Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(1), 23-29
Published Online January 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.61004

On Almost Sure Convergence for Weighted Sums of Arbitrarily Dependent Random Sequences

Qiong Wang, Ying Cui, Aihua Fan*

School of Mathematics & Physics Science and Engineering, Anhui University of Technology, Ma'anshan Anhui
Email: 1832400104@qq.com, *fah@ahut.edu.cn

Received: Dec. 17th, 2015; accepted: Jan. 19th, 2016; published: Jan. 22nd, 2016

Abstract

Let $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of arbitrarily dependent random variables with $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \prec X$. In this paper, by using the Borel-Cantelli lemma and the pure analysis method in probability limit theory, some strong convergence of a class of dependent random variables is discussed and some sufficient conditions on strong law of large numbers for weighted sums of arbitrarily random sequences are also obtained. Some classical results are generalized.

Keywords

Randomized Controlled, Weighted Sums, Strong Law of Large Numbers

关于任意随机序列加权和的强收敛性

汪　琼，崔　影，范爱华*

安徽工业大学数理科学与工程学院，安徽　马鞍山
Email: 1832400104@qq.com, *fah@ahut.edu.cn

收稿日期：2015年12月17日；录用日期：2016年1月19日；发布日期：2016年1月22日

*通讯作者。

文章引用: 汪琼, 崔影, 范爱华. 关于任意随机序列加权和的强收敛性[J]. 理论数学, 2016, 6(1): 23-29.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.61004

摘　要

设$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$是一列任意相依随机变量序列，且$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \prec X$。本文利用Borel-Cantelli引理与概率论极限理论中的纯分析方法，讨论一类相依随机变量序列的强收敛性，得到了任意相依随机变量序列加权和的强大数定律普遍成立的若干充分条件，并推广了已有的结果。

关键词

随机控制，加权和，强大数定律

1. 引言

关于独立随机序列的极限理论曾是概率论极限理论研究的中心课题，并取得了十分丰富的成果，其系统的结果总结在文献[1] [2]等专著中，对任意相依随机序列的极限行为的研究也是有许多有意义的结果。文献[3]利用矩估计的方法研究了同分布任意相依随机变量序列的强大数定律，文献[4]研究任意随机序列的强收敛性，作为推论，得到了一类鞅差序列的强大数定律，一类随机序列公平比的强极限定律以及任意随机序列部分和估计定理，文献[5]利用区间剖分法构造几乎处处收敛的鞅，得到了一个对任意 M-值随机变量序列普遍成立的强极限定理，作为推论得到一个精细的 Borel-Cantelli 引理，文献[6]在对随机变量没有任何独立性假设的条件下，讨论了随机序列的强大数定律，文献[7] [8]将一般随机变量序列的强大数定律的研究推广到任意 B 值空间上来研究。本文中我们利用随机受控的概念，结合经典的 Borel-Cantelli 引理与概率论极限理论中的纯分析方法，讨论一类相依随机变量序列的强收敛性，给出了任意随机变量序列加权和的强大数定律普遍成立的若干充分条件，将文献[9]中的结果推广到一般的随机变量序列中。

本文中 C 表示常数，它在不同的表达式中可表示不同的值。

2. 预备知识

定义 2.1 [10] 称随机变量序列$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$被随机变量 X 控制，若存在一个常数 $D(0<D<\infty)$，有

$$P(|X_n|>t) \le DP(|DX|>t)\ (\forall t \ge 0, n \ge 1),$$

简记为$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \prec X$。

引理 2.1 [10] X_0 与 X 都是随机变量，且 $X_0 \prec X$。即

$$P(|X_n|>t) \le DP(|DX|>t)\ (\forall t \ge 0, 0<D<\infty),$$

则对 $\forall p>0$，有

$$E|X_0|^p I_{[|X_0|\le t]} \le Dt^p P(|DX|>t) + D^{p+1}E|X|^p I_{[|DX|\le t]}\ \ (t \ge 0).$$

其中 I_A 表示 A 的示性函数。

3. 主要结论与证明

定理 3.1 设$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$是随机变量序列，且$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \prec X$，$\{a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$是两个常数序列，满足 $a_n \ne 0$，$0<b_n \uparrow$，$\frac{b_n}{|a_n|}\uparrow$，并且

$$\frac{b_n^2}{a_n^2}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{a_j^2}{b_j^2}=O(n), \tag{1}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|a_nX\right|>Db_n\right)<\infty, \tag{2}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}E\left|X_n\right|^2 I_{\left[\left|a_nX_n\right|\le b_nD^2\right]}<\infty, \tag{3}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}a_jX_jI_{\left[\left|a_jX_j\right|\le D^2b_j\right]}}{b_n}=0\text{，a.s.} \tag{4}$$

证明 令 $c_0=0$， $c_n=\dfrac{b_n}{\left|a_n\right|}$， $n\ge 1$ (文中所遇 c_n 均如此定义)。由定义 2.1 及引理 2.1，知

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}E\left|X_n\right|^2 I_{\left[\left|a_nX_n\right|\le b_nD^2\right]}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n^2}E\left|X_n\right|^2 I_{\left[\left|X_n\right|\le c_nD^2\right]}\\
&\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n^2}\left[D\left(c_nD^2\right)^2P\left(\left|DX\right|>c_nD^2\right)+D^3E\left|X\right|^2 I_{\left[\left|DX\right|\le c_nD^2\right]}\right]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}D^5P\left(\left|X\right|>c_nD\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D^3}{c_n^2}E\left|X\right|^2 I_{\left[\left|X\right|\le c_nD\right]}\\
&=D^5\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|X\right|>c_nD\right)+D^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n^2}E\left|X\right|^2 I_{\left[\left|X\right|\le c_nD\right]}\\
&=I_1+I_2.
\end{aligned}$$

由(2)知 I_1 式有限，往证 I_2 式有限。注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n^2}E\left|X\right|^2 I_{\left[\left|X\right|\le c_nD\right]}&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}E\left|X\right|^2 I_{\left[c_{j-1}D<\left|X\right|\le c_jD\right]}\frac{1}{c_n^2}\\
&\le\sum_{j=1}^{\infty}E\left|X\right|^2 I_{\left[c_{j-1}D<\left|X\right|\le c_jD\right]}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{c_n^2}\\
&\le\sum_{j=1}^{\infty}P\left(c_{j-1}D<\left|X\right|<c_jD\left(c_jD\right)^2\right)\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{c_n^2},
\end{aligned}$$

由(1)得上述不等式右边

$$\begin{aligned}
&\le C\sum_{j=1}^{\infty}jP\left(c_{j-1}D<\left|X\right|<c_jD\right)\le C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j}P\left(c_{j-1}D<\left|X\right|<c_jD\right)\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}P\left(c_{j-1}D<\left|X\right|<c_jD\right)=C\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|X\right|<c_{n-1}D\right)\\
&\le C\left\{\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|X\right|<c_nD\right)+1\right\}<\infty.
\end{aligned}$$

即得 I_2 式有限，由此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}E\left|X_n\right|^2 I_{\left[\left|a_n X_n\right|\le b_n D^2\right]}<\infty .$$

往证(4)成立。令

$$X_j'=X_j I_{\left[\left|a_j X_j\right|\le b_j D^2\right]},$$

由(3)知

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j^2}{b_j^2}E\left|X_j'\right|^2<\infty ,$$

因此

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j^2}{b_j^2}E\left|X_j'\right|^2<\infty \text{, a.s.}$$

由 Kroncher 引理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_j^2}\sum_{j=1}^{n}a_j^2\left|X_j'\right|^2=0 \text{, a.s.}$$

由 C_{r-} 不等式有

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}a_j X_j'\right|^2\le\frac{1}{b_n^2}\sum_{j=1}^{n}a_j^2\left|X_j'\right|^2\to 0 ,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}a_j X_n'=0 \text{, a.s.}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}a_j X_j I_{\left[\left|a_j X_j\right|\le D^2 b_j\right]}}{b_n}=0 \text{, a.s.}$$

定理 3.2 设$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$是随机变量序列，且$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\prec X$。$\{a_n,b_n\}_{n=1}^{\infty}$是两个常数序列，满足$a_n\ne 0$，$0<b_n\uparrow$，$\frac{b_n}{\left|a_n\right|}\uparrow$，且

$$\frac{b_n}{n\left|a_n\right|}\to\infty ,\quad \frac{b_n}{n\left|a_n\right|}=O\left(\inf_{j\ge n}\frac{b_j}{j\left|a_j\right|}\right), \tag{5}$$

若(2)成立，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}a_j X_j=0 \text{, a.s.}$$

证明 由

$$\frac{b_n}{n\left|a_n\right|}=O\left(\inf_{j\ge n}\frac{b_j}{j\left|a_j\right|}\right)$$

可知

$$\frac{b_n^2}{a_n^2}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{a_j^2}{b_j^2}=O(n)$$

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|a_nX|>Db_n\right)<\infty,$$

由定理 3.1 知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}a_jX_jI_{\left[|a_jX_j|\le D^2b_j\right]}}{b_n}=0\text{, a.s.}$$

所以若有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}a_jX_jI_{\left[|a_jX_j|\le D^2b_j\right]}}{b_n}=0\text{，a.s.} \tag{6}$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}a_jX_j=0\text{, a.s.}$$

往证(6)成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X_n\ne X_n'\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|X_n|>c_nD^2\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}DP\left(|X_n|>c_nD\right)<\infty,$$

由 B-C 引理知

$$P\left(X_n\ne X_n',i.o\right)=0\text{,}$$

从而(6)成立，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}a_jX_j=0\text{, a.s.}$$

定理 3.3 设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是随机变量序列，且 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\prec X$ 。$\{a_n,b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两个常数序列，满足 $a_n\ne 0$，$0<b_n\uparrow\infty$，$\frac{b_n}{|a_n|}\uparrow$，并且

$$\frac{b_n}{n|a_n|}\to\infty\text{，}\quad\frac{b_n}{n|a_n|}=O\left(\inf_{j\ge n}\frac{b_j}{j|a_j|}\right),$$

如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|a_nX|>D_1b_n\right)<\infty\left(D<D_1\right), \tag{7}$$

成立，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}a_jX_j=0\text{, a.s.}$$

证明 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|a_n X\right| > D_1 b_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|a_n X\right| > D b_n\right),$$

由定理 3.2 易知只需证

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|a_n X\right| > D b_n\right) < \infty,$$

令 $\alpha_n = \inf_{j \ge n} \frac{c_j}{j}\left(n \ge 1\right)$，易知 $0 < a_n \uparrow \infty$ 且有

$$\frac{c_n}{n} \le C\alpha_n \le C\frac{c_n}{n}\left(C > 1\right). \tag{8}$$

令 $m = \left[\frac{CD_1}{D}\right] + 1$，由(8)得

$$D_1 c_n \le CD_1 n\alpha_n \le Dmn\alpha_n \le Dmn\alpha_{mn} \le Dc_{mn}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|X\right| > D_1 c_n\right) \ge \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|X\right| > Dc_{mn}\right) \ge \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|X\right| > Dc_{mn+j}\right) \quad \left(j = 0,1,2,3,\cdots,m-1\right)$$

由(7)知

$$\infty > m\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|X\right| > D_1 c_n\right) \ge \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|X\right| > Dc_{mn+j}\right) = \sum_{n=m}^{\infty} P\left(\left|X\right| > Dc_n\right),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} a_j X_j = 0, \text{ a.s.}$$

基金项目

安徽工业大学青年教师科研基金(QZ201314)；安徽省自然科学基金(1408085MA04)；安徽工业大学研究生创新基金资助(2015126)。

参考文献 (References)

[1] 格涅坚科, 科尔莫哥洛夫. 相互独立随机变数之和的极限分布[M]. 北京: 科学出版社, 1955.

[2] 佩特罗夫. 独立随机变量之和的极限定理[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1991.

[3] Rosalsky, A. and Stoica, G. (2010) On the Strong Law of Large Numbers for Identically Distributed Random Variables Irrespective of their Joint Distributions. *Statistics & Probability Letters*, **80**, 1265-1270. http://dx.doi.org/10.1016/j.spl.2010.04.005

[4] 杨卫国, 刘文. 关于任意随机序列的强收敛性[J]. 数学物理学报, 2003, 23(5): 565-572.

[5] 汪忠志. 关于 *M* 值随机序列的一个普遍成立的强大数定理[J]. 纯粹数学与应用数学, 2004, 20(4): 327-333.

[6] Korchevsky, V.M. (2011) On the Strong Law of Large Numbers for Sequences of Random Variables without the Independence Condition. *Vestnik St. Petersburg University*: *Mathematics*, **44**, 268-271. http://dx.doi.org/10.3103/S1063454111040066

[7] 汪忠志, 徐付霞. 关于 B 值随机元序列的强收敛性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2002, 18(2): 187-190.

[8] 张丽娜. 任意 B 值随机变量序列的强收敛性[J]. 数学杂志, 2002, 22(3): 297-300.

[9] Sung, S.H. (1998) SLIN for Weighted Sums of Stochastically Dominated Pairwish Independent Random Variables. *Communications of the Korean Mathematical Society*, **13**, 377-384.

[10] 刘京军, 甘师信. 随机变量序列加权和的强收敛性[J]. 数学学报, 1998, 41(4): 823-832.