

The Conformal Mapping of Polygonal Domain and Its Application

Huijie Ji

College of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Linfen Shanxi

Email: jihuijie0221@163.com

Received: Nov. 4th, 2015; accepted: Nov. 22nd, 2015; published: Nov. 27th, 2015

Copyright © 2015 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The conformal mapping is the important part of Function of Complex Variables and it has been widely used in various areas of science and technology. Firstly, this paper presents the conformal mapping of the upper half-plane onto polygonal domain and gives the Christoffel-Schwarz transform and its generalizing forms. And then we give the examples of the conformal mapping of the upper half-plane onto polygonal domain.

Keywords

The Conformal Mapping, Polygonal Domain, Christoffel-Schwarz Transform

多角形区域共形映射及其应用

籍慧洁

山西师范大学数学与计算机科学学院, 山西 临汾

Email: jihuijie0221@163.com

收稿日期: 2015年11月4日; 录用日期: 2015年11月22日; 发布日期: 2015年11月27日

摘要

共形映射是复分析的重要部分, 它广泛的应用于科技领域的各个方面。本文首先分析了如何从多角形区

文章引用: 籍慧洁. 多角形区域共形映射及其应用[J]. 理论数学, 2015, 5(6): 284-290.

<http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.56041>

域共形映射为上半平面的方法, 给出了克里斯托费尔 - 施瓦茨变换[1]及其推广形式, 并对推广的广义多角形的克里斯托费尔 - 施瓦茨变换进行了实例分析, 讨论了广义多角形共形映射的求法。

关键词

共形映射, 多角形区域, 克里斯托费尔 - 施瓦茨变换

1. 引言

共形映射是复分析中的一个非常重要的内容, 它在很多的科学技术领域有广泛的应用。特别在绘制地图、飞机设计、解决流体力学、弹性力学、电学等学科的实际问题中, 都能使复杂问题简单化。近年来, 随着计算机技术的发展, 共形映射已广泛应用于辅助几何设计、图形图像设计等领域。共形映射具有一种非常重要的性质: 旋转角不变性和伸缩率不变性, 也就是说, 几何图形经过共形变换后, 它的整体外形发生改变, 但是又局部的保持一定的刚体性质。这种刚性可以满足几何造型设计中的刚性要求[2]。例如: 要研究飞机机翼剖面轮廓形状及它在空中飞行时所受阻力、上升力等, 如按原图计算, 会非常困难和复杂, 如用共形映射把它映成单位圆则会变得比较简单, 这种方法在飞机设计方面有重要应用。

既然共形映射有如此广泛的应用, 我们自然会疑问: 在扩充复平面上, 任意给定两个单连通区域 D 与 G , 是否都能找到一个解析函数使 D 共形映射为 G 呢? 这个问题当 G 为单位圆时, 可通过黎曼存在与唯一性定理得到解决。我们这里要讨论的是如何从上半平面共形映射成预先给定的一个多角形区域。

下面我们分两个部分来介绍。第二部分给出从上半平面共形映射成预先给定的一个多角形区域的克里斯托费尔 - 施瓦茨变换定理及其它的三个退化变换形式, 第三部分通过具体的例子分析克里斯托费尔 - 施瓦茨变换的应用, 最后给出结论。

2. 克里斯托费尔 - 施瓦茨变换

2.1. 共形映射的定义[1]

定义 1: 若函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的邻域内有定义, 且在点 z_0 具有以下两个性质:

(1) 伸缩率不变性: 即在点 z_0 附近, 像点间的无穷小距离与原像点的无穷小距离之比的极限

$$R = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)| \text{ 仅与 } z_0 \text{ 有关, 与过 } z_0 \text{ 的曲线 } C \text{ 之方向无关。}$$

(2) 过 z_0 的任意两曲线的夹角在变换 $w = f(z)$ 下, 既保持大小又保持方向。

则称函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 是保角的。

定义 2: 若函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内单叶且保角, 则称 $w = f(z)$ 是 D 内的共形映射。

2.2. 克里斯托费尔 - 施瓦茨变换

下面给出克里斯托费尔 - 施瓦茨变换定理[1], 它给出了我们把上半平面共形映射成预先给定的一个多角形区域的解析函数。在此, 我们仅给出定理的内容, 其证明可参看[1]第八章第四节。

定理 1: 设(1)有界 n 角形 P_n 的顶点分别为 A_1, A_2, \dots, A_n , 其对应顶角为 $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$, ($0 < \alpha_j < 2, j = 1, 2, \dots, n$);

(2) 函数 $w = f(z)$ 将上半平面 $\text{Im } z > 0$ 共形映射成 P_n ;

(3) z 平面实轴上对应于 w 平面多角形 P_n 的顶点 A_j 的那些点 a_j :

$$-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_j < \dots < a_n < +\infty$$

都是已知的。则

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (z-a_1)^{\alpha_1-1} (z-a_2)^{\alpha_2-1} \cdots (z-a_n)^{\alpha_n-1} dz + C_1 \quad (1)$$

其中 z_0, C 与 C_1 是三个复常数。

注意到 $\sum_{j=1}^n \alpha_j = n-2$, 且(1)的逆变换 $z = f^{-1}(w)$ 将 w 平面上的单连通区域多边形 P_n 共形映射成标准区域上半 z 平面。

推论 1(退化的克里斯托费尔 - 施瓦茨变换): 当 n 角形 P_n 有一个顶点是无穷远点的像, 即 a_1, a_2, \dots, a_n 中有一个如 $a_n = \infty$, 则在公式(1)中丢掉那个关于这个顶点的因子即可, 即

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (z-a_1)^{\alpha_1-1} (z-a_2)^{\alpha_2-1} \cdots (z-a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1} dz + C_1 \quad (2)$$

推论 2(广义多边形的克里斯托费尔 - 施瓦茨变换): 设 n 角形 P_n 有一个或几个顶点在无穷远点, 不妨设有一个如 $A_j = \infty$, 则公式(1)仍成立, 只需要把顶点在无穷远处的那两条直线间的角度, 用这两条直线在有限点处的那个夹角反号代替。

推论 3(把单位圆变成 n 角形的变换[3]): 把 z 平面上的单位圆 $|z| \leq 1$ 变成 w 平面上的 n 角形 P_n 的共形映射是:

$$w = C \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n (z-z_k)^{\frac{\beta_k-1}{\pi}} dz + C_1$$

其中 β_k 是 P_n 的各项角的弧度, z_k 是单位圆周 $|z|=1$ 上与 P_n 的各顶点相对应的点。 z_0, C, C_1 是复常数。

3. 应用举例

很多工程、地图绘制中都会涉及到多角形区域, 故研究多角形区域的共形映射是很重要的内容, 下面我们给出几种应用上述各推论的多角形区域共形映射的例子。

例 1: 将上半平面 $\text{Im } z > 0$ 共形映射成 w 平面上如图 1 的广义多角形区域:

解: 把 w 平面中的区域看成是有四个顶点 A_1, A_2, A_3, A_4 的广义多角形, 两个顶点 A_2 与 A_4 在无穷远。我们选取 $x = \infty$ 对应于顶点 A_3 , $x = 0$ 对应于顶点 A_1 , $x = 1$ 对应于顶点 A_2 , $x = -a$ 对应于顶点 A_3 。

这时四个顶点 A_1, A_2, A_3, A_4 分别对应 $\alpha_1 = \frac{3}{2}, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_4 = 0$, 得到如表 1 的表格:

由克里斯托费尔 - 施瓦茨的两个推论有:

$$\begin{aligned} w &= A \int_0^z \frac{\sqrt{z}}{(z-1)(z+a)} dz + C \int_0^{t^2} \frac{2t^2}{(t^2-1)(t^2+a)} dt + C \\ &= \frac{2A\sqrt{a}}{1+a} \tan^{-1} \frac{z}{\sqrt{a}} + \frac{A}{1+a} \left(\ln \frac{z-1}{z+1} - \pi i \right) + C \end{aligned}$$

由 $z=0 \leftrightarrow w=0$ 得:

$$0 = 0 + \frac{A}{1+a} (\pi i - \pi i) + C \Rightarrow C = 0$$

又当 z 在 $(0,1)$ 上变化时, 对应的点 w 应在正虚轴的 (A_1, A_2) 上变化。

取 $z_1, z_2 \in (0,1)$, 则对应的 w_1, w_2 应为纯虚数。

$$w_1 = \frac{2A\sqrt{a}}{1+a} \tan^{-1} \frac{z_1}{\sqrt{a}} + \frac{A}{1+a} \left(\ln \frac{z_1-1}{z_1+1} - \pi i \right) \quad (3)$$

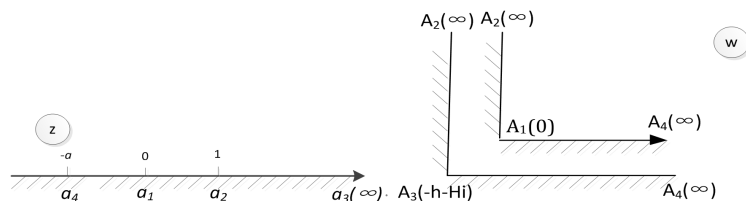


Figure 1. The conformal mapping from polygonal domain of pipeline
图 1. 管道型多角区域共形映射

Table 1. The data of conformal mapping from the polygonal domain of pipeline
表 1. 管道多角区域共形映射的数据对应表

A_j	α_j	a_j
0	$\frac{3}{2}$	0
∞	0	1
$-h-Hi$	$\frac{1}{2}$	∞
∞	0	$-a$

$$w_2 = \frac{2A\sqrt{a}}{1+a} \tan^{-1} \frac{z_2}{\sqrt{a}} + \frac{A}{1+a} \left(\ln \frac{z_2-1}{z_2+1} - \pi i \right) \tag{4}$$

由(3)~(4)，再注意到 $\frac{z_1-1}{z_1+1}$ 或 $\frac{z_2-1}{z_2+1}$ 的辅角均为 π ，则

$$w_1 - w_2 = \frac{2A\sqrt{a}}{1+a} \left(\tan^{-1} \frac{z_1}{\sqrt{a}} - \tan^{-1} \frac{z_2}{\sqrt{a}} \right) + \frac{A}{1+a} \left(\ln \frac{z_1-1}{z_1+1} - \ln \frac{z_2-1}{z_2+1} \right)$$

上式左边为纯虚数，右边也为纯虚数，故 A 为纯虚数，不妨设为 A_0i (A_0 为实数)。又因 $z = 0 \leftrightarrow w = -h - Hi$ ，则

$$-h - Hi = \frac{2A\sqrt{a}}{1+a} \tan^{-1} \infty + \frac{A}{1+a} (\ln 1 - \pi i) = \frac{\sqrt{a}\pi}{1+a} A_0i + \frac{A_0\pi}{1+a}$$

比较上式两端，可得

$$-H = \frac{\sqrt{a}\pi}{1+a} A_0 \tag{5}$$

$$-h = \frac{A_0\pi}{1+a} \tag{6}$$

由(5) (6)可知

$$a = \frac{H^2}{h^2}, \quad A_0 = -\frac{h^2 + H^2}{\pi h}$$

则 $A = A_0i = \frac{h^2 + H^2}{\pi hi}$ 。

故所求保形映射为：

$$w = \frac{h^2 + H^2}{\pi hi} \int_0^z \frac{\sqrt{z}}{(z-1)(z+a)} dz$$

例 2: 求把图 2 中上半 z 平面变成 w 平面上的如图 2 区域的共形映射, 对应点如图 2 所示。

解: 把 w 平面中的区域看成是有三个顶点 B_1 、 B_2 、 B_3 的广义多角形, 两个顶点 B_2 与 B_3 在无穷远。我们选取 $x = \infty$ 对应于顶点 B_3 , $x = -1$ 对应于顶点 B_1 , $x = 0$ 对应于顶点 B_2 。这时在顶点 B_1 , $\alpha_1 = 2$; 在顶点 B_2 , $\alpha_2 = 0$; 在顶点 B_3 , $\alpha_3 = -1$ 。故由题意可以得到如表 2 的各点的对应关系:

由克里斯托费尔 - 施瓦茨的两个推论有:

$$w = A \int_0^z (z+1)^{2-1} (z-0)^{0-1} dz + C = A \int_0^z \left(1 + \frac{1}{z}\right) dz + C = A(z + \ln z) + C$$

为了确定常数 A 和 C , 把上式改写为:

$$u + vi = (A_1 + A_2 i)(x + iy + \ln|z| + i \arg z) + (C_1 + iC_2) \quad (7)$$

比较两端虚部得:

$$v = A_1 y + A_2 x + A_2 \ln|z| + A_1 \arg z + C_2 \quad (8)$$

当 w 沿 AB 趋于 ∞ 时, $v = \pi$, 这时 z 沿实轴从 -1 趋于 0 , 于是 $y = 0, \arg z = \pi$, 于是由(8)知

$$\pi = \lim_{x \rightarrow 0^-} (A_1 \cdot 0 + A_2 x + A_2 \ln|z| + A_1 \pi + C_2)$$

为使上式成立, A_2 必为 0 , 故

$$\pi = A_1 \pi + C_2 \quad (9)$$

又当 w 沿 OB 趋于 ∞ 时, $v = 0$, 这时 z 沿正实轴趋于 0 , 于是 $y = 0, \arg z = 0$, 于是由(8)知

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (A_1 \cdot 0 + C_2) = C_2 \quad (10)$$

由(9)与(10)知 $A_1 = 1$, 那么 $A = A_1 + A_2 i = 1; C = C_1 + C_2 i = C_1$, 所以 $w = (z + \ln z) + C_1$, 最后由对应关系 $z = -1 \leftrightarrow w = \pi i$, 有 $C_1 = 1$ 。

综上所述, 共形映射为: $w = (z + \ln z) + 1$

例 3: 求把图 3 中 z 平面上的单位圆变成 w 平面上的如图 3 的正方形区域的共形映射, 对应点如图 3 所示。

解: 由题意以及推论 3 可知, z 平面上各点与 w 平面中正方形各顶点有如表 3 的对应关系:

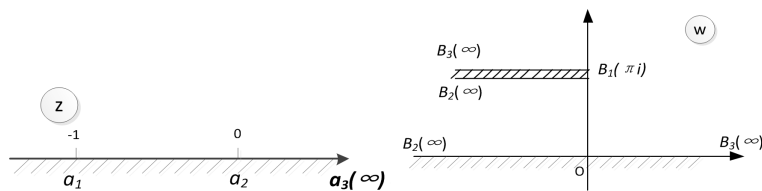


Figure 2. The conformal mapping from polygonal domain of upper half plane cutting by ray

图 2. 沿射线割破平面的多角区域共形映射

Table 2. The data of the conformal mapping from polygonal domain of upper half plane cutting by ray

表 2. 沿射线割破平面的多角区域共形映射数据对应表

B_j	α_j	a_j
πi	2	-1
∞	0	0
∞	-1	∞

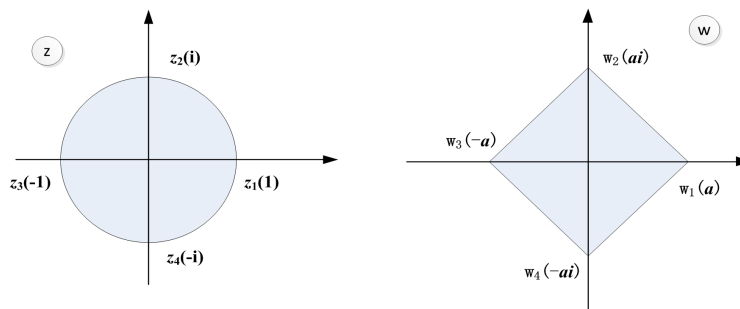


Figure 3. The conformal mapping from unit circle to square
图 3. 单位圆共形映射为正方形

Table 3. The data of conformal mapping from unit circle to square
表 3. 单位圆共形映射为正方形的数据对应表

z_j	w_j	β_j
1	a	$\frac{\pi}{2}$
i	ai	$\frac{\pi}{2}$
-1	$-a$	$\frac{\pi}{2}$
$-i$	$-ai$	$\frac{\pi}{2}$

由推论 3 的结论有:

$$w = C \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{\beta_k - 1} dz + C_1 = C \int_{z_0}^z [(z-1)(z-i)(z+1)(z+i)]^{-\frac{1}{2}} dz + C_1 = C \int_{z_0}^z \frac{1}{\sqrt{1-z^4}} dz + C_1$$

根据对应关系:

$z=1 \leftrightarrow w=a$ 有:

$$a = C \int_{z_0}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} + C_1 \quad (11)$$

$z=-1 \leftrightarrow w=-a$ 有:

$$-a = C \int_{z_0}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} + C_1 \quad (12)$$

则(11)-(12)得:

$$2a = C \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

由留数定理可解得:

$$C = \frac{4a\sqrt{2\pi}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}$$

根据(11)+(12)得:

$$C_1 = \frac{C}{2} \left(\int_{z_0}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} + \int_{z_0}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} \right) \quad (13)$$

又根据对应关系:

$z = i \leftrightarrow w = ai$ 有:

$$ai = C \int_{z_0}^i \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} + C_1 \quad (14)$$

$z = -i \leftrightarrow w = -ai$ 有:

$$-ai = C \int_{z_0}^{-i} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} + C_1 \quad (15)$$

则(14)+(15)得:

$$C_1 = \frac{C}{2} \left(\int_{z_0}^i \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} + \int_{z_0}^{-i} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} \right) \quad (16)$$

联立(13)与(16)可得: $z_0 = 0$

再把 $z_0 = 0$ 及 $C = \frac{4a\sqrt{2\pi}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}$ 代入(13), 立即得到 $C_1 = 0$ 。

综上所述, 由单位圆到正方形的共形映射为:

$$w = \frac{4a\sqrt{2\pi}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

4. 结论

本文主要讨论了使上半平面映射为多角形区域的共形映射的形式。实际上, 共形映射可以解决很多其他领域的问题, 比如地图绘制、零件的构造、人脸识别等方面, 随着计算机技术的不断发展, 共形映射的作用越来越广泛。

参考文献 (References)

- [1] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988.
- [2] 薛均晓. 保形映射理论在几何造型中的某些应用研究[D]: [博士论文]. 大连: 大连理工大学, 2009.
- [3] 钟玉泉. 复变函数学习指导书[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988.