Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 127-133
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63019

Unboundedness of Solutions of Duffing Equations with Damping Term

Tiantian Chen, Peiwen Zhang, Chunrui Han

School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao Shandong
Email: 744792018@qq.com, 1198077153@qq.com, 428072176@qq.com

Received: Apr. 1st, 2016; accepted: Apr. 11th, 2016; published: Apr. 14th, 2016

Abstract

In this article, we prove the unboundedness of solutions for the Duffing equations with damping term $x''+cx'+h(x)=p(t)$ and $x''+cx'=p(t)h(x)$ under some easier testing conditions.

Keywords

Unbounded Solutions, Duffing Equations, Damping Term

带阻尼项的Duffing方程解的无界性

陈甜甜，张沛文，韩春瑞

中国海洋大学数学科学学院，山东 青岛
Email: 744792018@qq.com, 1198077153@qq.com, 428072176@qq.com

收稿日期：2016年4月1日；录用日期：2016年4月11日；发布日期：2016年4月14日

摘 要

在比较容易验证的条件下，本文证明了带有阻尼项的Duffing方程 $x''+cx'+h(x)=p(t)$ 和 $x''+cx'=p(t)h(x)$ 的所有解都是无界的。

文章引用: 陈甜甜, 张沛文, 韩春瑞. 带阻尼项的 Duffing 方程解的无界性[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 127-133.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63019

关键词

无界解，Duffing方程，阻尼项

1. 引言

1996 年，Alonso 和 Ortega [1]研究了共振点处 Duffing 方程 $x''+n^2x+h(x)=p(t)$ 的无界解的存在性问题。在 h 和 p 满足 $2(\sup h-\inf h)\le\left|\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t\right|$ 的条件下，证明了该方程的所有解都是无界的。这里的无界性指的是满足 $\limsup\limits_{t\to\infty}\left(|x(t)|+|x'(t)|\right)=+\infty$ 。我们知道共振常常导致有无界解[2] [3]。带有阻尼的常系数线性方程由于能量的耗散，在周期强迫力的作用下所有解是有界的[3]。很自然的问题是，带有阻尼项的非线性方程是否有无界解。本文的目的就是在比较容易验证的条件下证明带有阻尼的 Duffing 方程 $x''+cx'+h(x)=p(t)$ 和 $x''+cx'=p(t)h(x)$ 的所有解都是无界的。

2. 关于差分方程的一个抽象结果

设 X 是一个 Banach 空间。在 X 中考虑差分方程：

$$\xi_{n+1}=F(\xi_n), \tag{1}$$

其中 $F:X\to X$ 是一个算子。定义 $V:X\to\mathbb{R}$， $\mathbb{R}$ 是实数集，并且满足：

$$\bar{V}(r)=\sup\{V(\xi):|\xi|\le r\}<+\infty,\ \forall r\in[0,+\infty)。 \tag{2}$$

Alonso 和 Ortega [1]证明了如下引理：

引理 2.1 设存在函数 V 满足(2)式，并且存在正常数 Γ 和 $\rho>0$ 满足：

$$V(F(\xi))\ge V(\xi)+\Gamma，\ 当|\xi|\ge\rho。 \tag{3}$$

设 $\xi_0\in X$ 并且满足 $V(\xi_0)>\bar{V}(\rho)$，则差分方程(1)满足初始条件为 ξ_0 的解满足：

$$\lim_{n\to+\infty}|\xi_n|=+\infty 。$$

推论 2.2 设 X 是有限维的且 F 是连续的。如果存在一个连续的函数 V 满足：

$$V(F(\xi))>V(\xi),\forall\xi\in X \tag{4}$$

则差分方程(1)的所有解都满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}|\xi_n|=+\infty$ 。

3. 解的无界性

我们主要讨论以下两种方程：

$$x''+cx'+h(x)=p(t) \tag{5}$$

和

$$x''+cx'=p(t)h(x) \tag{6}$$

的无界解的存在性问题。其中， $h(x)\in C(\mathbb{R})$， $p(t)\in C(\mathbb{R})$， $0<c<1$。

引理 3.1 存在常数 $\lambda_1>0,\lambda_2\ge0$，使得方程(5)、(6)的解均满足：

$$\lambda_1\sqrt{x(0)^2+x'(0)^2}-\lambda_2\le\sqrt{x(t)^2+x'(t)^2},\ \forall t\in[0,2\pi]。$$

证明：我们只对方程(5)给出证明，对方程(6)同理可证。考虑辅助方程

$$x'' + cx' = F(t,x), \tag{7}$$

其中 $F(t,x) = p(t) - h(x) \in C(\mathbb{R})$。令 $x' = y$，则 $y' = x'' = -cy + F(t,x)$。于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F(t,x) \end{pmatrix} \tag{8}$$

其对应的齐次方程组为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}。 \tag{9}$$

由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda + c \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + c) = 0$$

可得，方程(9)系数矩阵的特征根为：$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -c$。

求得 $\lambda_1 = 0$ 对应的特征向量为 $t_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$，$\lambda_2 = -c$ 对应的特征向量为 $t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -c \end{pmatrix}$。于是方程(9)的通解为：

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{-ct}\begin{pmatrix} 1 \\ -c \end{pmatrix}。$$

所以，方程(9)的基解矩阵为：

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} k & \mathrm{e}^{-ct} \\ 0 & -c\mathrm{e}^{-ct} \end{pmatrix}。$$

容易计算

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & \frac{1}{ck} \\ 0 & -\frac{1}{c}\mathrm{e}^{ct} \end{pmatrix}。$$

根据[4]中的结果可知，若方程组 $U' = A(t)U$ 的一个基解矩阵为 $\Psi(t)$，则初值问题

$$\begin{cases} U' = A(t)U + G(t,U) \\ U(t_0) = \eta \end{cases}$$

与积分方程组 $U(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(0)\eta + \Psi(t)\int_0^t \Psi^{-1}(s)\begin{pmatrix} 0 \\ G(s,U(s)) \end{pmatrix}\mathrm{d}s$ 等价。所以方程组(8)的解可以表示为：

$$\begin{aligned} \psi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix} 0 \\ F(s,x(s)) \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-ct}\right) \\ 0 & \mathrm{e}^{-ct} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix} 0 \\ p(s) - h(x(s)) \end{pmatrix}\mathrm{d}s \end{aligned}。$$

记

$$\gamma=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix},\alpha=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{c}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)\\0&\mathrm{e}^{-ct}\end{pmatrix},\tau=\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix},\beta=-\Phi(t)\int_0^t\Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix}0\\p(s)-h(x(s))\end{pmatrix}\mathrm{d}s,$$

则 $\gamma=\alpha\tau-\beta$。

由三角不等式可得，$|\gamma|=|\alpha\tau-\beta|\ge|\alpha\tau|-|\beta|$。其中，$|\gamma|=\sqrt{x(t)^2+x'(t)^2}$，而

$$|\alpha\tau|=\left|\begin{pmatrix}1&\frac{1}{c}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)\\0&\mathrm{e}^{-ct}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}\right|=\sqrt{\left(x(0)+\frac{1}{c}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)x'(0)\right)^2+\mathrm{e}^{-2ct}\left(x'(0)\right)^2}。$$

记

$$\int_0^t\Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix}0\\p(s)-h(x(s))\end{pmatrix}\mathrm{d}s=\begin{pmatrix}f(t)\\g(t)\end{pmatrix},$$

则

$$\beta=\left|-\begin{pmatrix}k&\mathrm{e}^{-ct}\\0&-c\mathrm{e}^{-ct}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(t)\\g(t)\end{pmatrix}\right|=\left|-\begin{pmatrix}kf(t)+\mathrm{e}^{-ct}g(t)\\-c\mathrm{e}^{-ct}g(t)\end{pmatrix}\right|\ge0。$$

1) 当 $x(0)=0, x'(0)=0$ 时，$|\alpha\tau|=0$，令 $\lambda_2=|\beta|\ge0$，则对 $\forall\lambda_1\in\mathbb{R}^+$，有
$\sqrt{x(t)^2+x'(t)^2}\ge\lambda_1\sqrt{0}-\lambda_2=\lambda_1\sqrt{x(0)^2+x'(0)^2}-\lambda_2$，所以结论成立。

2) 当 $x(0)=0, x'(0)\ne0$ 时，

$$|\alpha\tau|=\sqrt{\left(\frac{1}{c}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)x'(0)\right)^2+\mathrm{e}^{-2ct}x'(0)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{c^2}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)^2+\mathrm{e}^{-2ct}\right)x'(0)^2}。$$

令 $\lambda_1=\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)^2+\mathrm{e}^{-2ct}}$，$\lambda_2=|\beta|\ge0$，则有
$\sqrt{x(t)^2+x'(t)^2}\ge\lambda_1\sqrt{x'(0)^2}-\lambda_2=\lambda_1\sqrt{x(0)^2+x'(0)^2}-\lambda_2$，所以结论成立。

3) 当 $x(0)\ne0, x'(0)\ne0$ 但 $x(0)+\frac{1}{c}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)x'(0)=0$ 时，即 $x(0)=-\frac{1}{c}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)x'(0)$。

此时 $|\alpha\tau|=\sqrt{\mathrm{e}^{-2ct}x'(0)^2}$，所以总会存在 $0<\lambda_1=\min\left\{\sqrt{\frac{c^2\mathrm{e}^{-2ct}}{\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)^2+c^2}},t\in[0,2\pi]\right\}$，使得

$$\begin{aligned}\lambda_1\sqrt{x(0)^2+x'(0)^2}&=\lambda_1\sqrt{\left(-\frac{1}{c}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)x'(0)\right)^2+x'(0)^2}=\lambda_1\sqrt{\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)^2+c^2}{c^2}x'(0)^2}\\&=\min\left\{\sqrt{\frac{c^2\mathrm{e}^{-2ct}}{\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)^2+c^2}},t\in[0,2\pi]\right\}\sqrt{\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)^2+c^2}{c^2}x'(0)^2}\\&\le\sqrt{\mathrm{e}^{-2ct}\left(x'(0)\right)^2}=|\alpha\tau|\end{aligned}。$$

令 $\lambda_2=|\beta|\ge0$，则有，$\lambda_1\sqrt{x(0)^2+x'(0)^2}-\lambda_2\le|\alpha\tau|-\lambda_2\le\sqrt{x(t)^2+x'(t)^2}$，
所以结论成立。

4) 当 $x(0)\neq 0, x'(0)\neq 0$ 且 $x(0)+\frac{1}{c}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)x'(0)\neq 0$ 时，对 $\forall t\in[0,2\pi]$，有 $\left(x(0)+\frac{1}{c}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)x'(0)\right)^2>0$，所以一定存在 $k>0$，使得

$$\left(x(0)+\frac{1}{c}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)x'(0)\right)^2=kx(0)^2。$$

令 $\lambda_1>0, \lambda_1^2=\min\left\{k,\min\left\{\mathrm{e}^{-2ct},t\in[0,2\pi]\right\}\right\}$， $\lambda_2=|\beta|\geq 0$ 则

$$\begin{aligned}|\alpha\tau|&=\sqrt{\left(x(0)+\frac{1}{c}\left(1-\mathrm{e}^{-ct}\right)x'(0)\right)^2+\mathrm{e}^{-2ct}x'(0)^2}\\&=\sqrt{kx(0)^2+\mathrm{e}^{-2ct}x'(0)^2}\geq\lambda_1\sqrt{x(0)^2+x'(0)^2}\end{aligned}。$$

由 $|\gamma|=|\alpha\tau-\beta|\geq|\alpha\tau|-|\beta|$ 得，

$$\lambda_1\sqrt{x(0)^2+x'(0)^2}-\lambda_2\leq|\alpha\tau|-\lambda_2\leq\sqrt{x(t)^2+x'(t)^2}，\quad\forall t\in[0,2\pi]。$$

综上所述，存在常数 $\lambda_1>0,\lambda_2\geq 0$，使得方程(5)的解满足：

$$\lambda_1\sqrt{x(0)^2+x'(0)^2}-\lambda_2\leq\sqrt{x(t)^2+x'(t)^2}，\quad\forall t\in[0,2\pi]。$$

定理 3.2 设 h 有上界、非常数，且 $\frac{\mathrm{e}^{2\pi c}-1}{c}\sup h<\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t$，则方程(5)的所有解都是无界的，即满足：

$$\lim_{|t|\to+\infty}\left\{x(t)^2+x'(t)^2\right\}=+\infty。\tag{10}$$

证明：给定 $\xi=(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}^2$，用 $x(t;\xi)$ 表示方程(5)的解，并设初始条件为：$x(0)=\zeta$，$x'(0)=\eta$。

我们用抽象的形式定义：$X=\mathbb{R}^2, F(\xi)=\left(\mathrm{e}^{2\pi c}x(2\pi;\xi),\mathrm{e}^{2\pi c}x'(2\pi;\xi)\right)$。根据引理 3.1，为了证明(10)式，我们只需要证明由差分方程 $\xi_{n+1}=F(\xi_n)$，$n\in\mathbb{Z}$ 给出的序列 $\{\xi_n\}$ 及任意给定的初值 ξ_0 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}|\xi_n|=+\infty$ 即可。我们仅考虑 $n\to+\infty$ 的情形，$n\to-\infty$ 可由代换 t 为 $-t$ 得到。

定义 $V(\xi)=\eta, \xi=(\zeta,\eta)\in\mathbb{R}^2$。由分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}x''(t;\xi)\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t&=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}x'(t;\xi)=x'(t;\xi)\mathrm{e}^{ct}\Big|_0^{2\pi}-c\int_0^{2\pi}x'(t;\xi)\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t\\&=x'(2\pi;\xi)\mathrm{e}^{2\pi c}-x'(0;\xi)-c\int_0^{2\pi}x'(t;\xi)\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t\\&=V(F(\xi))-V(\xi)-c\int_0^{2\pi}x'(t;\xi)\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t\end{aligned}。$$

所以，

$$\begin{aligned}V(F(\xi))-V(\xi)&=\int_0^{2\pi}x''(t;\xi)\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t+c\int_0^{2\pi}x'(t;\xi)\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}h(x)\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t\\&>\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t-\sup h\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t-\sup h\frac{\mathrm{e}^{2\pi c}-1}{c}>0\end{aligned}。$$

因此由推论 2.2 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}|\xi_n|=+\infty$，进而可得方程(5)解的无界性，即方程(5)的解满足：$\lim\limits_{|t|\to+\infty}\left\{x(t)^2+x'(t)^2\right\}=+\infty$。

举例 1 考虑摆型方程

$$x''+\frac{1}{3}x'+\sin\frac{x}{4}=\sin\frac{t}{4}+\frac{1}{3}。\tag{11}$$

因为 $c=\frac{1}{3}$，$h(x)=\sin\frac{x}{4}$，$p(t)=\sin\frac{t}{4}+\frac{1}{3}$，因此 $\sup h=1$。而

$$\frac{e^{2\pi c}-1}{c}\sup h=\frac{e^{2\pi\times\frac{1}{3}}-1}{\frac{1}{3}}=3\left(e^{\frac{2\pi}{3}}-1\right),$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}p(t)e^{ct}dt&=\int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{t}{4}+\frac{1}{3}\right)e^{\frac{1}{3}t}dt=\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{4}\cdot e^{\frac{1}{3}t}dt+\int_0^{2\pi}1de^{\frac{1}{3}t}\\&=\frac{73}{25}e^{\frac{2\pi}{3}}+\frac{11}{25}>3\left(e^{\frac{2\pi}{3}}-1\right)=\frac{e^{2\pi c}-1}{c}\sup h\end{aligned}。$$

满足定理 3.2 的条件，因此方程(11)的所有解无界。另一方面，$x=t,t\in\mathbb{R}$ 显然是方程的一个无界解。

定理 3.3 设 h 有下界、非常数，且 $\inf h\cdot\int_0^{2\pi}p(t)e^{ct}dt>0$，则方程(6)的所有解都是无界解，即满足：$\lim\limits_{|t|\to+\infty}\left\{x(t)^2+x'(t)^2\right\}=+\infty$。

证明：由定理 3.2 的证明可知，

$$\begin{aligned}V(F(\xi))-V(\xi)&=\int_0^{2\pi}x''(t;\xi)e^{ct}dt+c\int_0^{2\pi}x'(t;\xi)e^{ct}dt\\&=\int_0^{2\pi}p(t)h(x)e^{ct}dt\\&>\inf h\cdot\int_0^{2\pi}p(t)e^{ct}dt>0\end{aligned}。$$

所以，由推论 2.2 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}|\xi_n|=+\infty$，进而可得方程(6)解的无界性，即方程(6)的解满足：

$$\lim_{|t|\to+\infty}\left\{x(t)^2+x'(t)^2\right\}=+\infty。$$

举例 2 考虑方程

$$x''+cx'=\frac{2+2ct}{t^4+1}\cdot\left(x^2+1\right)。\tag{12}$$

由于 $h(x)=x^2+1$，所以 $\inf h=1$。而 $p(t)=\frac{2+2ct}{t^4+1}>0,\forall t\in[0,2\pi],c>0$ 有 $\int_0^{2\pi}p(t)e^{ct}dt>0$，所以 $\inf h\cdot\int_0^{2\pi}p(t)e^{ct}dt>0$。满足定理 3.3 的条件，因此方程(12)的所有解无界。另一方面，$x=t^2,t\in\mathbb{R}$ 显然是方程的一个无界解。

致　谢

本文作者对朴大雄教授的指导表示感谢。

基金项目

本文得到国家级大学生创新创业训练计划项目(201510423116)和山东省自然科学基金(ZR2013AM026)

的资助。

参考文献 (References)

[1] Alonso, J. and Ortega, R. (1996) Unbounded Solutions of Semilinear Equations at Resonance. *Nonlinearity*, **9**, 1099-1111. http://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/9/5/003

[2] 张芷芬, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 435-436.

[3] Ding, T. (1982) Nonlinear Oscillations at a Point of Resonance. *Scientia Sinica*, **25**, 918-931.

[4] 王高雄, 等. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 219.