Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 157-161
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63023

Hans汉斯

Oscillation of Nonlinear Fractional Partial Differential Equation with Damping

Yujian Ma, Yongfu Xiong, Anping Liu

School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan Hubei
Email: 1208108667@qq.com

Received: Apr. 14th, 2016; accepted: May 1st, 2016; published: May 4th, 2016

Abstract

In this paper, we will investigate oscillation of nonlinear fractional partial differential equation with damping and several delays subject to Neumann boundary condition by using the properties of the modified Riemann-Liouville derivative as well as Riccati transformation. The main results are illustrated by examples.

Keywords

Oscillation, Fractional Partial Differential Equations, Modified Riemann-Liouville Derivative

一类带有阻尼项的非线性分数阶偏微分方程解的振动性

马玉剑，熊永福，刘安平

中国地质大学(武汉)数学与物理学院，湖北 武汉
Email: 1208108667@qq.com

收稿日期：2016年4月14日；录用日期：2016年5月1日；发布日期：2016年5月4日

摘 要

本文将对一类带有阻尼项和时滞项的非线性分数阶偏微分方程进行研究，研究条件为第二类边界条件，

文章引用: 马玉剑, 熊永福, 刘安平. 一类带有阻尼项的非线性分数阶偏微分方程解的振动性[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 157-161. http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63023

研究方法为利用改进的黎曼–刘维尔分数阶定义下的相关性质和黎卡提变换。得到的相关结论将给出相关例子作为进一步说明。

关键词

振动，分数阶偏微分方程，改进的黎曼–刘维尔分数阶导

1. 引言

分数阶微积分方程被广泛的应用于科学技术和工程的各个方面。例如，电化学腐蚀，光学和信号处理，压电热弹性动力学，电路系统，扩散波，热量传导，流体流动，概率统计和动力系统的控制理论等等。显然，分数阶微积分比传统微积分具有更广泛的现实意义。

近来，分数阶常微分方程的振动性质已被许多学者研究[1] [2] [4]。然而，关于分数阶偏微分方程的振动性研究的还比较少[3] [5]-[8]。

本文将对下述方程进行研究

$$\begin{aligned}&\left(D_{+,t}^{2\alpha}u\right)(x,t)+p(t)\left(D_{+,t}^{\alpha}u\right)(x,t)\\&=a(t)\Delta u(x,t)+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)\Delta u\left(x,t-\tau_i(t)\right)-q(x,t)f\left(u(x,t)\right),\quad (x,t)\in\Omega\times R_+\equiv G\end{aligned}\tag{1}$$

第二边界问题为：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times R_+\tag{2}$$

其中，Ω 是 R^n 中的有界域，$\partial\Omega$ 为分段的光滑边界，$\alpha\in(0,1)$ 是一个常数，$\left(D_{+,t}^{\alpha}u\right)(x,t)$ 是在改进的黎曼–刘维尔分数阶定义下对 $u(x,t)$ 关于 t 的 α 界导，Δ 为 R^n 上的拉普拉斯算子。

以下为基本假设：

(A) $a(t),a_i(t),\tau_i(t)\in C\left(R_+;(0,+\infty)\right),0<\tau_i(t)<\tau,p\in C\left(R_+;R\right)$；

(B) $q(x,t)\in C\left(\bar{G};R_+\right),q(t)=\min\limits_{x\in\bar{G}}q(x,t)$

(C) $f\left(u(x,t)\right),g(x,t)\in C\left(\bar{G},R\right),\dfrac{f(u)}{u}\ge K>0\,(u\ne0),\int g(x,t)\mathrm{d}x=0,\int_{t_0}^{\infty}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}p(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}t=\infty$。

定义 1.1 若方程(1)的解既不是最终正解也不是最终负解，则振动；否则即为非振动。

2. 解的振动性质

接下来将介绍本文的主要定理，在此之前，先介绍改进的黎曼–刘维尔分数阶导的定义及其相关性质。为了研究的方便，先介绍以下符号：

$$U(t)=\int u(x,t)\mathrm{d}x,\xi=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)},\xi_1=\frac{t_1^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)},\tilde{p}(\xi)=p(t),\tilde{q}(\xi)=q(t),\tilde{U}(\xi)=U(t)。$$

定义 2.1 改进的黎曼–刘维尔分数阶 α 阶导定义：

$$\left(D_t^{\alpha}f\right)(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_0^t(t-\xi)^{-\alpha}\left(f(\xi)-f(0)\right)\mathrm{d}\xi, & 0<\alpha<1\\ \left(f^{(n)}(t)\right)^{(\alpha-n)}, & n\le\alpha<n+1,n\ge1\end{cases}$$

许多重要的相关性质如下：

$$D_t^{\alpha}t^{r}=\frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-\alpha)}t^{r-\alpha} \tag{3}$$

$$D_t^{\alpha}\left(f(t)g(t)\right)=g(t)D_t^{\alpha}f(t)+f(t)D_t^{\alpha}g(t) \tag{4}$$

$$D_t^{\alpha}f\left[g(t)\right]=f_g'\left[g(t)\right]D_t^{\alpha}g(t)=D_g^{\alpha}f\left[g(t)\right]\left(g'(t)\right)^{\alpha} \tag{5}$$

定理 2.1 设基本假设(A)、(B)和(C)满足，且有

$$\limsup_{\xi\to\infty}\int_{\xi_1}^{\xi}K\tilde{q}(s)V(s)\mathrm{d}s=\infty \tag{6}$$

其中 $\xi=\dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$，

$$V(s)=\exp\left(\int_{t_0}^{s}p(v)\mathrm{d}v\right),\quad s\ge t_0 \tag{7}$$

则方程(1) (2)的每一个解都是振动的。

证 假设 $u(x,t)$ 是问题(1)和(2)的一个非振动解。当 $t\ge t_0$，不失一般性，设 $u(x,t)>0$，且 $u(x,t-\tau_i(t))>0$。将(1)对 x 在 Ω 上积分得到

$$\begin{aligned}&D_+^{2\alpha}\int u(x,t)\mathrm{d}x+p(t)D_+^{\alpha}\int u(x,t)\mathrm{d}x\\&=a(t)\int\Delta u(x,t)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)\int\Delta u\left(x,t-\tau_i(t)\right)\mathrm{d}x-\int q(x,t)f\left(u(x,t)\right)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{8}$$

由 Green 公式及边界条件(2)有

$$\int_{\Omega}\Delta u(x,t)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}\mathrm{d}s=0 \tag{9}$$

$$\int_{\Omega}\Delta u(x,t-\tau_i)\mathrm{d}x=0 \tag{10}$$

由基本假设(B)和(C)可得到

$$\int_{\Omega}q(x,t)f\left(u(x,t)\right)\mathrm{d}x\ge Kq(t)\int_{\Omega}u(x,t)\mathrm{d}x=Kq(t)U(t) \tag{11}$$

由(8)~(11)和(D)可得到

$$D_+^{2\alpha}U(t)+p(t)D_+^{\alpha}U(t)+Kq(t)U(t)\le 0 \tag{12}$$

设 $U(t)=\tilde{U}(\xi)$，其中 $\xi=\dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$。由(3)，可得到 $D_+^{\alpha}\xi(t)=1$，再由(5)，可得

$$D_+^{\alpha}U(t)=D_+^{\alpha}\tilde{U}(\xi)=\tilde{U}'(\xi)D_+^{\alpha}\xi(t)=\tilde{U}'(\xi) \tag{13}$$

$$D_+^{2\alpha}U(t)=D_+^{\alpha}\tilde{U}'(\xi)=\tilde{U}''(\xi)D_+^{\alpha}\xi(t)=\tilde{U}''(\xi) \tag{14}$$

由(12)~(14)，(12)即变换为

$$\tilde{U}''(\xi)+\tilde{p}(\xi)\tilde{U}'(\xi)+K\tilde{q}(\xi)\tilde{U}(\xi)\le 0 \tag{15}$$

由(7)和(15)，可得到

$$\left[\tilde{U}'(\xi)V(\xi)\right]'=\tilde{U}''(\xi)V(\xi)+\tilde{U}'(\xi)V(\xi)\tilde{p}(\xi)\le -K\tilde{q}(\xi)\tilde{U}(\xi)V(\xi),\ \xi\in\left[\xi_1,\infty\right) \tag{16}$$

因此$\tilde{U}'(\xi)V(\xi)$在$[\xi_1,\infty)$上严格单调递减且最终符号为正或负。因为在$[\xi_1,\infty)$上$V(\xi)>0$，所以$\tilde{U}'(\xi)$的符号最终为正或负。

假设$\tilde{U}'(\xi)>0$，$\xi\in[\xi_1,\infty)$。如果假设不成立，则$\tilde{U}'(\xi)$符号为最终负，即存在$\xi_2\in[\xi_1,\infty)$满足$\tilde{U}'(\xi_2)<0$。因为$\tilde{U}'(\xi)V(\xi)$在$[\xi_1,\infty)$上严格单调减，所以在$\xi\in[\xi_2,\infty)$上，$\tilde{U}'(\xi)V(\xi)\le\tilde{U}'(\xi_2)V(\xi_2)=c_1<0$。故以下不等式成立：

$$\tilde{U}'(\xi)\le c_1V^{-1}(\xi)=c_1\exp\left(-\int_{t_0}^{\xi}p(v)\mathrm{d}v\right)<0,\quad \xi\in[\xi_2,\infty)$$

对上式两边同除以c_1并积分可得：

$$\int_{\xi_2}^{\xi}\exp\left(-\int_{t_0}^{s}p(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s\le\frac{\tilde{U}(\xi)-\tilde{U}(\xi_2)}{c_1}<\frac{-\tilde{U}(\xi_2)}{c_1},\quad \xi\in[\xi_2,\infty)$$

让$\xi\to\infty$可得$\int_{\xi_2}^{\infty}\exp\left(-\int_{t_0}^{s}p(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s<\frac{-\tilde{U}(\xi_2)}{c_1}<\infty$，与基本假设(D)矛盾。

所以，$\tilde{U}'(\xi)>0$，$\xi\in[\xi_1,\infty)$成立。运用黎卡提变换定义以下函数：

$$\omega(\xi)=\frac{\tilde{U}'(\xi)V(\xi)}{\tilde{U}(\xi)},\quad \xi\in[\xi_1,\infty)$$

显然在$\xi\in[\xi_1,\infty)$上$\omega(\xi)>0$，且$0<\tilde{U}'(\xi)V(\xi)<\tilde{U}'(\xi_1)V(\xi_1)$和$\tilde{U}(\xi)>\tilde{U}(\xi_1)>0$成立。对函数$\omega(\xi)$变化如下：

$$\begin{aligned}\omega'(\xi)&=\left[\frac{\tilde{U}'(\xi)V(\xi)}{\tilde{U}(\xi)}\right]'=\frac{\left[\tilde{U}'(\xi)V(\xi)\right]'}{\tilde{U}(\xi)}-\frac{\tilde{U}'(\xi)V(\xi)\tilde{U}'(\xi)}{\tilde{U}^2(\xi)}\\&\le\frac{\left[\tilde{U}'(\xi)V(\xi)\right]'}{\tilde{U}(\xi)}\le-\frac{K\tilde{U}(\xi)\tilde{q}(\xi)V(\xi)}{\tilde{U}(\xi)}\\&=-K\tilde{q}(\xi)V(\xi),\qquad \xi\in[\xi_1,\infty)\end{aligned}$$

两边同时乘以-1且积分可得

$$\int_{\xi_1}^{\xi}K\tilde{q}(s)V(s)\mathrm{d}s\le\omega(\xi_1)-\omega(\xi)<\omega(\xi_1),\quad \xi\in[\xi_1,\infty)$$

让$\xi\to\infty$可得$\limsup_{\xi\to\infty}\int_{\xi_1}^{\xi}K\tilde{q}(s)V(s)\mathrm{d}s<\omega(\xi_1)<\infty$，与(6)矛盾。证明完成。

3. 举例

$$\begin{aligned}&D_{+,t}^{2\alpha}u(x,t)+\frac{1}{t^2}D_{+,t}^{\alpha}u(x,t)\\&=\mathrm{e}^t\Delta u(x,t)+\mathrm{e}^{2t}\Delta u\left(x,t-\frac{\pi}{2}\right)-\mathrm{e}^{x+\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}\frac{u(x,t)\left(2+u^2(x,t)\right)}{1+u^2(x,t)},\quad (x,t)\in(0,\pi)\times(0,\infty)\end{aligned}$$

边界条件为：

$$u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0$$

其中$\alpha\in(0,1)$，$p(t)=\frac{1}{t^2}$，$a(t)=\mathrm{e}^t$，$a_1(t)=\mathrm{e}^{2t}$，$q(x,t)=\mathrm{e}^{x+\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}$，$q(t)=\min_{x\in\Omega}q(x,t)=\mathrm{e}^{\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}$，

$f(u)=\frac{u(2+u^2)}{1+u^2}$，$\frac{f(u)}{u}=\frac{2+u^2}{1+u^2}\geq 1$，$K=1$。

上述条件均满足基本假设(A)、(B)和(C)。经计算，以上条件也满足定理2.1中的条件，所以方程所有解振动。

参考文献 (References)

[1] Chen, D.X., Qu, P.X. and Lan, Y.H. (2013) Forced Oscillation of Certain Fractional Differential Equations. *Advances in Difference Equations*, **2013**, 1-10.

[2] Yang, J.C., Liu, A.P. and Liu, T. (2015) Forced Oscillation of Nonlinear Fractional Differential Equations with Damping Term. *Advances in Difference Equations*, **2015**, 1-7. http://dx.doi.org/10.1186/s13662-014-0331-4

[3] Li, W.N. (2015) Forced Oscillation Criteria for a Class of Fractional Partial Differential Equations with Damping Term. *Mathematical Problems in Engineering*, **2015**, 1-7.

[4] Qin, H.Z. and Zheng, B. (2013) Oscillation of a Class of Fractional Differential Equations with Damping Term. *The Scientific World Journal*, **2013**, 1-9.

[5] Prakash, P., Harikrishnan, S., Nieto, J.J. and Kim, J.-H. (2014) Oscillation of a Time Fractional Partial Differential Equation. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **15**, 1-10. http://dx.doi.org/10.14232/ejqtde.2014.1.15

[6] Harikrishnan, S., Prakash, P. and Nieto, J.J. (2015) Forced Oscillation of Solutions of a Nonlinearfractional Partial Differential Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **254**, 14-19. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2014.12.074

[7] Prakash, P., Harikrishnan, S. and Benchohra, M. (2015) Oscillation of Certain Nonlinear Fractional Partial Differential Equation with Damping Term. *Applied Mathematics Letters*, **43**, 72-79. http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2014.11.018

[8] Li, W.N. (2015) On the Forced Oscillation of Certain Fractional Partial Differential Equations. *Applied Mathematics Letters*, **2015**, 5-9. http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2015.05.016