Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(5), 411-417
Published Online September 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65056

Hans汉斯

On Odd Deficient-Perfect Numbers with Four Distinct Prime Divisors

Lan Cui, Cong Zhang, Ying Li

Department of Mathematics and Finance, ABa Teachers University, Wenchuan Sichuan
Email: 1084149614@qq.com

Received: Sep. 1st, 2016; accepted: Sep. 15th, 2016; published: Sep. 20th, 2016

Abstract

For a positive integer n, let $\sigma(n)$ denote the sum of the positive divisors of n. Let d be a proper divisor of n, we call n a deficient-perfect number if $\sigma(n)=2n-d$. On the basis of the references, we characterize some properties of odd deficient-perfect numbers with four distinct prime divisors. We prove that if $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}$ is an odd deficient-perfect number, then $p_1=3$, $p_2\le 13$, and improve the result of the references.

Keywords

Deficient-Perfect Numbers, The Sum of the Positive Divisors, Prime Factors, Order

具有四个素因子的奇亏完全数

崔　兰，张　聪，李　颖

阿坝师范学院数学与财经系，四川 汶川
Email: 1084149614@qq.com

收稿日期：2016年9月1日；录用日期：2016年9月15日；发布日期：2016年9月20日

摘　要

设n为自然数，$\sigma(n)$表示n的所有正因子和函数。令d是n的真因子，若n满足$\sigma(n)=2n-d$，则称n为亏

文章引用: 崔兰, 张聪, 李颖. 具有四个素因子的奇亏完全数[J]. 理论数学, 2016, 6(5): 411-417.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65056

因子为d的亏完全数。在参考文献的基础上，本文讨论了具有四个素因子的奇亏完全数的一些性质，证明了 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4}$ 为具有四个不同素因子的奇亏完全数，则有$p_1 = 3, p_2 \le 13$。

关键词

亏完全数，因子和函数，素因子，阶

1. 引言与主要结果

对任意 $n \in \mathbf{N}$，设 n 的标准分解式为 $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，令 $\omega(n)$，$\sigma(n)$分别表示 n 的相异素因子个数以及约数和函数，则

$$\omega(n) = k\text{，}\quad \sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_{k+1}} - 1}{p_k - 1}\text{。}$$

约数和函数$\sigma(n)$是一类基本而又重要的数论函数，历史上许多著名数学难题都与它关[1] [2]，例如，著名的完全数问题。若正整数n满足$\sigma(n) = 2n$，则称n为完全数(perfect number)。若$\sigma(n) < 2n$，则称n为亏数(deficient)，若$\sigma(n) > 2n$，则称n为过剩数(abundant)。设d是n的真因子，若 $\sigma(n) = 2n + d$，则称n为盈因子为d的盈完全数。如果 $\sigma(n) = 2n + 1$，则称n为拟完全数(quasi-perfect)。若

$$\sigma(n) = 2n - d\text{，} \tag{1}$$

则称n为亏因子为d的亏完全数。特别地，如果 $\sigma(n) = 2n - 1$，则称n为殆完全数(almost perfect)，关于以上完全数的各类问题，以及$\sigma(n)$与Euler函数$\varphi(n)$的迭代等等问题，可参见文献[3]-[16]。

关于亏完全数，文献[17]刻画了素因子个数不超过2的所有亏完全数的结构，若n为亏完全数且$\omega(n) \le 2$，则

$$n = 2^{\alpha},\ d = 1$$

$$\text{或 } n = 2^{\alpha}\left(2^{\alpha+1} + 2^s - 1\right),\ d = 2^s\text{，}$$

其中$1 \le s \le \alpha$，且$2^{\alpha+1} + 2^s - 1$为奇素数。文献[18]证明不存在具有三个素因子的奇亏完全数。最近，文献[19]研究具有四个素因子的奇亏完全数，证明了若 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4}$ 为具有四个不同素因子的奇亏完全数，其中 $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ 为奇素数，则有 $p_1 = 3$，且 $p_2 = 5,7,11,13,17$。

在文献[19]的基础上，本文进一步研究具有四个素因子的奇亏完全数，略微改进了文献[19]中的结论，证明了

定理 若 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4}$ 为具有四个不同素因子的奇亏完全数，则有

$$p_1 = 3,\ p_2 \le 13\text{。}$$

2. 一些引理

引理1 若 $p \equiv 2,3,4 \pmod 5$，则 $\sigma\left(p^{\alpha}\right) \equiv 0 \pmod 5$，若 $p \equiv 1 \pmod 5$，则

$$\gcd\left(\sigma\left(p^{\alpha}\right), 5\right) = \begin{cases} 5, & \alpha_i \equiv 4 \pmod{10} \\ 1, & \alpha_i \text{为其他} \end{cases}$$

证明：若 $p \equiv 2 \pmod 5$，则

$$\begin{aligned}\sigma\left(p^{\alpha}\right) &= p^{\alpha}+p^{\alpha-1}+\cdots+p+1 \\ &\equiv 2^{\alpha}+2^{\alpha-1}+\cdots+2+1\left(\bmod 5\right)。 \\ &= 2^{\alpha+1}-1\equiv 1,2\ \left(\bmod 5\right)\end{aligned}$$

同理可得，若 $p\equiv 3\left(\bmod 5\right)$，则 $\sigma\left(p^{\alpha}\right)\equiv 1,3,4\left(\bmod 5\right)$，若 $p\equiv 4\left(\bmod 5\right)$，则 $\sigma\left(p^{\alpha}\right)\equiv 3\left(\bmod 5\right)$。若 $p\equiv 1\left(\bmod 5\right)$，则 $\sigma\left(p^{\alpha}\right)\equiv 0\left(\bmod 5\right)$。

引理2 若 $n=3^{\alpha_1}17^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}$ 是奇亏完全数时，亏因子 $d=3^{\beta_1}p_2^{\beta_2}p_3^{\beta_3}p_4^{\beta_4}$，其中 $\beta_i\le\alpha_i$，$i=1,2,3,4$，令

$$D=\frac{d}{n}=3^{\alpha_1-\beta_1}p_2^{\alpha_2-\beta_2}p_3^{\alpha_3-\beta_3}p_4^{\alpha_4-\beta_4}，$$

则 $\alpha_i\left(i=1,2,3,4\right)$ 均为偶数，且

$$D=3。\tag{2}$$

证明： 由于 $n=3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}$ 为奇亏完全数，则由(1)可得，

$$\sigma\left(3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}\right)=2\cdot 3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}-d\tag{3}$$

其中

$$d=3^{\beta_1}p_2^{\beta_2}p_3^{\beta_3}p_4^{\beta_4}，\quad \beta_i\le\alpha_i，\quad i=1,2,3,4。$$

则

$$0\le\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4\le\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4。$$

由于d为奇数，则根据(3)式，有

$$\sigma\left(3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}\right)\equiv 1\left(\bmod 2\right)$$

因此

$$\alpha_i\equiv 0\left(\bmod 2\right), i=1,2,3,4，$$

则根据(1)式，有

$$2=\frac{\delta(n)}{n}+\frac{d}{n}=\frac{\delta(n)}{n}+\frac{1}{3^{\alpha_1-\beta_1}p_2^{\alpha_2-\beta_2}p_3^{\alpha_3-\beta_3}p_4^{\alpha_4-\beta_4}}=\frac{\sigma(n)}{n}+\frac{1}{D}\tag{4}$$

当 $p_2=17$，$p_3\ge 19$ 时，若 $D\ge 9$，则

$$2=\frac{\sigma(n)}{n}+\frac{d}{n}<\frac{3}{2}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22}+\frac{1}{9}<2$$

矛盾，则 $D=3$。

引理3 若 $n=3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}$ 是奇亏完全数，$p_2=17$，则

$$\sigma\left(3^{\alpha_1}17^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}\right)=5\cdot 3^{\alpha_1-1}17^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}\tag{5}$$

证明： 由引理2知，当 $p_2=17$ 时，$D=3$，则 $\alpha_1-\beta_1=1$ 和 $\alpha_i=\beta_i$，$i=2,3,4$，由(3)式可得

$$\begin{aligned}\sigma\left(3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}\right) &= 2\cdot 3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}-3^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4} \\ &= 5\cdot 3^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}\end{aligned}。$$

引理4 令

$$f\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=\left(1-\frac{1}{3^{\alpha_1+1}}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^{\alpha_2+1}}\right)\left(1-\frac{1}{p_3^{\alpha_3+1}}\right)\left(1-\frac{1}{p_4^{\alpha_4+1}}\right),$$

$$g\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=\frac{5\cdot 2\left(p_2-1\right)\left(p_3-1\right)\left(p_4-1\right)}{3^2\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4},$$

则

$$f\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=g\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)。\tag{6}$$

证明：由引理3知

$$\sigma\left(3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}\right)=\frac{3^{\alpha_1}-1}{2}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2}-1}{p_2-1}\cdot\frac{p_3^{\alpha_3}-1}{p_3-1}\cdot\frac{p_4^{\alpha_4}-1}{p_4-1}$$
$$=5\cdot 3^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}$$

所以

$$\left(1-\frac{1}{3^{\alpha_1+1}}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^{\alpha_2+1}}\right)\left(1-\frac{1}{p_3^{\alpha_3+1}}\right)\left(1-\frac{1}{p_4^{\alpha_4+1}}\right)=\frac{5\cdot 2\left(p_2-1\right)\left(p_3-1\right)\left(p_4-1\right)}{3^2\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4}$$

则(6)式成立。

3. 主要结果的证明

设$m>2$为正整数，a为整数，若$(a,m)=1$，称满足$a^x\equiv 1\left(\bmod m\right)$的最小正整数$x$为$a$对模$m$的阶，记作$\mathrm{ord}_m a$。

若$p_3\ge 47$时，则

$$2=\frac{\sigma\left(n\right)}{n}+\frac{1}{3}<\frac{3}{2}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{47}{46}\cdot\frac{53}{52}+\frac{1}{3}<1.9930454,$$

矛盾，因此，

$$p_3=19,23,29,31,37,41,43。$$

情形1 $p_3=43$。当$p_4\ge 53$时，

$$2=\frac{\sigma\left(n\right)}{n}+\frac{d}{n}<\frac{3}{2}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{43}{42}\cdot\frac{53}{52}+\frac{1}{3}<1.9964086,$$

矛盾，因此$p_4=47$。由于$\mathrm{ord}_3 5=4$，如果$5\mid\delta\left(3^{\alpha_1}\right)$，则

$$\frac{3^{\alpha_1+1}-1}{2}\equiv 0\left(\bmod 5\right),$$

则$4\mid\alpha_1+1$，矛盾，因此$\gcd\left(\delta\left(3^{\alpha_1}\right),5\right)=1$。同理，由于$\mathrm{ord}_{17}5=\mathrm{ord}_{43}5=\mathrm{ord}_{47}5=4$，则

$$\gcd\left(\sigma\left(3^{\alpha_1}\right)\sigma\left(17^{\alpha_2}\right)\sigma\left(43^{\alpha_3}\right)\sigma\left(47^{\alpha_4}\right),5\right)=1,$$

这与(5)式矛盾。

情形2 $p_3=41$。当$p_4\ge 53$时

$$2=\frac{\sigma\left(n\right)}{n}+\frac{d}{n}<\frac{3}{2}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{53}{52}+\frac{1}{3}<1.9983424,$$

矛盾，因此$p_4=43,47$

当 $\alpha_1 \geq 6$ 时，计算 $f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 和 $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的值如下，

p_4	$f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$	$g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$
43	0.99931	0.99651
47	0.99931	0.99853

由引理4得，与(6)式矛盾。当 $\alpha_1 = 2,4$ 时，$\delta(3^{\alpha_1}) = 13,121$，与(5)式矛盾。

情形3 $p_3 = 37$。当 $p_4 \geq 59$ 时

$$2 = \frac{\sigma(n)}{n} + \frac{d}{n} < \frac{3}{2}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{37}{36}\cdot\frac{59}{58} + \frac{1}{3} < 1.99959691,$$

矛盾，因此，$p_4 = 41,47,53$。由于 $\mathrm{ord}_3 5 = 4 = \mathrm{ord}_{17} 5 = \mathrm{ord}_{37} 5 = 4$，则

$$\gcd\left(\sigma(3^{\alpha_1})\sigma(17^{\alpha_2})\sigma(37^{\alpha_3}),5\right) = 1。$$

由引理1知，要使 $5 \mid \sigma(n)$ 则必使 $p_4 \equiv 1(\mathrm{mod}10)$，所以 $p_4 = 41$。当 $p_4 = 41$，且 $\alpha_1 \geq 4$ 时，有

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \geq \left(1-\frac{1}{3^5}\right)\left(1-\frac{1}{17^3}\right)\left(1-\frac{1}{37^3}\right)\left(1-\frac{1}{41^3}\right) = 0.99564,$$

$$g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \leq \frac{5\times2\times16\times36\times40}{3^2\times17\times37\times41} = 0.99267,$$

与(6)式矛盾。若 $\alpha_1 = 2$，$\delta(3^{\alpha_1}) = 13$，与(5)式矛盾。

情形4 $p_3 = 31$。当 $p_4 \geq 59$ 时

$$2 = \frac{\sigma(n)}{n} + \frac{d}{n} < \frac{3}{2}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{31}{30}\cdot\frac{59}{58} + \frac{1}{3} < 2$$

矛盾，因此，$p_4 = 37,41,47,49,53$。

当 $\alpha_1 \geq 4$ 时，计算 $f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 和 $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的值如下，

p_4	$f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$	$g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$
37	0.99588	0.98467
41	0.99588	0.98733
43	0.99588	0.98848
47	0.99588	0.99049
49	0.99588	0.99136
53	0.99588	0.9929

由引理4得，与(6)式矛盾。当 $\alpha_1 = 2,4$ 时，$\sigma(3^{\alpha_1}) = 13,121$，与(5)式矛盾。

情形5 $p_3 = 29$，当 $p_4 \geq 103$ 时，有

$$2 = \frac{\sigma(n)}{n} + \frac{d}{n} < \frac{3}{2}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{29}{28}\cdot\frac{103}{102} + \frac{1}{3} < 2,$$

矛盾，则 $p_4 \leq 101$。由于 $\mathrm{ord}_3 5 = 4 = \mathrm{ord}_{17} 5 = 4$，$\mathrm{ord}_{29} 5 = 2$，由引理1知，若要使 $5 \mid \sigma(n)$，则必须使 $p_4 \equiv 1(\mathrm{mod}10)$，所以 $p_4 = 31,41,61,71,101$

当 $p_4 = 31,41,61,71$，且 $\alpha_1 \ge 4$ 时，当 $p_4 = 101$，且 $\alpha_1 \ge 8$ 时，分别计算 $f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 和 $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的值如下：

p_4	$f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$	$g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$
31	0.99560	0.97712
41	0.99562	0.98506
61	0.99563	0.99313
71	0.99563	0.99547
101	0.99994	0.9996

由引理4得，与(6)式矛盾。

当 $\alpha_1 = 2,4,6,8$ 时，$\sigma(3^{\alpha_1}) = 13,11^2,1093,13\times 757$，与(5)式矛盾。

情形6 $p_3 = 23$，当 $p_4 \le 3527$ 时，有

$$2 = \frac{\sigma(n)}{n} + \frac{d}{n} < \frac{3}{2}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{23}{22}\cdot\frac{3517}{3516} + \frac{1}{3} = 1.99999906 < 2,$$

矛盾，则 $p_4 \le 3517$。由于 $\mathrm{ord}_3 5 = 4 = \mathrm{ord}_{17} 5 = \mathrm{ord}_{23} 5 = 4$，同理由引理1知，使 $5 \mid \sigma(n)$ 则必使 $p_4 \equiv 1(\mathrm{mod}\,10)$，所以 $p_4 = 31,41,61,71,\cdots,3461,3491,3511$。

当 $\alpha_1 \ge 12$，$\alpha_2 \ge 6$，$\alpha_3 \ge 6$ 时，由于 $p_4 \le 3511$，则有

$$\begin{aligned}
&f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) - g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\\
&= \left(1-\frac{1}{3^{13}}\right)\left(1-\frac{1}{17^7}\right)\left(1-\frac{1}{23^7}\right)\left(1-\frac{1}{p_4^3}\right) - \frac{5\times 2\times 16\times 22(p_4-1)}{3^2\times 17\times 23 p_4}\\
&> 0.99999937\left(1-\frac{1}{p_4^3}\right) - 1.00028417\left(1-\frac{1}{p_4}\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{p_4}\right)\left(0.99999937\left(1+\frac{1}{p_4}+\frac{1}{p_4^2}\right) - 1.000284171\right)\\
&> 9.8458\times 10^{-8}
\end{aligned}$$

。

由引理4得，与(6)式矛盾。

当 $\alpha_1 = 2,4,6,8,10$，$\alpha_2 = 2,4$，以及 $\alpha_3 = 2,4$ 时，$\sigma(3^{\alpha_1}) = 13,11^2,1093,13\times 757$，$\sigma(17^{\alpha_2}) = 307,88741$，$\sigma(23^{\alpha_3}) = 7\times 79,292561$，与(5)式均为矛盾。

情形7： $p_3 = 19$。当 $\alpha_1 \ge 4$ 时，由于 $p_4 \ge 23$，则有

$$\begin{aligned}
&f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) - g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\\
&= \left(1-\frac{1}{3^5}\right)\left(1-\frac{1}{17^3}\right)\left(1-\frac{1}{23^3}\right)\left(1-\frac{1}{p_4^3}\right) - \frac{5\times 2\times 16\times 18(p_4-1)}{3^2\times 17\times 19 p_4}\\
&> 0.995536\left(1-\frac{1}{p_4^3}\right) - 0.990713\left(1-\frac{1}{p_4}\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{p_4}\right)\left(0.995536\left(1+\frac{1}{p_4}+\frac{1}{p_4^2}\right) - 0.990713\right)\\
&> 0
\end{aligned}$$

。

由引理4得，与(6)式矛盾。

当 $\alpha_1 = 2$ 时，$\sigma\left(3^{\alpha_1}\right) = 13$，与(5)式矛盾。

因此，定理得证。

基金项目

阿坝师范学院科研课题项目(JXYY201507)，四川省教育厅自然科学研究项目(15ZA0337)。

致　谢

作者衷心感谢阿坝师范学院杨仕椿教授的悉心指导和热情帮助!

参考文献 (References)

[1] Guy, R.K. (1981) Unsolved Problems in Number Theory. Springer-Verlag, New York, 25-56. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-1738-9

[2] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1979: 13-14.

[3] Erdos, P. (1959) Remarks on Number Theory II: Some Problems on the σ Function. *Acta Arithmetica*, **5**, 171-177.

[4] Poliack, P. and Shevelev, P. (2012) On Perfect and Near-Perfect Numbers. *Journal of Number Theory*, **132**, 3037-3046. http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2012.06.008

[5] Abbott, H.L., Aull, C.E., Brown, E., *et al*. (1973) Quasi Perfect Numbers. *Acta Arithmetica*, **22**, 439-447.

[6] Cattaneo, P. (1951) Sui Numeriquasi Perfetti. *Boll.Un. Mat. Ital.*, **6**, 59-62.

[7] Pomerance, C. (1975) On the Congruences $\sigma(n) \equiv a \pmod{n}$ and $n \equiv a \pmod{\phi(n)}$. *Acta Arithmetica*, **26**, 265-272.

[8] Kishore, M. (1978) Odd Integers n with Five Distinct Prime Factors for Which $2-10^{-12}<\sigma(n)/n< 2+10^{-12}$. *Mathematics of Computation*, **32**, 303-309. http://dx.doi.org/10.2307/2006281

[9] Cohen, G.L. (1980) On Odd Perfect Numbers. II. Multiperfect Numbers and Quasiperfect Numbers. *Journal of the Australian Mathematical Society Series A*, **29**, 369-384. http://dx.doi.org/10.1017/S1446788700021376

[10] Kishore, M. (1981) On Odd Perfect, Quasiperfect, and Odd Almost Perfect Numbers. *Mathematics of Computation*, **36**, 583-586. http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-1981-0606516-3

[11] Cohen, G.L. (1982) The Nonexistence of Quasiperfect Numbers of Certain Forms. *The Fibonacci Quarterly*, **20**, 81-84.

[12] Hagis, P. and Cohen, G.L. (1982) Some Results Concerning Quasiperfect Numbers. *Journal of the Australian Mathematical Society Series A*, **33**, 275-286. http://dx.doi.org/10.1017/S1446788700018401

[13] Tang, M. and Li, M. (2012) On the Congruence $\sigma(n) \equiv 1 \pmod{n}$. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **32**, 673-676.

[14] Anavi, A., Pollack, P. and Pomerance, C. (2013) On Congruences of the Form $\sigma(n) \equiv a \pmod{n}$. *International Journal of Number Theory*, **9**, 115-124. http://dx.doi.org/10.1142/S1793042112501266

[15] Li, M. and Tang, M. (2014) On the Congruence $\sigma(n) \equiv 1 \pmod{n}$ II. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **34**, 155-160.

[16] Tang, M. and Feng, M. (2014) On Deficient-Perfect Numbers. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **90**, 186-194. http://dx.doi.org/10.1017/S0004972714000082

[17] Ren, X.Z. and Chen, Y.G. (2013) On Near-Perfect Numbers with Two Distinct Prime Factors. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **88**, 520-524. http://dx.doi.org/10.1017/S0004972713000178

[18] Tang, M., Ren, X.Z. and Li, M. (2013) On Near-Perfect and Deficient-Perfect Numbers. *Colloquium Mathematicum*, **133**, 221-226. http://dx.doi.org/10.4064/cm133-2-8

[19] 马小艳, 王玉杰. 具有四个素因子的奇亏完全数[J]. 纯粹数学与应用数学, 2015, 31(6): 643-649.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究