

Analysis on the Influence of the Expansion Coefficient in the Non-Uniform Grids for the Accuracy of Compact Finite Difference Schemes

Xiaofang Xu¹, Hefang Jing^{2*}, Yinjuan Cai¹

¹School of Mathematics and Information Science, North University for Nationalities, Yinchuan Ningxia

²Research Institute of Numerical Computation and Engineering Applications, North University for Nationalities, Yinchuan Ningxia

Email: *jinghef@163.com, 1028216916@qq.com

Received: Jul. 6th, 2016; accepted: Jul. 23rd, 2016; published: Jul. 28th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

In the numerical simulation of problems with large gradient and boundary layer, large amount of calculation or large calculation error will occur if uniform grids are used. Non-uniform grids can decrease calculation error greatly while keep the same computational expense. The non-uniformity of the non-uniform grids can be controlled by an expansion coefficient, which affects the accuracy of a scheme. In this paper, analysis has been presented for the effect of the expansion coefficient to the numerical results of one dimensional convective-diffusion equation by using compact difference scheme under non-uniform grids. Two numerical examples are given and it is indicated that optimal value of the expansion coefficient may exist. The computation accuracy can be increased greatly by choosing reasonable expansion coefficient. Moreover, comparisons among compact difference scheme on both non-uniform grids and uniform grids and Crank-Nicolson schemes show that the compact difference on non-uniform grids can be used to solve the problem of large gradient and boundary layer with high accuracy.

Keywords

Convection-Diffusion Equation, Compact Difference Scheme, Non-Uniform Grid, Optimal Value

*通讯作者。

非均匀网格的伸缩系数对紧致差分格式精度的影响分析

徐晓芳¹, 景何仿^{2*}, 蔡银娟¹

¹北方民族大学数学与信息科学学院, 宁夏 银川

²北方民族大学数值计算与工程应用研究所, 宁夏 银川

Email: *jinghef@163.com, 1028216916@qq.com

收稿日期: 2016年7月6日; 录用日期: 2016年7月23日; 发布日期: 2016年7月28日

摘要

在大梯度和边界层等问题数值计算中, 均匀网格往往会导致计算量很大或计算误差较大, 而非均匀网格在不增加计算量的同时, 会将计算误差大大减小。非均匀网格上的非均匀程度可由伸缩系数进行控制, 该系数不同, 计算精度也不相同。本文针对一维对流扩散方程在非均匀网格上的紧致差分格式, 分析了伸缩系数对计算结果的影响, 并通过2个数值算例进行了验证。数值结果表明, 伸缩系数存在最优值。合理选择最优伸缩系数, 可以减小计算量, 并能提高计算精度。另外, 本文对紧致差分格式在非均匀网格和均匀网格上的计算结果以及Crank-Nicolson格式进行了比较分析, 表明非均匀网格上的紧致差分方法可以很好地解决大梯度和边界层问题的数值计算。

关键词

对流扩散方程, 紧致差分格式, 非均匀网格, 最优值

1. 引言

河流中污染物的扩散与输移、流体流动、热传导等问题, 均可用对流扩散方程来描述。但由于实际问题的复杂性, 精确解不易求出。因此, 需要我们利用数值方法近似求解, 有必要去寻求精度高和稳定性强的数值格式, 尤其是高精度、高分辨率格式。紧致差分格式由少数的节点模板可构造出精度较高的差分格式, 并且稳定性好, 边界条件易处理, 因此受到学者们的关注, 文献[1]-[5]等是在均匀网格上构造的高精度紧致格式。

求解大梯度问题、边界层问题等特殊物理性的问题时, 利用均匀网格剖分进行求解, 往往会出现两种情况: 如果网格较大, 则计算结果精度不高; 反之, 如果网格较小, 则计算成本成倍增加, 计算量和存储量均较大。解决这一问题较为合理的做法是, 大梯度或边界层所在区域多分布些网格节点, 而小梯度或物理变化平缓的区域少一些网格节点, 这样可使计算精确性较高, 同时减少了计算量[6]。目前对于在非均匀网格上的高精度紧致差分格式的研究已有一些文献报道[7]-[9]。而在进行网格剖分时, 控制网格非均匀程度的参数也会使实际问题的计算结果产生较大影响。目前对于控制网格非均匀程度的有关参数影响计算结果的研究结果还很少见。

本文针对一维非常对流扩散方程在非均匀网格上的一种紧致差分格式, 通过求解数值算例分析在进行网格剖分时, 伸缩系数对计算结果的影响, 并将数值结果与其他格式及均匀网格上的数值结果进行比较分析。

2. 高精度紧致差分格式

一维非正常对流扩散方程如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \quad (1)$$

其中, $(x,t) \in [a,b] \times (0,\infty)$, k 是扩散系数, $u(x,t)$ 是未知函数, $p(x,t)$ 为对流项系数, $f(x,t)$ 是源项且为已知函数, $u(x,t)$, $p(x,t)$ 和 $f(x,t)$ 均为足够光滑的函数。

将求解区域 $[a,b]$ 剖分成 N 个子区间: $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N = b$, 并定义:

$x_h = x_i - x_{i-1}, x_f = x_{i+1} - x_i, 1 \leq i \leq N-1$, 当 $x_f = x_h$ 时, 网格为均匀剖分。时间上均匀剖分, 步长为 τ 。文献[9]针对该非正常对流扩散方程(1)式在非均匀网格上的高精度紧致差分格式如下:

$$\begin{aligned} p_{i-1}u_{i-1}^{n+1} + p_i u_i^{n+1} + p_{i+1}u_{i+1}^{n+1} &= k_{i-1}u_{i-1}^{n-1} + k_i u_i^{n-1} + k_{i+1}u_{i+1}^{n-1} + h_{i-1}u_{i-1}^n + h_i u_i^n + h_{i+1}u_{i+1}^n \\ &+ l_{i-1}f_{i-1}^{n+1} + l_i f_i^{n+1} + l_{i+1}f_{i+1}^{n+1}, \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (2)$$

对应系数

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{3}{2\tau} + \frac{2\bar{A}_i}{x_f + x_h} \left(\frac{1}{x_f} + \frac{1}{x_h} \right), \quad p_{i-1} = -\frac{2\bar{A}_i}{x_h(x_f + x_h)} - \frac{\bar{B}_i}{x_h + x_f}, \\ p_{i+1} &= -\frac{2\bar{A}_i}{x_h(x_f + x_h)} + \frac{\bar{B}_i}{x_h + x_f}, \quad h_i = \frac{2}{\tau} - \frac{4H_2}{\tau x_f x_h}, \\ h_{i-1} &= -\frac{2H_1}{\tau(x_f + x_h)} + \frac{4H_2}{\tau x_h(x_f + x_h)}, \quad h_{i+1} = -\frac{2H_1}{\tau(x_f + x_h)} + \frac{4H_2}{\tau x_f(x_f + x_h)}, \\ k_i &= -\frac{h_i}{4}, \quad k_{i-1} = -\frac{h_{i-1}}{4}, \quad k_{i+1} = -\frac{h_{i+1}}{4}, \\ l_i &= \frac{\tau h_i}{2}, \quad l_{i-1} = \frac{\tau h_{i-1}}{2}, \quad l_{i+1} = \frac{\tau h_{i+1}}{2}, \\ \bar{A}_i &= a - \left(-\frac{x_f - x_h}{2} + H_1 + 2H_2\delta_x \right) p_i^n - \frac{3H_2}{2\tau}, \\ \bar{B}_i &= \left(1 + H_1\delta_x + H_2\delta_x^2 \right) p_i^n + \frac{3H_1}{2\tau}, \quad H_1 = \frac{K_1}{a} + \frac{K_2}{a^2} p_i, \quad H_2 = \frac{K_2}{a}. \end{aligned}$$

其构造过程为首先将非正常对流扩散方程转化为正常对流扩散方程, 空间上利用泰勒展式离散, 时间上采用二阶向后欧拉差分离散。该格式的时间上的精度为 2 阶, 当 $x_f = x_h$ 时, 空间上为 4 阶精度; 当 $x_f \neq x_h$ 时, 空间上为 3 阶精度。

3. 非均匀网格剖分的控制参数

一般情况下, 我们采用如下变换函数剖分求解区域:

$$x_i = \frac{i}{N} + \frac{\lambda}{\theta} \sin\left(\frac{i\theta}{N}\right) \quad (3)$$

其中, N 为子区间个数, λ ($-1 \leq \lambda \leq 1$) 为变换系数, λ 的作用是调节网格点在某一点处的网格点密集程度。当 $0 \leq \lambda \leq 1$ 时, 靠近右端网格点比较密集, 当 λ 变大, 右端的网格点越密集; 当 $-1 \leq \lambda \leq 0$ 时, 左端网格点比较密集, 当 λ 减小, 左端的网格点越密集; 当 $\lambda = 0$ 时, 为均匀网格剖分。 θ 为角度的控制, 当 $\theta = 0$ 时, 网格为均匀剖; 当 $\theta = \pi$ 时, 网格在求解区域某一方向的某一边界处密集; 当 $\theta = 2\pi$ 时, 网格在求解区域某一方向的两个边界处或中心位置处密集。

λ 是控制网格分布情况的一个重要参数, 当 λ 取不同值时, 网格的分布情况会发生相应的变化, 进而计算结果也会发生相应变化, λ 影响着网格点的分布及计算结果, 取适当值时计算结果精度最小, 我们称此时的 λ 的取值为最优值。

4. 数值算例

算例 1 [10]下面对流扩散方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + p \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-\alpha x}, \end{cases}$$

边界条件为 $u(0, t) = e^{at}$, $u(1, t) = e^{at-c}$, 精确解为 $u(x, t) = e^{at-cx}$, 其中 $c = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4a\alpha}}{2a}$ 。

在这里, 令 $\alpha = 0.1$, $p = -1$, $Re = |p|/a$, $\theta = \pi$, 利用 (3) 式的变换函数, 图 1 给出了该问题在 $T = 1$, $\tau = 2h$, $Re = 100$, $N = 16$ 时, Crank-Nicolson 格式(C-N 格式) [11]与本文中均匀网格和非均匀网格上高精度紧致差分格式计算后的平均误差比较。

从图 1 中可以看出, C-N 格式与均匀网格格式的计算结果不随 λ 的变化而变化, 而非均匀网格格式的计算误差随 λ 取值的不同发生相应的变化。

该问题在 $x = 0$ 处有一跳跃点, 故在该点处使得网格点密集些, 即 $\lambda < 0$ 。从图 1 中还可以看出, 随着 λ 的减小, 平均误差有一个最小值点, 这时 λ 继续减小, 平均误差会逐渐增大。说明 λ 不仅影响着网格点的分布及误差大小, 而且需取适当值时误差最小, 即 λ 存在最优值。如该问题在 $Re = 100$, $N = 16$ 时, λ 的最优值取 -0.85 。

为了说明这一点, 图 2~图 4 给出了当 $Re = 100$, $N = 16$, λ 取不同值时, 紧致格式在均匀网格和非均匀网格上的局部计算结果与 C-N 格式的部分计算结果。

从图 2~图 4 可以看出, λ ($\lambda < 0$) 变化时, 即网格点在左端密集程度不同时, 计算结果发生了相应的

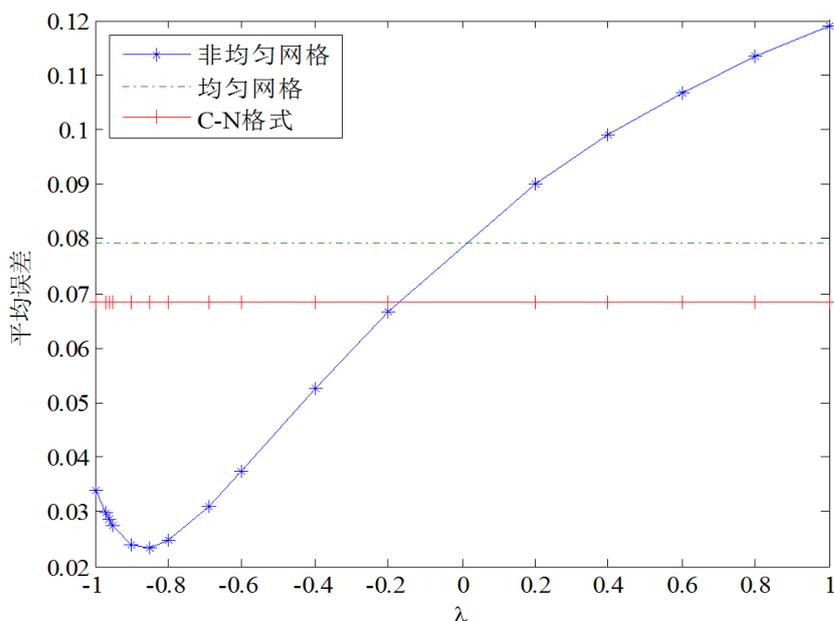


Figure 1. When $Re = 100$, $N = 16$, the mean errors of different schemes with different λ
图 1. 当 $Re = 100$, $N = 16$, λ 取不同值时, 不同格式的平均误差

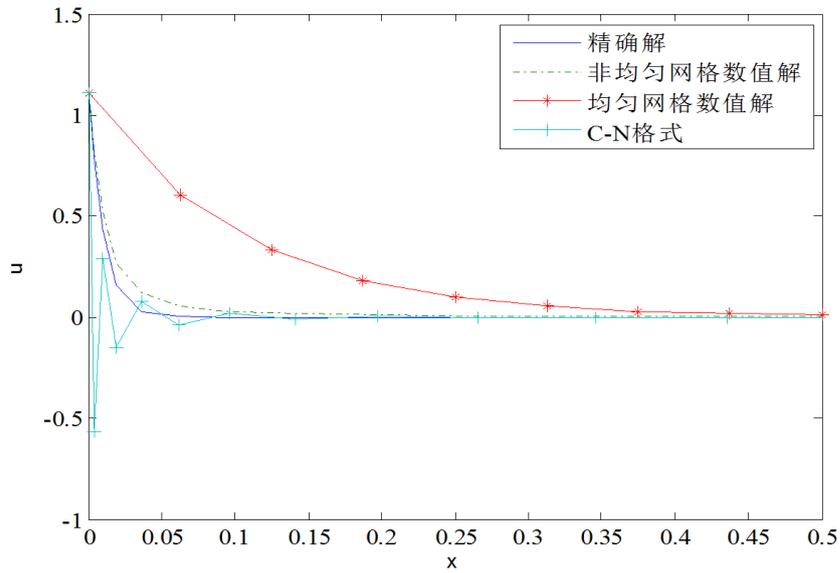


Figure 2. The results of several different schemes comparison with $\lambda = -0.95$
图 2. $\lambda = -0.95$ 时几种差分格式的计算结果比较

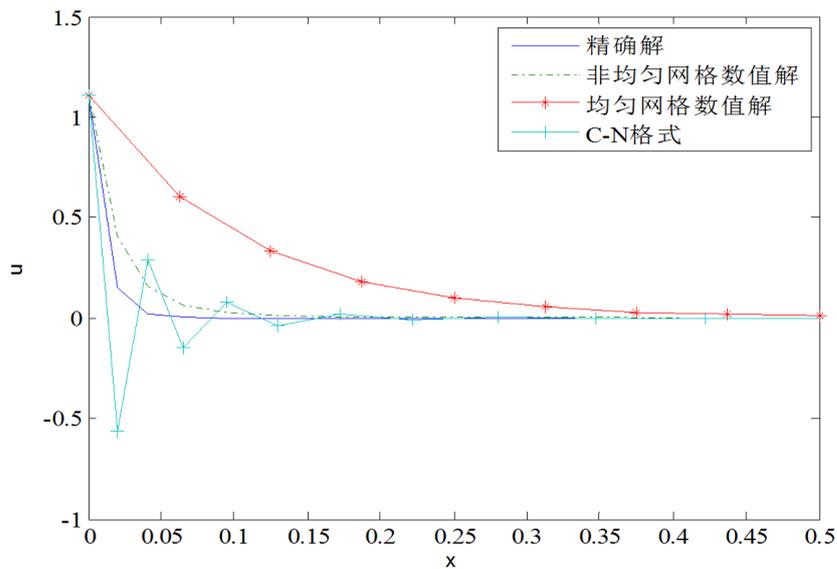


Figure 3. The results of several different schemes comparison with $\lambda = -0.69$
图 3. $\lambda = -0.69$ 时几种差分格式的计算结果比较

变化，但此时紧致格式在非均匀网格上的计算精度高于其他两种计算精度；而图 1、图 4 及图 5 显示当 λ 从左端靠近零且达到一定值时(如 0.2)，紧致格式在非均匀网格上的计算精度便会低于 C-N 格式或均匀网格上格式的计算精度。因而，进一步说明 λ 存在最优值且 C-N 格式或均匀网格上格式的计算精度不受 λ 取值影响。

这里，图 6 给出了与图 2~图 5 对应的该问题在求解区域内的网格分布情况，即当 $Re = 100$ ， $N = 16$ ， λ 分别取 -0.95 ， -0.69 ， -0.2 ， 0.2 时的网格分布情况。

下面我们给出当 $Re = 100$ 时，在不同网格数条件下，C-N 格式与紧致格式在均匀网格及非均匀网格上的计算结果。这里 λ 的取与网格数相应的最优值，如网格数为 16 是 $\lambda = -0.85$ ，网格数为 32 时， $\lambda = -0.87$ 。

由表 1 可以看出，当 $Re = 100$ 时，在相同网格数下，非均匀网格上的计算误差小于 C-N 格式与均匀

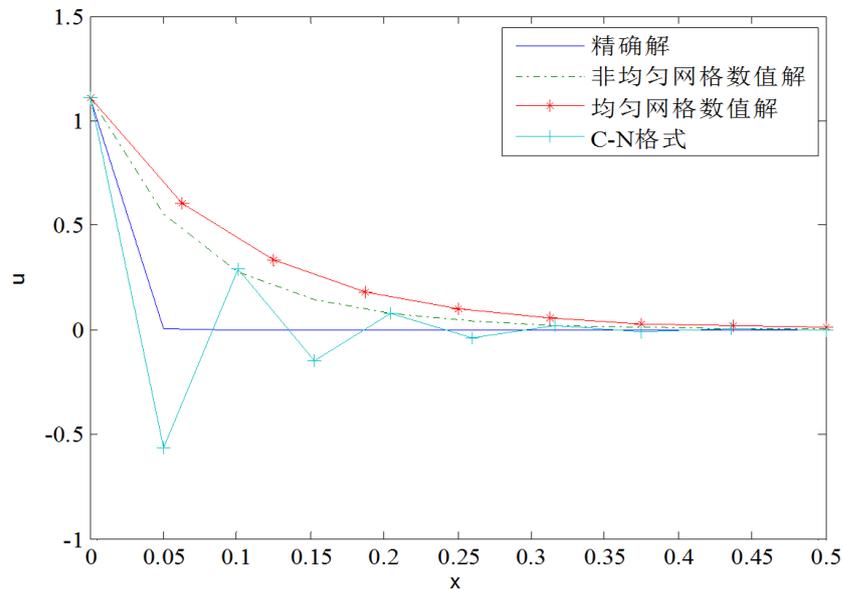


Figure 4. The results of several different schemes comparison with $\lambda = -0.2$
 图 4. $\lambda = -0.2$ 时几种差分格式的计算结果比较

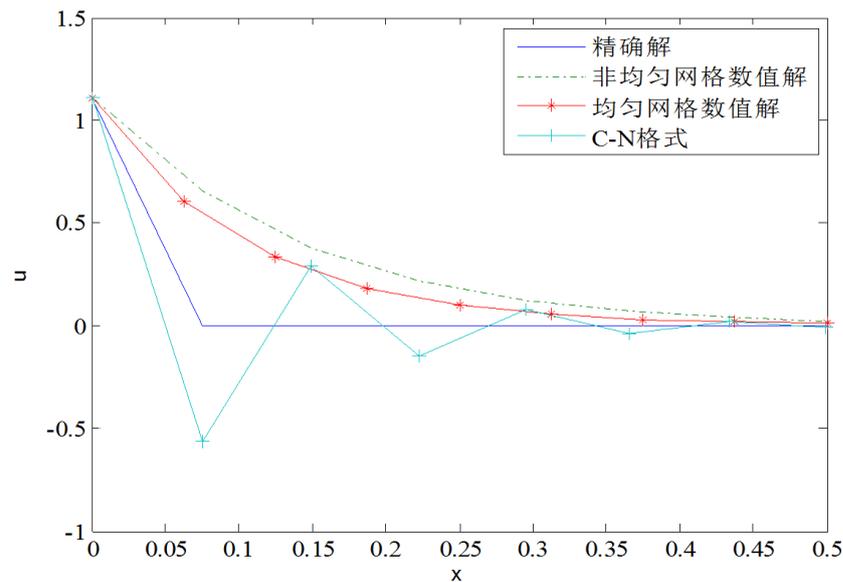


Figure 5. The results of several different schemes comparison with $\lambda = 0.2$
 图 5. $\lambda = 0.2$ 时几种差分格式的计算结果比较

网格上的计算误差，即如果计算精度相同，非均匀网格需要的网格数相对较少。

当 $Re = 1000$ 时， $x = 0$ 附近解的变化较为剧烈，本文非均匀高精度格式在网格数为 32 时，计算结果就已经达到很好的计算精度，而 C-N 格式和均匀网格高精度格式的计算结果在此处出现很大的偏差，如图 7 所示。

从表 2 中，可以看出，当 $Re = 1000$ 时，在相同网格个数下，紧致格式在非均匀网格上的计算误差比 C-N 格式与均匀网格上的计算误差小 1 或 2 个数量级。表明紧致格式在非均匀网上的计算结果更为精确。

算例 2 [5]: 给出如下对流扩散方程的初边界问题

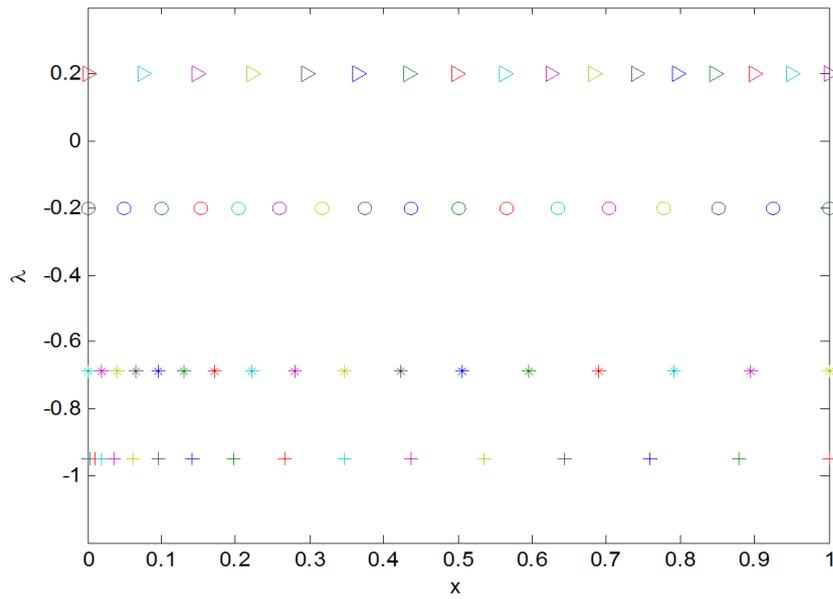


Figure 6. When $Re = 100$, $N = 16$, the distribution of the grid with different λ
图 6. 当 $Re = 100$, $N = 16$, λ 取不同值时, 网格分布情况

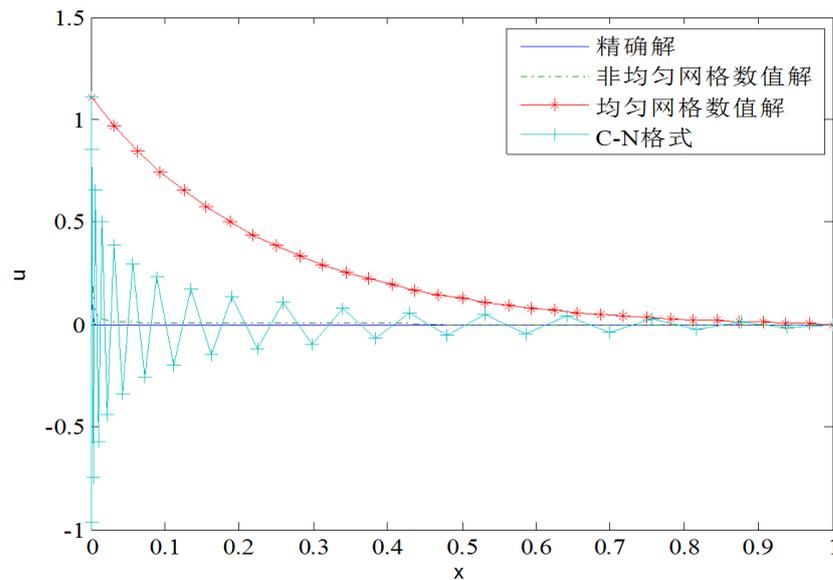


Figure 7. The results of several different schemes comparison with $Re = 1000$, $N = 32$, $\lambda = -0.97$
图 7. 当 $Re = 1000$, $N = 32$, $\lambda = -0.97$ 时, 几种差分格式的计算结果比较

Table 1. Under different numbers of the grid, the mean errors of the schemes with $Re = 100$
表 1. 当 $Re = 100$ 时, 不同网格数下, 几种格式的平均误差

网格数	C-N 格式	均匀网格	非均匀网格
16	6.836×10^{-2}	7.929×10^{-2}	2.344×10^{-2} ($\lambda = -0.85$)
32	1.079×10^{-2}	1.858×10^{-2}	4.336×10^{-3} ($\lambda = -0.87$)
64	2.124×10^{-3}	4.509×10^{-3}	1.033×10^{-3} ($\lambda = -0.87$)
96	1.993×10^{-3}	9.696×10^{-4}	4.565×10^{-4} ($\lambda = -0.87$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1.$$

其中, 初始条件为 $u(x, 0) = 0$, 边界条件为 $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 1$ 。

精确解为

$$u(x, t) = \frac{e^{\text{Re}x} - 1}{e^{\text{Re}} - 1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m\pi}{(m\pi)^2 + \text{Re}^2/4} \exp\left[\frac{\text{Re}(x-1)}{2}\right] \sin(m\pi x) \exp\left[-\frac{(m\pi)^2}{\text{Re}}t - \frac{\text{Re}}{4}t\right]$$

令 $\theta = \pi$, 利用(3)式的变换函数, 表 3 给出了该问题在 $T = 1$, $\tau = 2h$, $\text{Re} = 700$, $N = 32$ 时, 本文中均匀网格和非均匀网格上高精度紧致差分格式计算后的平均误差比较。从计算结果可以看出, 当 Re 和网格数一定时, 均匀网格格式的计算结果不随 λ 的变化而变化, 而非均匀网格格式的计算误差随 λ 取值的不同发生相应的变化。如该问题在 $\text{Re} = 700$, $N = 32$ 时, 最优值取 0.98。

对于该问题, 在 $x = 1$ 处有跳跃点出现, 选取适当的伸缩变换系数 λ , 使得网格点在 $x = 1$ 处密集程度高些, 利用本文所构造的格式进行计算。表 4 给出了该问题在 $T = 1$, $\text{Re} = 100$, $\lambda = 0.98$ 时, 紧致格式在均匀网格和非均匀网格上的平均误差。

从计算结果可以知道, 当 $\text{Re} = 100$ 的情况下, 在网格数相同的情况下, 非均匀网格上紧致格式的计算精度比均匀网格上紧致格式要高, 且如果要达到相同精度, 非均匀网格上紧致差分格式所用的网格数相对要少。

Table 2. Under different numbers of the grid, the mean errors of the schemes with $\text{Re} = 1000$

表 2. 当 $\text{Re} = 1000$ 时, 不同网格数下, 几种格式的平均误差

网格数	C-N 格式	均匀网格	非均匀网格
32	2.345×10^{-1}	2.269×10^{-1}	$1.861 \times 10^{-3} (\lambda = -0.97)$
64	5.752×10^{-2}	5.900×10^{-2}	$2.569 \times 10^{-3} (\lambda = -0.97)$
96	2.389×10^{-2}	2.506×10^{-2}	$1.074 \times 10^{-3} (\lambda = -0.97)$
128	1.354×10^{-2}	1.242×10^{-2}	$5.932 \times 10^{-4} (\lambda = -0.97)$

Table 3. The mean errors of different schemes comparison with different λ

表 3. λ 取不同值时, 不同格式的平均误差比较

λ	均匀网格	非均匀网格
-0.65		0.8702
-0.25		0.8525
0.05		0.8277
0.25		0.7987
0.65		0.6470
0.75	0.8329	0.5540
0.85		0.3958
0.95		0.1225
0.97		0.0956
0.98		0.0952
0.99		0.1050

Table 4. Under different numbers of the Grid, we get the mean errors of uniform grids and non-uniform grids with $Re = 100$, $\lambda = 0.98$ **表 4.** 当 $Re = 100$, $\lambda = 0.98$ 时, 不同网格数下, 在均匀网格和非均匀网格上的平均误差

网格数	均匀网格	非均匀网格
8	6.996×10^{-1}	6.317×10^{-2}
16	5.481×10^{-1}	9.422×10^{-2}
32	3.315×10^{-1}	2.203×10^{-2}
64	1.371×10^{-1}	5.368×10^{-3}
96	6.587×10^{-2}	2.374×10^{-3}

5. 小结

本文针对求解一维对流扩散方程在非均匀网格上的高精度紧致差分格式, 分析了在网格剖分过程中, 伸缩系数对计算结果的影响, 并通过 2 个数值算例对其进行详细的说明, 从计算结果来看, 控制网格分布的伸缩系数存在最优值。通过选取合适的收缩系数, 可以大大减小计算误差。在网格数相同时, 非均匀网格上的紧致差分格式计算精度优于均匀网格上紧致差分格式和 C-N 格式, 表明非均匀网格上的紧致差分方法可以成功的用于大梯度和边界层问题的数值计算中。

基金项目

国家自然科学基金项目(11361002); 北方民族大学研究生创新项目(YCX1556/YCX1682)。

参考文献 (References)

- [1] Tian, Z.F. and Feng, X.F. (2000) A New Explicit Method with Exponential-Type for the Convection-Diffusion Equation. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, **17**, 65-69.
- [2] 葛永斌, 田振夫, 吴文权. 含源项非正常对流扩散方程的高精度紧致隐式差分方法[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 2006(21): 619-625.
- [3] 开依沙尔·热合曼, 阿孜古丽·牙生, 祖丽皮耶·如孜. 求解一维对流扩散方程的高精度紧致差分格式[J]. 佳木斯大学学报, 2014, 32(1): 135-138.
- [4] 赵飞, 蔡志权, 葛永斌. 一维非正常对流扩散方程的有理型高阶紧致差分格式[J]. 江西师范大学学报, 2014, 38(4): 413-418.
- [5] Tian, Z.F. and Yu, P.X. (2011) A High-Order Exponential Scheme for Solving One-Dimensional Unsteady Convection-Diffusion Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**, 2477-2491. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2010.11.001>
- [6] Anderson, J.D. (1995) *Computational Fluids Dynamics*. McGraw-Hill Education, New York.
- [7] 孙建安, 贾伟, 吴广智. 一种非均匀网格上的高精度紧致差分格式[J]. 西北师范大学学报, 2014, 50(4): 31-35.
- [8] 田芳, 田振夫. 非均匀网格上求解对流扩散方程问题的高阶紧致差分方法[J]. 宁夏大学学报, 2009, 30(3): 209-212.
- [9] 黄雪芳, 郭锐, 葛永斌. 一维非正常对流扩散方程非均匀网格上的高精度紧致差分格式[J]. 工程数学学报, 2014, 31(3): 371-380.
- [10] Akbar, M. and Mehdi, D. (2010) High-Order Compact Solution of the One-Dimensional Heat and Advection-Diffusion Equation. *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 3071-3084. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2010.01.013>
- [11] Zerroukat, M., Djidjel, K. and Charafi, A. (2000) Explicit and Implicit Meshless Methods for Linear Advection Diffusion-Type Partial Differential Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**, 9-35. [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000510\)48:1<19::AID-NME862>3.0.CO;2-3](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000510)48:1<19::AID-NME862>3.0.CO;2-3)

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>