Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(1), 30-36
Published Online January 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.61005

A Duality Formula between Prime Factors

Jiming Yang

Department of Mathematics, Yuxi Normal University, Yuxi Yunnan
Email: jmy1963@163.com

Received: Nov. 25th, 2015; accepted: Jan. 22nd, 2016; published: Jan. 28th, 2016

Copyright © 2016 by author and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

Abstract

In this paper we generalize K. Alladi's duality formula between prime factors to number theoretic functions valued in any commutative ring with identity, and deduce several other kind of duality formulae.

Keywords

Duality Formula, Commutative Ring with Identity, Prime Factor, Inversion Formula

素因数之间的一个对偶公式

杨继明

玉溪师范学院数学系，云南 玉溪
Email: jmy1963@163.com

收稿日期：2015年11月25日；录用日期：2016年1月22日；发布日期：2016年1月28日

摘　要

本文把K. Alladi关于素因数之间的一个对偶公式推广到取值在有单位元的交换环的数论函数上，并且得到了若干其他类型的对偶公式。

文章引用：杨继明. 素因数之间的一个对偶公式[J]. 理论数学, 2016, 6(1): 30-36.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.61005

关键词

对偶公式，有单位元的交换环，素因数，反转公式

1. 引言

著名的 Möbius 反转公式在数论及自然科学的研究中具有非常重要的作用。刘华宁、郗平、易媛和杨继明分别在文[1]-[3]中推广了 Möbius 反转公式。

定义 设整数 $n>1$，n 的最大公素因数用 $P(n)$ 表示，n 的最小素因数用 $p(n)$ 表示。规定 $P(1)=p(1)=1$。

Krishnaswami Alladi 在文[4]中证明了如下的命题 1。

命题 1 设 $f(n)$ 是定义在正整数集上的数论函数，$f(1)=0$，则

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(p(d))=-f(P(n)), \tag{1}$$

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(P(d))=-f(p(n)), \tag{2}$$

这里 $\sum_{d|n}$ 表示对 n 的所有正因数 d 求和，$\mu(n)$ 为 Möbius 函数，即

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{当} n=1 \text{时},\\ (-1)^{\omega(n)}, & \text{当} n>1 \text{且} n \text{没平方因子时},\\ 0, & \text{当} n>1 \text{且} n \text{有平方因子时},\end{cases}$$

其中 $\omega(n)$ 表示 n 的不同素因数的个数。

我们把公式(1)和(2)称为 Alladi 对偶公式。高静和刘华宁在文[5]中对这一对偶公式进行了推广，得到了如下的命题 2。

命题 2 设 s 为实数，整数 $n>1$ 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$，$f(n)$ 为正整数集上的数论函数，$f(1)=0$，则

$$\sum_{d|n}\lambda(d)\prod_{p^\beta\|d}\binom{s}{\beta}\prod_{p^\alpha\|n/d}\binom{s-1+\alpha}{\alpha}f(p(d))=-f(P(n)), \tag{3}$$

$$\sum_{d|n}\lambda(d)\prod_{p^\beta\|d}\binom{s}{\beta}\prod_{p^\alpha\|n/d}\binom{s-1+\alpha}{\alpha}f(P(d))=-f(p(n)), \tag{4}$$

其中 $\prod_{p^i\|n}$ 表示对恰好整除 n 的所有素因子的方幂指数求积，

$$\lambda(n)=\begin{cases}1, & \text{当} n=1 \text{时},\\ \prod_{p^\alpha\|n}(-1)^\alpha, & \text{当} n>1 \text{时},\end{cases}$$

为 Liouville 函数，$\binom{t}{j}=\frac{t(t-1)\cdots(t-j+1)}{j!}$ 表示广义二项式系数，规定 $\binom{t}{0}=1$。

以上两个命题考虑的数论函数都是取值在复数域中的。本文根据文[3]的结果与方法，并受文[5]启发，

考虑取值在有单位元的交换环中的数论函数，得到了对偶公式(1)，(2)的推广，还得到了若干其他类型的对偶公式。

此外，我们发现对偶公式(3)，(4)是不正确的，并且把它改正过来。

如无特别说明，在本文中，R 表示一个有单位元的交换环。

2. Alladi 对偶公式在有单位元的交换环上的推广

设 R 是一个有单位元的交换环，其单位元和零元分别用 1 和 0 表示。在本文中，为方便起见，我们规定环 R 的零元的零次幂为单位元，即 $0^0=1$。

我们把定义在正整数集合 N^+ 上而在环 R 中取值的数论函数的全体所成的集合用 $\Re$ 表示。易得如下引理。

引理 设 $\xi(n),\eta(n)\in\Re$，且

$$\sum_{d|n}\xi(d)\eta\left(\frac{n}{d}\right)=\begin{cases}1, & \text{当}n=1\text{时},\\ 0, & \text{当}n>1\text{时},\end{cases}$$

而 $f(n),g(n)$ 是 $\Re$ 中任意两个函数，则

$$f(n)=\sum_{d|n}\xi(d)g\left(\frac{n}{d}\right)\Leftrightarrow g(n)=\sum_{d|n}\eta(d)f\left(\frac{n}{d}\right).$$

定义 2 [3] 设 $\xi(n)$ 是一个定义在正整数集上而取值在环 R 中的数论函数，若 $\xi(mn)=\xi(m)\xi(n)(\forall(m,n)=1)$ 且 $\xi(1)=1$，则 $\xi(n)$ 叫做积性函数。

定理 1 设 $f(n)$ 是定义在正整数集上取值再环 R 中的数论函数，$f(1)=0$，$\xi(n),\eta(n)$ 为两个积性函数，

$$\sum_{d|n}\xi(d)\eta\left(\frac{n}{d}\right)=\begin{cases}1, & \text{当}n=1\text{时},\\ 0, & \text{当}n>1\text{时},\end{cases}$$

则

$$\sum_{d|n}\xi\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(p(d))=-\xi(n)f(P(n)),\tag{5}$$

$$\sum_{d|n}\xi\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(P(d))=-\xi(n)f(p(n)),\tag{6}$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\xi(d)f(p(d))=-\eta(n)f(P(n)),\tag{7}$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\xi(d)f(P(d))=-\eta(n)f(p(n)).\tag{8}$$

证明 首先证明(5)式成立。

当 $n=1$ 时，(5)式显然成立。下面设 $n>1$，且 n 的标准分解式为

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r},$$

其中 $p_1,\cdots,p_r$ 为互不相同的素数，且 $p_1<\cdots<p_r$。设 $n=p_1^{\alpha_1}n_1$，$n_1=p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$，则

$$\begin{aligned}
&\sum_{d|n}\xi\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(p(d))=\sum_{d_0|p_1^{\alpha_1}}\xi\left(\frac{p_1^{\alpha_1}}{d_0}\right)\eta(d_0)\sum_{d_1|n_1}\xi\left(\frac{n_1}{d_1}\right)\eta(d_1)f(p(d_0d_1))\\
&=\xi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\sum_{d_1|n_1}\xi\left(\frac{n_1}{d_1}\right)\eta(d_1)f(p(d_1))+\left[\sum_{d_1|n_1}\xi\left(\frac{n_1}{d_1}\right)\eta(d_1)\right]f(p_1)\sum_{\substack{d_0|p_1^{\alpha_1}\\ d_0\neq 1}}\xi\left(\frac{p_1^{\alpha_1}}{d_0}\right)\eta(d_0)\\
&=\xi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\sum_{d|n_1}\xi\left(\frac{n_1}{d}\right)\eta(d)f(p(d))\\
&=\cdots\\
&=\xi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\cdots\xi\left(p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}\right)\sum_{d|p_r^{\alpha_r}}\xi\left(\frac{p_r^{\alpha_r}}{d}\right)\eta(d)f(p(d))\\
&=\xi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\cdots\xi\left(p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}\right)\sum_{\substack{d|p_r^{\alpha_r}\\ d\neq 1}}\xi\left(\frac{p_r^{\alpha_r}}{d}\right)\eta(d)f(p(d))\\
&=\xi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\cdots\xi\left(p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}\right)\left[\sum_{d|p_r^{\alpha_r}}\xi\left(\frac{p_r^{\alpha_r}}{d}\right)\eta(d)-\xi\left(p_r^{\alpha_r}\right)\right]f(p_r)\\
&=-\xi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\cdots\xi\left(p_r^{\alpha_r}\right)f(p_r)\\
&=-\xi(n)f(P(n)).
\end{aligned}$$

于是，当 $n>1$ 时，(5)式仍然成立。

同理，(7)式成立。由(7)式及引理，易得(6)式成立。由(5)式及引理，易得(8)式成立。

定理 2 设 $f(n)$ 是定义在正整数集上取值在环 R 中的数论函数，$f(1)=0$，$a\in R$，k 是一个正整数，

$$\xi(n)=\begin{cases}1, & 当n=1时,\\ \prod\limits_{p^i\|n}\binom{k-1+i}{i}a^i, & 当n>1时;\end{cases}$$

$$\eta(n)=\begin{cases}1, & 当n=1时,\\ \prod\limits_{p^i\|n}(-1)^i\binom{k}{i}a^i, & 当n>1且n无k+1次方因子时,\\ 0, & 当n>1且n有k+1次方因子时,\end{cases}$$

则

$$\sum_{d|n}\xi\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(p(d))=-\xi(n)f(P(n)),$$

$$\sum_{d|n}\xi\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(P(d))=-\xi(n)f(p(n)),$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\xi(d)f(p(d))=-\eta(n)f(P(n)),$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\xi(d)f(P(d))=-\eta(n)f(p(n)).$$

证明 由文[3]定理 5 得，$\xi(n),\eta(n)$ 是满足定理 1 条件的两个积性函数，故由定理 1 可得定理 2 的结论。

在定理 2 中，取 $a=1,k=1$ 可得如下推论 1。

推论 1 设 $f(n)$ 是定义在正整数集上取值在环 R 中的数论函数，$f(1)=0$，则

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(p(d))=-p(P(n)), \tag{9}$$

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(P(d))=-f(p(n)), \tag{10}$$

$$\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f(p(d))=-\mu(n)f(P(n)), \tag{11}$$

$$\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f(P(d))=-\mu(n)f(p(n)), \tag{12}$$

其中 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数。

当以上推论 1 中的 R 为复数域时，公式(9)，(10)即为 Alladi 对偶公式(1)，(2)；而公式(11)，(12)为新增的一对对偶公式。

在定理 2 中，取 $a=-1,k=1$ 可得如下推论 2。

推论 2 设 $f(n)$ 是定义在正整数集上取值在环 R 中的数论函数，$f(1)=0$，则

$$\sum_{d|n}\lambda\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(p(d))=-\lambda(n)f(P(n)),$$

$$\sum_{d|n}\lambda\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(P(d))=-\lambda(n)f(p(n)),$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\lambda(d)f(p(d))=-\eta(n)f(P(n)),$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\lambda(d)f(P(d))=-\eta(n)f(p(n)),$$

其中 $\lambda(n)$ 为 Liouville 函数，

$$\eta(n)=\begin{cases}1, & 当n=1,或n>1且n无平方因子时,\\ 0, & 当n>1且n有平方因子时.\end{cases}$$

定理 3 设 $f(n)$ 是定义在正整数集上取值在环 R 中的数论函数，$f(1)=0$，

$$\xi(n)=\begin{cases}1, & 当n=1时,\\ \prod_{p^i\|n}2^{i-1}, & 当n>1时,\end{cases}$$

$$\eta(n)=\begin{cases}1, & 当n=1时,\\ (-1)^{\omega(n)}, & 当n>1时,\end{cases}$$

其中 $\omega(n)$ 表示 n 的不同素因数的个数，则

$$\sum_{d|n}\xi\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(p(d))=-\xi(n)f(P(n)),$$

$$\sum_{d|n}\xi\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(P(d))=-\xi(n)f(p(n)),$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\xi(d)f(p(d))=-\eta(n)f(P(n)),$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\xi(d)f(P(d))=-\eta(n)f(p(n)).$$

证明 由文[3]定理 2 的推论得，$\xi(n),\eta(n)$是满足定理 1 条件的两个积性函数，故由定理 1 可得定理 3 的结论。

定理 4 设 $f(n)$是定义在正整数集上取值在环 R 中的数论函数，$f(1)=0$，而 $a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 是环 R 中的一个无穷序列，

$$b_i=\sum_{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i}(-1)^{\sum_{j=1}^{i}k_j}\frac{\left(\sum_{j=1}^{i}k_j\right)!}{\prod_{j=1}^{i}k_j!}\prod_{j=1}^{i}a_j^{k_j},\ i=1,2,\cdots$$

$$\xi(n)=\begin{cases}1, & \text{当}n=1\text{时},\\ \prod_{p^i\|n}a_i, & \text{当}n>1\text{时};\end{cases}\quad \eta(n)=\begin{cases}1, & \text{当}n=1\text{时},\\ \prod_{p^i\|n}b_i, & \text{当}n>1\text{时}.\end{cases}$$

则

$$\sum_{d|n}\xi(n)\eta(d)f(p(d))=-\xi(n)f(P(n)),$$

$$\sum_{d|n}\xi\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(P(d))=-\xi(n)f(p(n)),$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\xi(d)f(p(d))=-\eta(n)f(P(n)),$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\xi(d)f(P(d))=-\eta(n)f(p(n)).$$

证明 由文[3]定理 3 得，$\xi(n),\eta(n)$是满足定理 1 条件的两个积性函数，故由定理 1 可得定理 4 的结论。

在定理 4 中，取 $a_1=\cdots=a_s=-1,a_i=0,i=s+1,s+2,\cdots$，可得如下推论。

推论 设 s 是一个正整数，$f(n)$是定义在正整数集取值在环 R 中的数论函数，$f(1)=0$，

$$b_i=\sum_{k_1+2k_2+\cdots+sk_s=i}\frac{\left(\sum_{j=1}^{s}k_j\right)!}{\prod_{j=1}^{s}k_j!},i=1,2,\cdots$$

$$\xi(n)=\begin{cases}1, & \text{当}n=1\text{时},\\ (-1)^{\omega(n)}, & \text{当}n>1\text{且}n\text{无}s+1\text{次平方因子时},\\ 0, & \text{当}n>1\text{且}n\text{有}s+1\text{次平方因子时},\end{cases}$$

其中，$\omega(n)$表示 n 的不同素因子的个数，则

$$\sum_{d|n}\xi\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(p(d))=-\xi(n)f(P(n)),$$

$$\sum_{d|n}\xi\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(P(d))=-\xi(n)f(p(n)),$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\xi(d)f(p(d))=-\eta(n)f(P(n)),$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\xi(d)f(P(d))=-\eta(n)f(p(n)).$$

3. 其他讨论

在本节中，我们指出文[5]定理(即命题 2)所存在的错误，并把它改正过来。

在命题 2 中，取 $s=2$， $f(n)=n-1$，则当 $n=3$ 时，(3)，(4)两是的左边都为

$$\lambda(1)\binom{2}{0}\binom{2}{1}f(1)+\lambda(3)\binom{1}{0}\binom{1}{0}f(3)=0+(-1)^{1}\times2\times1\times2=-4,$$

但是(3)，(4)两式的右边都为 $-f(3)=-2$，故(3)，(4)两式都是错误的。由本文定理 1 及文[1]引理 2，易得如下命题 3。

命题 3 设 s 为一个实数， $f(n)$ 是定义在正整数集上取值在复数域中的数论函数， $f(1)=0$，

$$\xi(n)=\begin{cases}1, & \text{当} n=1 \text{时},\\ \prod\limits_{p^{\alpha}\|n}\dbinom{s-1+\alpha}{\alpha}, & \text{当} n>1 \text{时},\end{cases}$$

$$\eta(n)=\begin{cases}1, & \text{当} n=1 \text{时},\\ \lambda(n)\prod\limits_{p^{\beta}\|n}\dbinom{s}{\beta}, & \text{当} n>1 \text{时},\end{cases}$$

其中 $\lambda(n)$ 为 Liouville 函数，则

$$\sum_{d|n}\xi\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(p(d))=-\xi(n)f(P(n)), \tag{13}$$

$$\sum_{d|n}\xi\left(\frac{n}{d}\right)\eta(d)f(P(d))=-\xi(n)f(p(n)), \tag{14}$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\xi(d)f(p(d))=-\eta(n)f(P(n)), \tag{15}$$

$$\sum_{d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\xi(d)f(P(d))=-\eta(n)f(p(n)). \tag{16}$$

由命题 3 可知，应该把(3)，(4)两式分别改正为(13)，(14)两式。相应于命题 2，我们这里还多得到了一对对偶公式(15)和(16)。

参考文献 (References)

[1] Liu, H.N. (2004) An Extension of the Möbius Inverse Formula. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, **24**, 51-55 (in Chinese).

[2] Xi, P. and Yi, Y. (2009) On Generalized Möbius Inversion Formulae. *Acta Mathematica Sinica Sinica*, *Chinese Series*, **52**, 1135-1140 (in Chinese).

[3] Yang, J.M. (2014) A Generalization of Möbius Inversion Formula. *Journal of Baoji University of Arts and Scienses* (*Natural Science*), **34**, 1-7 (in Chinese).

[4] Alladi, K. (1977) Duality between Prime Factors and an Application to the Prime Number Theorem for Arithmetic Progressions. *Journal of Number Theory*, **97**, 436-451. http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X(77)90005-1

[5] Kao, J. and Liu, H.N. (2007) A New Duality Formula beween Prime Factors. *Mathematics in Practice and Theory*, **37**, 147-150 (in Chinese).