Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(5), 441-448
Published Online September 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65060

Hans汉斯

Gradient Estimates for Quasilinear Elliptic p-Laplacean Equations

Moqin Wang

College of Science, Shanghai University, Shanghai
Email: wmqinsh@163.com

Received: Sep. 9th, 2016; accepted: Sep. 23rd, 2016; published: Sep. 28th, 2016

Abstract

In this paper we obtain the pointwise gradient estimates via the non-linear Wolff potentials for weak solutions of the non-homogeneous quasilinear elliptic p-Laplacean equations with measure data.

Keywords

p-Laplacean, Quasilinear, Elliptic, Wolff Potential, Gradient Estimate

拟线性p-调和型椭圆方程的梯度估计

王墨琴

上海大学理学院，上海
Email: wmqinsh@163.com

收稿日期：2016年9月9日；录用日期：2016年9月23日；发布日期：2016年9月28日

摘　要

本文我们利用非线性Wolff位势来研究右端项含测度的非齐次拟线性p-调和型椭圆方程弱解的点态梯度估计。

文章引用: 王墨琴. 拟线性 p-调和型椭圆方程的梯度估计[J]. 理论数学, 2016, 6(5): 441-448.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65060

关键词

p-调和型，拟线性，椭圆，Wolff位势，梯度估计

1. 引言

本文我们主要考虑下述非齐次拟线性 p-调和型椭圆方程

$$-div\left(|Du|^{p-2} Du\right) = \mu \text{。} \tag{1.1}$$

这里 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开区域且 μ 为 Borel 测度。

1983 年，Wolff 在文献[1]中提出了经典非线性 Wolff 位势。后来，Kilpeläinen，Malý [2] [3]，Trudinger，Wang [4]和 Korte，Kuusi [5]用不同的方法研究了拟线性椭圆方程(1.1)弱解的逐点估计

$$|u(x)|^{p-1} \le c\left[W_{1,p}^{\mu}(x,R)\right]^{p-1} + c\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B(x,R)}|u|\mathrm{d}y\right)^{p-1} \text{。}$$

这里 μ 的非线性 Wolff 位势 $W_{\beta,p}^{\mu}(x,R)$ 的定义如下：

$$W_{\beta,p}^{\mu}(x,R) = \int_0^R \left(\frac{|\mu|(B(x,\rho))}{\rho^{n-\beta p}}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}, \beta \in \left(0, \frac{n}{p}\right] \text{且} |\mu|(B(x,\rho)) = \int_{B(x,\rho)}|\mu|\mathrm{d}y \text{。}$$

最近，Duzaar，Kuusi 和 Mingione 在[6]-[9]中借助非线性 Wolff 位势和线性 Riesz 位势给出了拟线性椭圆方程(1.1)及其一般情形的弱解的逐点梯度估计。本文我们主要采用非线性 Wolff 位势来研究非齐次 p-Laplacean 方程(1.1)弱解的梯度估计，我们将结合文[6]-[9]的证明方法给出一个新证明。

首先，我们给出弱解的定义。若 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 为方程(1.1)的弱解，则对任意 $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$，有

$$\int_{\Omega}\left\langle |Du|^{p-2} Du, D\varphi\right\rangle \mathrm{d}y = \int_{\Omega}\varphi \mathrm{d}\mu \text{。}$$

现在我们来阐述本文的主要结论。

定理 1.1. 设 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 是方程(1.1)的弱解，$p > n$，μ 为 Borel 测度，且 $x \in \Omega$ 是 Du 的一个 Lebesgue 点，$B(x,2R) \subset \Omega$。那么存在 $c = c(n,p)$，有如下梯度估计

$$|Du(x)| \le cW_{\frac{1}{p},p}^{\mu}(x,2R) + c\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B(x,R)}|Du|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \text{。} \tag{1.2}$$

2. 主要结论的证明

我们记

$$B(x,R) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < R\right\} \text{。}$$

简记 $B_R = B(x,R)$。对具有正测度的集合 $A \subset \mathbb{R}^n, g \in L^1(A,\mathbb{R}^n)$，记积分平均

$$(g)_A = \frac{1}{|A|}\int_A g(y)\mathrm{d}y \text{。}$$

引入 $v \in W^{1,p}(\Omega)$ 为下述参考方程的弱解

$$div\left(|Dv|^{p-2}Dv\right)=0\text{。} \tag{2.1}$$

现在我们给出齐次 p-Laplacean 椭圆方程(2.1)弱解的一个经典的估计(参见文献[10]-[14])。

定理 2.1. 设 $v\in W^{1,p}(\Omega)$ 是(2.1)的弱解，则存在 $\beta_0\in(0,1],c_0\geq 1$，它们都依赖于 n,p，有如下估计

$$\frac{1}{|B_\rho|}\int_{B_\rho}\left|Dv-(Dv)_{B_\rho}\right|^p\mathrm{d}y\leq c_0\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\beta_0}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\left|Dv-(Dv)_{B_R}\right|^p\mathrm{d}y\text{。} \tag{2.2}$$

其中 $B_\rho\subseteq B_R\subseteq\Omega$ 为同心球。

现在考虑 $v\in u+W_0^{1,p}(B_R)$ 是如下 Dirichlet 问题的弱解

$$\begin{cases}div\left(|Dv|^{p-2}Dv\right)=0,x\in B_R,\\ v=u,x\in\partial B_R.\end{cases} \tag{2.3}$$

那么，我们可以得到下面的比较引理。

引理 2.2. 设 $u\in W^{1,p}(\Omega)$ 是方程(1.1)的弱解， $v\in u+W_0^{1,p}(B_R)$ 是方程(2.3)的弱解，则存在 $c_1\geq 1$ 依赖于 n,p，当 $p>n$ 时，有估计

$$\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|Du-Dv|^p\,\mathrm{d}y\leq c_1\left[\frac{|\mu|(B_R)}{R^{n-1}}\right]^{\frac{p}{p-1}}\text{。} \tag{2.4}$$

证明：我们可以通过逼近理论(见[15]-[17])只研究 $\mu\in L^1$ 的情形。通过基本的尺度变换 $\tilde{u}(y)=R^{-1}u(Ry),\tilde{v}(y)=R^{-1}v(Ry)$ 且 $\tilde{\mu}(y)=R\mu(Ry)$

另外，通过归一化变换

$$\tilde{u}(y)=A^{-1}u(y),\tilde{v}(y)=A^{-1}v(y)\text{ 且 }\tilde{\mu}(y)=A^{1-p}\mu(y)\text{。}$$

这里

$$A=\left(|\mu|(B_1)\right)^{\frac{1}{p-1}}\text{。} \tag{2.5}$$

我们不妨假设 $R=1$ 且 $|\mu|(B_1)\leq 1$。故我们只需证明

$$\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}|Du-Dv|^p\,\mathrm{d}y\leq c_1\text{。} \tag{2.6}$$

首先，由弱解的定义可得

$$\int_{B_1}\left\langle|Du|^{p-2}Du-|Dv|^{p-2}Dv,D\varphi\right\rangle\mathrm{d}y=\int_{B_1}\varphi\mathrm{d}\mu\text{，} \tag{2.7}$$

对任意 $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$，任意 $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$ 和 $p\geq 2$，我们回顾以下基本不等式

$$c|\xi-\eta|^p\leq\left\langle|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta,\xi-\eta\right\rangle\text{。} \tag{2.8}$$

因为 $p>n$ 且 $u-v\in W_0^{1,p}(B_1)$，那么由 Sobolev 嵌入定理可得 $u-v\in L^\infty(B_1)$。那么取检验函数 $\varphi=u-v\in W_0^{1,p}(B_1)\cap L^\infty(B_1)$，由(2.7)式，(2.8)式，Sobolev 嵌入定理以及 $|\mu|(B_1)\leq 1$，可知

$$\|Du-Dv\|_{L^p(B_1)}^p\leq c\|u-v\|_{L^\infty(B_1)}|\mu|(B_1)\leq c\|Du-Dv\|_{L^p(B_1)}\text{。}$$

故，可得(2.6)式，所以结论得证。

下面我们记

$$E(Du,B)=\frac{1}{|B|}\int_B\left|Du-(Du)_B\right|^p\mathrm{d}y\text{。}$$

令 $\delta_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right),B(x,2R)\subset\Omega$。定义

$$B_i=B(x,r_i),r_i=\delta_1^iR\text{，}\tag{2.9}$$

其中 $i\ge0$ 为整数。我们选取

$$\delta_1=\left(\frac{1}{10^{8p}c_0}\right)^{\frac{1}{\beta_0}}\text{。}\tag{2.10}$$

这里 c_0,β_0 如定理 2.1 中的定义。

考虑 $v_i\in u+W_0^{1,p}(B_i)$ 是下述 Dirichlet 问题的弱解

$$\begin{cases}div\left(|Dv_i|^{p-2}Dv_i\right)=0,x\in B_i,\\v_i=u,x\in\partial B_i.\end{cases}\tag{2.11}$$

下面我们给出一个迭代引理。

引理 2.3. 设 $u\in W^{1,p}(\Omega)$ 是方程(1.1)的弱解，$v_i\in u+W_0^{1,p}(B_i)$ 是方程(2.11)的弱解，则有下式成立

$$E(Du,B_{i+1})\le\frac{1}{4^p}E(Du,B_i)+c_2\left[\frac{|\mu|(B_i)}{r_i^{n-1}}\right]^{\frac{p}{p-1}}\text{。}$$

这里 $c_2=4^{p+1}\delta_1^{-n}c_1$。

证明：由定理 2.1 中的(2.2)式和 δ_1 的定义式(2.10)式，可知

$$E(Dv_i,B_{i+1})\le\frac{E(Dv_i,B_i)}{64^p}\text{。}$$

再由引理 2.2 的(2.4)式和 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}E(Du,B_{i+1})&=\frac{1}{|B_{i+1}|}\int_{B_{i+1}}\left|Du-(Du)_{B_{i+1}}\right|^p\mathrm{d}y\\&\le\frac{2^{p-1}}{|B_{i+1}|}\int_{B_{i+1}}\left|Du-(Dv_i)_{B_{i+1}}\right|^p\mathrm{d}y+\frac{2^{p-1}}{|B_{i+1}|}\int_{B_{i+1}}|Du-Dv_i|^p\mathrm{d}y\\&\le\frac{4^p}{|B_{i+1}|}\int_{B_{i+1}}\left|Dv_i-(Dv_i)_{B_{i+1}}\right|^p\mathrm{d}y+\frac{4^p}{|B_{i+1}|}\int_{B_{i+1}}|Du-Dv_i|^p\mathrm{d}y\\&\le\frac{1}{16^p|B_i|}\int_{B_i}\left|Dv_i-(Dv_i)_{B_i}\right|^p\mathrm{d}y+\frac{4^p}{|B_{i+1}|}\int_{B_{i+1}}|Du-Dv_i|^p\mathrm{d}y\\&\le\frac{1}{4^p|B_i|}\int_{B_i}\left|Du-(Du)_{B_i}\right|^p\mathrm{d}y+\left(4^p\delta_1^{-n}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{4^p}\right)\frac{1}{|B_i|}\int_{B_i}|Du-Dv_i|^p\mathrm{d}y\\&\le\frac{1}{4^p}E(Du,B_i)+4^{p+1}\delta_1^{-n}c_1\left[\frac{|\mu|(B_i)}{r_i^{n-1}}\right]^{\frac{p}{p-1}}\text{。}\end{aligned}$$

引理得证。

下面我们完成定理 1.1 的证明。

证明：第一步. 设 $x\in\Omega$ 是 Du 的一个 Lebesgue 点，$B(x,2R)\subset\Omega$，以下我们考虑的球都是以 x 为球心的。我们选取

$$\lambda=H_1\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|Du|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}+H_2\int_0^{2R}\left(\frac{|\mu|(B_\rho)}{\rho^{n-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}, \tag{2.12}$$

其中

$$H_1=10^8\delta_1^{-4n} \text{ 且 } H_2=10^8c_1\delta_1^{-6n}。 \tag{2.13}$$

要证明定理 1.1 的结论，只需证明

$$|Du(x)|\le\lambda。 \tag{2.14}$$

我们定义

$$C_i=\sum_{j=i-2}^{i}\left(\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}|Du|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}+\delta_1^{-n/p}\left(E\left(Du,B_i\right)\right)^{1/p}。 \tag{2.15}$$

其中 $i\ge2$ 为整数。对 $i\ge0$ 我们有

$$\delta_1B_i=B_{i+1}\subset\left(\frac{1}{10^{8p}c_0}\right)^{\frac{1}{\beta_0}}B_i\subset\frac{1}{4}B_i\subset B_i, \tag{2.16}$$

由 H_1 的选取，可知对 $i=2,3$ 有下式成立

$$\begin{aligned}C_i&\le3\delta_1^{-3n/p}\left(\frac{1}{|B_0|}\int_{B_0}|Du|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}+2\delta_1^{-4n/p}\left(\frac{1}{|B_0|}\int_{B_0}|Du|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\\&\le5\delta_1^{-4n}\left(\frac{1}{|B_0|}\int_{B_0}|Du|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\le\frac{\lambda}{100}\end{aligned} \tag{2.17}$$

又因为

$$\begin{aligned}&\int_0^{2R}\left(\frac{|\mu|(B_\rho)}{\rho^{n-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{r_{i+1}}^{r_i}\left(\frac{|\mu|(B_\rho)}{\rho^{n-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\int_R^{2R}\left(\frac{|\mu|(B_\rho)}{\rho^{n-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\\&\ge\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{|\mu|(B_{i+1})}{r_i^{n-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\int_{r_{i+1}}^{r_i}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\left(\frac{|\mu|(B_0)}{(2R)^{n-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\int_R^{2R}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\\&=\delta_1^{\frac{n-1}{p-1}}\log\left(\frac{1}{\delta_1}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{|\mu|(B_{i+1})}{r_{i+1}^{n-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}+\frac{\log 2}{2^{(n-1)/(p-1)}}\left[\frac{|\mu|(B_0)}{r_0^{n-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}\\&\ge\delta_1^{\frac{n-1}{p-1}+1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{|\mu|(B_i)}{r_i^{n-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}。\end{aligned} \tag{2.18}$$

所以，由(2.12)式和(2.13)式的 H_2，可知

$$10^8 c_1 \delta_1^{-4n} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{|\mu|(B_i)}{r_i^{n-1}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \le \lambda \text{，} \tag{2.19}$$

且

$$10^8 c_1 \delta_1^{-4n} \left(\frac{|\mu|(B_i)}{r_i^{n-1}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \le \lambda \text{。} \tag{2.20}$$

第二步. 由(2.17)式，不失一般性，我们可假设存在$i_e \ge 3$，使得

$$C_{i_e} \le \frac{\lambda}{100} \text{ 且 } C_j > \frac{\lambda}{100}\text{，}\quad j > i_e \text{。} \tag{2.21}$$

否则，对递增序列$\{j_i\}$(任意$i \in \mathbb{N}$)，都有$C_{j_i} \le \lambda/100$。由于x是Du的一个Lebesgue点，则有

$$|Du(x)| = \lim_{i\to\infty} \left(\frac{1}{|B_{j_i}|} \int_{B_{j_i}} |Du|^p \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\lambda}{100} \text{。}$$

故$|Du(x)| \le \lambda$，结论得证。

第三步. 下面我们在$C_j > \lambda/100\,(j > i_e)$情况下继续定理1.1的证明。简记

$$A_i = E(Du, B_i) \text{ 且 } a_i = \left|(Du)_{B_i}\right| \text{。}$$

由(2.15)式和(2.21)式，可知

$$\sum_{j=i_e-2}^{i_e} a_j + \delta_1^{-\frac{n}{p}} A_{i_e}^{\frac{1}{p}} \le C_{i_e} \le \frac{\lambda}{100} \text{。} \tag{2.22}$$

现在，我们用归纳法证明：当$j \ge i_e$时，有下式成立

$$a_j + A_j^{\frac{1}{p}} \le \lambda \text{。} \tag{2.23}$$

即假设当$j \in \{i_e, \cdots, i\}$时，(2.23)式成立，证明$j = i+1$时，(2.23)式仍成立。首先，由引理2.3可知

$$A_{i+1} \le \frac{1}{4^p} A_i + c_2 \left[\frac{|\mu|(B_i)}{r_i^{n-1}} \right]^{\frac{p}{p-1}}\text{，}$$

即

$$A_{i+1}^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{4} A_i^{\frac{1}{p}} + c_2^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|\mu|(B_i)}{r_i^{n-1}} \right]^{\frac{1}{p-1}} \text{。} \tag{2.24}$$

结合(2.20)式和(2.23)式，有

$$A_{i+1}^{\frac{1}{p}} \le \frac{\lambda}{4} + c_2^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|\mu|(B_i)}{r_i^{n-1}} \right]^{\frac{1}{p-1}} \le \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} \le \frac{\lambda}{2} \text{。} \tag{2.25}$$

进一步，由(2.24)式对$j \in \{i_e, \cdots, i+1\}$求和，可得

$$\sum_{j=i_e}^{i+1} A_j^{\frac{1}{p}} \le A_{i_e}^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{4} \sum_{j=i_e}^{i} A_j^{\frac{1}{p}} + c_2^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{|\mu|(B_j)}{r_j^{n-1}} \right]^{\frac{1}{p-1}}\text{，}$$

因此

$$\sum_{j=i_e}^{i+1} A_j^{\frac{1}{p}} \le 2A_{i_e}^{\frac{1}{p}} + 2c_2^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{|\mu|(B_j)}{r_j^{n-1}} \right]^{\frac{1}{p-1}} 。 \tag{2.26}$$

另一方面，又因为

$$\begin{aligned} a_{i+1} - a_{i_e} &= \sum_{j=i_e}^{i} \left(a_{j+1} - a_j \right) \\ &\le \sum_{j=i_e}^{i} \frac{1}{|B_{j+1}|} \int_{B_{j+1}} \left| Du - (Du)_{B_j} \right| \mathrm{d}y \\ &\le \sum_{j=i_e}^{i} \left(\frac{1}{|B_{j+1}|} \int_{B_{j+1}} \left| Du - (Du)_{B_j} \right|^p \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \sum_{j=i_e}^{i} \delta_1^{-\frac{n}{p}} A_j^{\frac{1}{p}} 。 \end{aligned}$$

结合(2.19)式，(2.22)式和(2.26)式，可得

$$a_{i+1} \le a_{i_e} + 2\delta_1^{-\frac{n}{p}} A_{i_e}^{\frac{1}{p}} + 2\delta_1^{-\frac{n}{p}} c_2^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{|\mu|(B_j)}{r_j^{n-1}} \right]^{\frac{1}{p-1}} \le 2C_{i_e} + \frac{\lambda}{10^3} \le \frac{\lambda}{2} 。$$

所以，由(2.25)式和上式，即有 $a_{i+1} + A_{i+1}^{\frac{1}{p}} \le \lambda$ 成立。综上所述，对任意 $j \ge i_e$，(2.23)式成立。最后，由于 x 是 Du 的 Lebesgue 点，故

$$\left| Du(x) \right| = \lim_{j \to \infty} a_j \le \lambda 。$$

从而我们完成了定理 1.1 的证明。

参考文献 (References)

[1] Hedberg, L. and Wolff, T. (1983) Thin Sets in Nonlinear Potential Theory. *Annales de l'institut. Fourier*, **33**, 161-187. http://dx.doi.org/10.5802/aif.944

[2] Kilpeläinen, T. and Malý, J. (1992) Degenerate Elliptic Equations with Measure Data and Nonlinear Potentials. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienze* (*IV*), **19**, 591-613.

[3] Kilpeläinen, T. and Malý, J. (1994) The Wiener Test and Potential Estimates for Quasilinear Elliptic Equations. *Acta Mathematica*, **172**, 137-161. http://dx.doi.org/10.1007/BF02392793

[4] Trudinger, N. and Wang, X. (2002) On the Weak Continuity of Elliptic Operators and Applications to Potential Theory. *American Journal of Mathematics*, **124**, 369-410. http://dx.doi.org/10.1353/ajm.2002.0012

[5] Korte, R. and Kuusi, T. (2010) A Note on the Wolff Potential Estimate for Solutions to Elliptic Equations Involving Measures. *Advances in Calculus of Variations*, **3**, 99-113. http://dx.doi.org/10.1515/acv.2010.005

[6] Duzaar, F. and Mingione, G. (2011) Gradient Estimates via Non-Linear Potentials. *American Journal of Mathematics*, **133**, 1093-1149. http://dx.doi.org/10.1353/ajm.2011.0023

[7] Duzaar, F. and Mingione, G. (2010) Gradient Estimates via Linear and Nonlinear Potentials. *Journal of Functional Analysis*, **259**, 2961-2998. http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2010.08.006

[8] Mingione, G. (2011) Gradient Potential Estimates. *Journal of the European Mathematical Society*, **13**, 459-486. http://dx.doi.org/10.4171/jems/258

[9] Kuusi, T. and Mingione, G. (2013) Linear Potentials in Nonlinear Potential Theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **207**, 215-246. http://dx.doi.org/10.1007/s00205-012-0562-z

[10] Lieberman, M. (1991) The Natural Generalization of the Natural Conditions of Ladyzhenskaya and Urall'tseva for Elliptic Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **16**, 311-361. http://dx.doi.org/10.1080/03605309108820761

[11] Fan, X. (2007) Global $C^{1,\alpha}$ Regularity for Variable Exponent Elliptic Equations in Divergence Form. *Journal of Differential Equations*, **235**, 397-417. http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2007.01.008

[12] Kinnunen, J. and Zhou, S. (1999) A Local Estimate for Nonlinear Equations with Discontinuous Coefficients. *Communications in Partial Differential Equations*, **24**, 2043-2068. http://dx.doi.org/10.1080/03605309908821494

[13] DiBenedetto, E. and Manfredi, J. (1993) On the Higher Integrability of the Gradient of Weak Solutions of Certain Degenerate Elliptic Systems. *American Journal of Mathematics*, **115**, 1107-1134. http://dx.doi.org/10.2307/2375066

[14] Manfredi, J. (1984) Regularity for Minima of Functionals with *p*-Growth. *Journal of Differential Equations*, **76**, 203-212. http://dx.doi.org/10.1016/0022-0396(88)90070-8

[15] Boccardo, L. and Gallouët, T. (1989) Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations Involving Measure Data. *Journal of Functional Analysis*, **87**, 149-169. http://dx.doi.org/10.1016/0022-1236(89)90005-0

[16] Boccardo, L. and Gallouët, T. (1992) Nonlinear Elliptic Equations with Right-Hand Side Measures. *Communications in Partial Differential Equations*, **17**, 641-655. http://dx.doi.org/10.1080/03605309208820857

[17] Mingione, G. (2007) The Calderón-Zygmund Theory for Elliptic Problems with Measure Data. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienze* (*V*), **6**, 195-261.