{m,(M)}\le 1$，则 $\tilde{\rho}_M(u)\le\|u\|_{m,(M)}\le 1$；

4) 若 $M\in\Delta_2$，则 $\tilde{\rho}_M\left(\dfrac{u}{\|u\|_{m,(M)}}\right)=1$。

证明：1) 由 $\|u\|_{m,(M)}$ 的定义容易证明。

2) 由 $\|u\|_{m,(M)}$ 的定义知 $\exists a_n\searrow\|u\|_{m,(M)}$，使得 $\tilde{\rho}_M\left(\dfrac{u}{a_n}\right)\le 1$，且有如下三条性质：

① $M\left(\dfrac{D^\alpha u(t)}{a_n}\right)$ 非负可测，$0\le|\alpha|\le m,\ n=1,2,3,\cdots$

② $M\left(\dfrac{D^\alpha u(t)}{a_1}\right)\le M\left(\dfrac{D^\alpha u(t)}{a_2}\right)\le\cdots$，$0\le|\alpha|\le m,\ n=1,2,3,\cdots$

③ $\int_\Omega\lim\limits_{n\to\infty}M\left(\dfrac{D^\alpha u(t)}{a_n}\right)\mathrm{d}t=\int_\Omega M\left(\dfrac{D^\alpha u(t)}{\|u\|_{m,(M)}}\right)\mathrm{d}t$

由Levy定理可知：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega M\left(\dfrac{D^\alpha u(t)}{a_n}\right)\mathrm{d}t=\int_\Omega M\left(\dfrac{D^\alpha u(t)}{\|u\|_{m,(M)}}\right)\mathrm{d}t$，所以有：

$$\sum_{0\le|\alpha|\le m}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega M\left(\frac{D^\alpha u(t)}{a_n}\right)\mathrm{d}t=\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(\frac{D^\alpha u(t)}{\|u\|_{m,(M)}}\right)\mathrm{d}t$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\rho}_M\left(\dfrac{u}{a_n}\right)=\tilde{\rho}_M\left(\dfrac{u}{\|u\|_{m,(M)}}\right)$，所以 $\tilde{\rho}_M\left(\dfrac{u}{\|u\|_{m,(M)}}\right)\le 1$。

3) $u=0$，则 $\tilde{\rho}_M(u)=\|u\|_{m,(M)}=0$，则3)成立；

$u\ne 0$，由 $M(u)$ 的凸性可知：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\|u\|_{m,(M)}}\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(D^\alpha u(t)\right)\mathrm{d}t\\&=\sum_{0\le|\alpha|\le m}\frac{1}{\|u\|_{m,(M)}}\int_\Omega M\left(D^\alpha u(t)\right)\mathrm{d}t\le\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(\frac{D^\alpha u(t)}{\|u\|_{m,(M)}}\right)\mathrm{d}t\le 1\end{aligned}$$

从而 $\tilde{\rho}_M(u)\le\|u\|_{m,(M)}\le 1$。

4) 因为 $M\in\Delta_2$ 所以 $L_M=E_M$，故 $\rho_M\left(\dfrac{u}{\lambda}\right)$ 关于 λ 在 $(0,\infty)$ 上连续，于是 $\tilde{\rho}_M\left(\dfrac{u}{\lambda}\right)$ 关于 λ 在 $(0,\infty)$ 上连续，对于 $\lambda_n\nearrow\|u\|_{m,(M)}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\rho}_M\left(\dfrac{u}{\lambda_n}\right)=\tilde{\rho}_M\left(\dfrac{u}{\|u\|_{m,(M)}}\right)\ge 1$，结合3)可得

$$\tilde{\rho}_M\left(\frac{u}{\|u\|_{m,(M)}}\right)=1$$

定理3 设 M 为 N 函数，Ω 为 R^n 中有界连通开集，$u\in S\left(W^mL_M\right)$ 若有：

1) $\tilde{\rho}_M(u)=1$

2) $\mu\left\{t\in\Omega:u(t)\notin S_M\right\}=0$

则 $u\in extB\left(W^mL_M\right)$

证明： 设 $v,w\in B\left(W^mL_M\right),w(t)+v(t)=2u(t),t\in\Omega,$ 由定理2知 $\tilde{\rho}_M(v)\le\|v\|_{m,(M)}\le1$ $\tilde{\rho}_M(w)\le\|w\|_{m,(M)}\le1$，由 $M(u)$ 的凸性可知：

$$\begin{aligned}\int_\Omega M\left(D^\alpha u(t)\right)\mathrm{d}t&=\int_\Omega M\left(D^\alpha\left(\frac{v(t)+w(t)}{2}\right)\right)\mathrm{d}t\\&\le\frac{1}{2}\int_\Omega M\left(D^\alpha v(t)\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_\Omega M\left(D^\alpha w(t)\right)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}1=\tilde{\rho}_M(u)&=\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(D^\alpha u(t)\right)\mathrm{d}t=\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(D^\alpha\left(\frac{v(t)+w(t)}{2}\right)\right)\mathrm{d}t\\&\le\frac{1}{2}\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(D^\alpha v(t)\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(D^\alpha w(t)\right)\mathrm{d}t\le1\end{aligned}$$

从而以上不等式中各项均相等，所以

$$\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(D^\alpha u(t)\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(D^\alpha v(t)\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(D^\alpha w(t)\right)\mathrm{d}t\tag{2}$$

结合(1) (2)得：$\forall\alpha:0\le|\alpha|\le m$

$$\int_\Omega M\left(D^\alpha u(t)\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_\Omega M\left(D^\alpha v(t)\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_\Omega M\left(D^\alpha w(t)\right)\mathrm{d}t$$

特别地当 $\alpha=(0,0,\cdots,0)$ 时

$$\int_\Omega M\left(u(t)\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_\Omega M\left(v(t)\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_\Omega M\left(w(t)\right)\mathrm{d}t$$

再由 $\mu\left\{t\in\Omega:u(t)\notin S_M\right\}=0$ 得 $u(t)=v(t)=w(t)$ $a.e$ on Ω，所以 $u\in extB\left(W^mL_M\right)$。

定理4 M 为 N 函数，Ω 为 R^n 中有界连通开集，$u\in S\left(W^mL_M\right)$。若存在 $\varepsilon>0$ 以及 M 的仿射区间 $\left(a_\alpha,b_\alpha\right)$ $0\le|\alpha|\le m$ 满足：

$$\operatorname{int}\bigcap_{0\le|\alpha|\le m}\left\{t\in\Omega:D^\alpha u(t)\in\left(a_\alpha,b_\alpha\right)\right\}\ne\varnothing$$

则 $u\notin extB\left(W^mL_M\right)$

证明： 记 $\Omega_0=\bigcap_{0\le|\alpha|\le m}\left\{t\in\Omega:D^\alpha u(t)\in\left(a_\alpha,b_\alpha\right)\right\}$，由于 Ω_0 内部非空所以取 $t',t'',r>0$，使得 $U(t',r)\subset\Omega_0$，$U(t'',r)\subset\Omega_0$，并且 $U(t',r)\bigcap U(t'',r)=\varnothing$。

定义如下两个函数：

$$J_{t'}(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{r^2-\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_i')^2}} & t\in U(t',r)\\ 0 & t\in\Omega\setminus U(t',r)\end{cases}$$

$$J_{t''}(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{r^2-\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_i'')^2}} & t\in U(t'',r)\\ 0 & t\in\Omega\setminus U(t'',r)\end{cases}$$

则 $J_{t'}(t)$， $J_{t''}(t)\in C_c^{\infty}(\Omega)\subset W^m L_M$ 令：

$$c_1=\varepsilon\cdot\min_{0\le|\alpha|\le m}\left\{\frac{1}{\max_{t\in\Omega}\left|D^{\alpha}J_{t'}(t)\right|+1}\right\}$$

$$c_2=\varepsilon\cdot\min_{0\le|\alpha|\le m}\left\{\frac{1}{\max_{t\in\Omega}\left|D^{\alpha}J_{t''}(t)\right|+1}\right\}$$

$c_1>0, c_2>0$ 且 $c_1\cdot\left|D^{\alpha}J_{t'}(t)\right|\le\varepsilon, c_2\cdot\left|D^{\alpha}J_{t''}(t)\right|\le\varepsilon$， $t\in\Omega, 0\le|\alpha|\le m$， 取 $c=\min(c_1,c_2)$。

定义如下函数：

$$v(t)=u(t)+cJ_{t'}(t)-cJ_{t''}(t),\ w(t)=u(t)-cJ_{t'}(t)+cJ_{t''}(t),\ t\in\Omega$$

则 $w,v\in W^m L_M$， $w+v=2u$， $w\ne v$。

令 $M(u)$ 在 (a_α,b_α) 上为：

$$M(u)=k_\alpha u+d_\alpha$$

则：

$$\begin{aligned}&\int_\Omega M\left(D^{\alpha}v(t)\right)\mathrm{d}t\\ &=\int_{\Omega\setminus U(t',r)\setminus U(t'',r)}M\left(D^{\alpha}u(t)\right)\mathrm{d}t+\int_{U(t',r)}M\left(D^{\alpha}u(t)+D^{\alpha}cJ_{t'}(t)\right)\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_{U(t'',r)}M\left(D^{\alpha}u(t)-D^{\alpha}cJ_{t'}(t)\right)\mathrm{d}t\\ &=\int_{\Omega\setminus U(t',r)\setminus U(t'',r)}M\left(D^{\alpha}u(t)\right)\mathrm{d}t+\int_{U(t',r)}\left(k_\alpha D^{\alpha}u(t)+d_\alpha\right)\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_{U(t'',r)}\left(k_\alpha D^{\alpha}u(t)+d_\alpha\right)\mathrm{d}t+\int_{U(t',r)}\left(k_\alpha D^{\alpha}cJ_{t'}(t)\right)\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_{U(t'',r)}\left(-k_\alpha D^{\alpha}cJ_{t''}(t)\right)\mathrm{d}t\\ &=\int_{\Omega\setminus U(t',r)\setminus U(t'',r)}M\left(D^{\alpha}u(t)\right)\mathrm{d}t+\int_{U(t',r)\cup U(t'',r)}\left(k_\alpha D^{\alpha}u(t)+d_\alpha\right)\mathrm{d}t\\ &=\int_\Omega M\left(D^{\alpha}u(t)\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

所以 $\tilde{\rho}_M(v)\le\tilde{\rho}_M(u)\le 1$， 同理可得 $\tilde{\rho}_M(w)\le\tilde{\rho}_M(u)\le 1$ 由定理2知 $w,v\in B\left(W^m L_M\right)$， 再由 $w\ne v$ 可知 $u\notin extB\left(W^m L_M\right)$。

定理5 设 M 为严格凸 N 函数， $\Omega=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_n,b_n)$ 为 R^n 中有界连通开方体，则 $W^m L_M(\Omega)$ 严格凸的充要条件是 $M\in\Delta_2$。

证明 充分性：结合定理3与定理2的4)可证得。

必要性：假设 $M \notin \Delta_2$ 则存在 $c_k \nearrow \infty$，使得

$$M\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)c_k\right) > 2^k M(c_k)$$

令 $\lambda_k = \dfrac{1}{2^k M(c_k)}$ 不妨设 $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k < \mu(\Omega)$，取 r_1：$a_1 < r_1 < b_1$ 和 $\Omega_0 = \{t\in\Omega : a_1 < t_1 \le r_1\}$ 满足：$\mu(\Omega_0) = \mu(\Omega) - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$，取 $r_2 : r_1 < r_2 < b_1$ 和 $\Omega_1 = \{t\in\Omega : r_1 < t_1 \le r_2\}$ 使得 $\mu(\Omega_1) = \lambda_1$，依次可取得 $r_k : r_k < r_{k+1} < b_1$ 和 $\Omega_k = \{t\in\Omega : r_k < t_1 \le r_{k+1}\}$ 满足 $\mu(\Omega_k) = \lambda_k$，$k \ge 1$，显然有 $\bigcup_{k=0}^{\infty}\Omega_k = \Omega$ 并且当 $k \ge 1$ 时 $M(c_k)\cdot\mu(\Omega_k) = \dfrac{1}{2^k}$，令 $u_p(t) = \sum_{k=p+1}^{\infty} c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(t), 1\le p<\infty$ 则：

$$\begin{aligned}\rho_M(u_p) &= \int_\Omega M\left(\sum_{k=p+1}^{\infty} c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=p+1}^{\infty}\int_{\Omega_k} M\left(c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=p+1}^{\infty} M(c_k)\cdot\mu(\Omega_k) = \sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^p} \le \frac{1}{2}\end{aligned}$$

所以 $\|u_p\|_{(M)} \le 1$

$\forall l > 1$，$\exists p_0 > p$ 使得 $l \ge 1 + \dfrac{1}{p_0}$ 从而：

$$\begin{aligned}\rho_M(lu_p) &\ge \rho_M\left(\left(1+\frac{1}{p_0}\right)u_p\right) = \int_\Omega M\left(\left(1+\frac{1}{p_0}\right)\sum_{k=p+1}^{\infty} c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=p+1}^{\infty}\int_{\Omega_k} M\left(\left(1+\frac{1}{p_0}\right)c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(t)\right)\mathrm{d}t \\ &\ge \sum_{k=p+1}^{\infty}\int_{\Omega_k} M\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=p+1}^{\infty} M\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)c_k\right)\cdot\mu(\Omega_k) \\ &\ge \sum_{k=p+1}^{\infty} 2^k M(c_k)\cdot\mu(\Omega_k) > 1\end{aligned}$$

由 $\|u_p\|_{(M)}$ 的定义可知 $\|u_p\|_{(M)} \ge l$，由 l 的任意性知 $\|u_p\|_{(M)} \ge 1$，所以 $\|u_p\|_{(M)} = 1$。

取 $p_1 > 0$，当 $p \ge p_1$ 时，有 $\dfrac{c_p}{M(c_p)} \le 1$

取 $p_2 > 0$，当 $p \ge p_2$ 时，有

$$\frac{1}{2^p(b_2-a_2)\times(b_3-a_3)\times\cdots\times(b_n-a_n)}\times(b_1-a_1)^{|\alpha|} < M^{-1}\left(\frac{1}{2\mu(\Omega)\cdot Q}\right)$$

令 $p_3 = \max(p_1, p_2)$

$$\tilde{u}_{p_3}(t) = \int_{a_1}^{t_1}\int_{a_1}^{x_{m-1}}\cdots\int_{a_1}^{x_1}\sum_{k=p_3+1}^{\infty} c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(s,t_2\cdots t_n)\mathrm{d}s\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{m-1}$$

$$f_j(t)=\int_{a_1}^{t_1}\int_{a_1}^{x_{j-1}}\cdots\int_{a_1}^{x_1}\sum_{k=p_3+1}^{\infty}c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(s,t_2\cdots t_n)\mathrm{d}s\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{j-1},1\le j<m-1$$

$$f_0(t)=\sum_{k=p_3+1}^{\infty}c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(t)$$

则

$$D^{(j,0,0,\cdots,0)}\tilde{u}_{p_3}(t)=\int_{a_1}^{t_1}\int_{a_1}^{x_{m-j-1}}\cdots\int_{a_1}^{x_1}\sum_{k=p\ +1}^{\infty}c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(s,t_2\cdots t_n)\mathrm{d}s\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{j-1}$$
$$=f_{m-j}(t),\quad 1\le j\le m-1$$

$$D^{(m,0,0,\cdots,0)}\tilde{u}_{p_3}(t)=f_0(t)$$

当 $\alpha\notin\{(0,0,\cdots,0),(1,0,0,\cdots,0),\cdots,(m,0,0,\cdots,0)\}$ 时

$$D^{\alpha}\tilde{u}_{p_3}(t)=0$$

而

$$f_1(t)\le\int_{a_1}^{b_1}\sum_{k=p_3+1}^{\infty}c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(s,t_2\cdots t_n)\mathrm{d}s=\sum_{k=p_3+1}^{\infty}(r_{k+1}-r_k)c_k$$
$$=\sum_{k=p_3+1}^{\infty}\frac{c_k}{2^pM(c_k)(b_2-a_2)\times(b_3-a_3)\times\cdots\times(b_n-a_n)}$$
$$\le\frac{1}{2^{p_3}(b_2-a_2)\times(b_3-a_3)\times\cdots\times(b_n-a_n)}$$

$$f_2(t)\le\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_1}^{x_1}\sum_{k=p_3+1}^{\infty}c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(s,t_2\cdots t_n)\mathrm{d}s\mathrm{d}x_1$$
$$\le\frac{(b_1-a_1)}{2^{p_3}(b_2-a_2)\times(b_3-a_3)\times\cdots\times(b_n-a_n)}$$

$$\vdots$$

$$f_j(t)\le\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_1}^{x_{j-1}}\cdots\int_{a_1}^{x_1}\sum_{k=p_3+1}^{\infty}c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(s,t_2\cdots t_n)\mathrm{d}s\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{j-1}$$
$$\le\frac{(b_1-a_1)^{j-1}}{2^{p_3}(b_2-a_2)\times(b_3-a_3)\times\cdots\times(b_n-a_n)},\quad 1\le j<m-1$$

$$\tilde{u}_{p_3}(t)\le\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_1}^{x_{m-1}}\cdots\int_{a_1}^{x_1}\sum_{k=p\ +1}^{\infty}c_k\cdot\chi_{\Omega_k}(s,t_2\cdots t_n)\mathrm{d}s\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{m-1}$$
$$\le\frac{(b_1-a_1)^{|m-1|}}{2^{p_3}(b_2-a_2)\times(b_3-a_3)\times\cdots\times(b_n-a_n)}$$

从而 $\forall\alpha:\alpha\ne(m,0,\cdots,0)$ 有

$$D^{\alpha}\tilde{u}_{p_3}(t)<M^{-1}\left(\frac{1}{2\mu(\Omega)\cdot Q}\right)$$

$$\tilde{\rho}_M\left(\tilde{u}_{p_3}\right)=\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_\Omega M\left(D^\alpha\tilde{u}_{p_3}(t)\right)\mathrm{d}t<\frac{1}{2}+(Q-1)\cdot\int_\Omega M\left(M^{-1}\left(\frac{1}{2\mu(\Omega)\cdot Q}\right)\right)\mathrm{d}t<1$$

从而$\left\|\tilde{u}_{p_3}\right\|_{m,(M)}\le 1$。又因为：

$$\left\{\lambda>0:\tilde{\rho}_M\left(\frac{\tilde{u}_{p_3}}{\lambda}\right)\le 1\right\}\subset\left\{\lambda>0:\rho_M\left(\frac{u_{p_3}}{\lambda}\right)\le 1\right\}$$

所以$\left\|\tilde{u}_{p_3}\right\|_{m,(M)}\ge\left\|u_{p_3}\right\|_{(M)}=1$，故$\left\|\tilde{u}_{p_3}\right\|_{m,(M)}=1$。

令$\varepsilon=1-\tilde{\rho}_M\left(\tilde{u}_{p_3}\right)$，$\tilde{M}=\max\left\{c_{p_3+1},M^{-1}\left(\frac{1}{2\mu(\Omega)\cdot Q}\right)\right\}$

$$E=\left(r_{p_3+1},r_{p_3+2}\right)\times\left(a_2,b_2\right)\times\cdots\times\left(a_n,b_n\right)$$

当$t\in E$时

$$D^\alpha\tilde{u}_{p_3}(t)\le\tilde{M},\quad 0\le|\alpha|\le m$$

取$t',t'',r>0$，使得$U(t',r)\subset E$，$U(t'',r)\subset E$，$U(t',r)\cap U(t'',r)=\varnothing$，且

$$\int_{U(t',r)}M\left(2\tilde{M}\right)\mathrm{d}t\le\frac{\varepsilon}{2Q},\ \int_{U(t'',r)}M\left(2\tilde{M}\right)\mathrm{d}t\le\frac{\varepsilon}{2Q}。$$

定义如下两个函数：

$$J_{t'}(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{r^2-\sum_{i=1}^n(t_i-t_i')^2}} & t\in U(t',r)\\ 0 & t\in\Omega\setminus U(t',r)\end{cases}$$

$$J_{t''}(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{r^2-\sum_{i=1}^n(t_i-t_i'')^2}} & t\in U(t'',r)\\ 0 & t\in\Omega\setminus U(t'',r)\end{cases}$$

则$J_{t'}(t),J_{t''}(t)\in C_c^\infty(\Omega)\subset W^mL_M$令：

$$c_1=\tilde{M}\cdot\min_{0\le|\alpha|\le m}\left\{\frac{1}{\max_{t\in\Omega}\left|D^\alpha J_{t'}(t)\right|+1}\right\}$$

$$c_2=\tilde{M}\cdot\min_{0\le|\alpha|\le m}\left\{\frac{1}{\max_{t\in\Omega}\left|D^\alpha J_{t''}(t)\right|+1}\right\}$$

$c_1>0,c_2>0$且$c_1\cdot\left|D^\alpha J_{t'}(t)\right|\le\tilde{M},c_2\cdot\left|D^\alpha J_{t''}(t)\right|\le\tilde{M}$，$t\in\Omega,0\le|\alpha|\le m$，取$c=\min(c_1,c_2)$，定义如下函数：

$$v(t)=\tilde{u}_{p_3}(t)+cJ_{t'}(t)-cJ_{t''}(t),\ w(t)=\tilde{u}_{p_3}(t)-cJ_{t'}(t)+cJ_{t''}(t),\ t\in\Omega$$

则$w,v\in W^mL_M$，$w+v=2u$，$w\ne v$。

所以：

$$\begin{aligned}\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_{\Omega}M\left(D^{\alpha}v(t)\right)\mathrm{d}t=&\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_{\Omega\setminus U(t',r)\setminus U(t'',r)}M\left(D^{\alpha}\tilde{u}_{p_3}(t)\right)\mathrm{d}t\\&+\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_{U(t',r)}M\left(D^{\alpha}\tilde{u}_{p_3}(t)+D^{\alpha}cJ_{t'}(t)\right)\mathrm{d}t\\&+\sum_{0\le|\alpha|\le m}\int_{U(t'',r)}M\left(D^{\alpha}\tilde{u}_{p_3}(t)-D^{\alpha}cJ_{t''}(t)\right)\mathrm{d}t\\\le&\ \tilde{\rho}_M\left(\tilde{u}_{p_3}\right)+Q\int_{U(t',r)}M\left(2\tilde{M}\right)\mathrm{d}t+Q\int_{U(t'',r)}M\left(2\tilde{M}\right)\mathrm{d}t\le1\end{aligned}$$

即 $\tilde{\rho}_M(v)\le1$，同理得 $\tilde{\rho}_M(w)\le1$，所以 $v,w\in B\left(W^mL_M\right)$，而 $v\ne w$，所以 $u\notin extB\left(W^mL_M\right)$，这与 W^mL_M 严格凸相矛盾所以假设不成立，故 $M\in\Delta_2$。

推论1 设 M 为严格凸 N 函数，$\Omega=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_n,b_n)$ 为 R^n 中有界连通开方体，则 $\|u\|_{m,(M)}=1\leftrightarrow\tilde{\rho}(u)=1$ 当且仅当 $M\in\Delta_2$。

参考文献 (References)

[1] 陈述涛，胡长英 (2001) Orlicz-sobolev 空间关于 Luxemburg 范数的端点与严格凸性. *哈尔滨师范大学自然科学学报*, **2**, 1-6.

[2] 胡长英，陈述涛 (2001) Orlicz-sobolev 空间关于最大值范数的端点. *黑龙江大学自然科学学报*, **4**, 14-16.

[3] 吴从炘 (1983) 奥尔里奇空间. 黑龙江科学技术出版社，哈尔滨.

[4] Chen, S.T. (1996) Geometry of Orlicz spaces. Polish Scientific Publisher, Warszawa, 356: 1-204.

[5] 定光桂 (1984) 巴拿赫空间引论. 科学出版社，北京.

[6] Adams, R.A. (1983) Sobolev. 人民教育出版社，北京.