Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(5), 437-440
Published Online September 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65059

Hans汉斯

Finitely Generated Torsion-Free Nilpotent Groups Admitting an Automorphism of Order Four

Xiaodi Ma[1], Tao Xu[2*]

[1]College of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu
[2]College of Science, Hebei University of Engineering, Handan Hebei
Email: Dmaxiaodi@163.com, *gtxutao@163.com

Received: Sep. 3rd, 2016; accepted: Sep. 19th, 2016; published: Sep. 26th, 2016

Abstract

Let G be a finitely generated torsion-free nilpotent group and α an automorphism of order four of G. If the map $G \to G$ defined by $g^{\varphi} = [g, \alpha]$ is surjective, then the second derived subgroup G'' is included in the centre of G and $C_G(\alpha^2)$ is abelian.

Keywords

Finitely Generated, Torsion-Free Nilpotent Group, Regular Automorphism, Automorphism

有限生成无挠幂零群的4阶自同构

马晓迪[1]，徐　涛[2*]

[1]南京理工大学计算机科学与工程学院，江苏　南京
[2]河北工程大学理学院，河北　邯郸
Email: Dmaxiaodi@163.com, *gtxutao@163.com

收稿日期：2016年9月3日；录用日期：2016年9月19日；发布日期：2016年9月26日

*通讯作者。

文章引用: 马晓迪, 徐涛. 有限生成无挠幂零群的 4 阶自同构[J]. 理论数学, 2016, 6(5): 437-440.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65059

摘　要

设G是有限生成无挠幂零群，α是G的4阶自同构且$\varphi:G\to G\left(g\mapsto[g,\alpha]\right)$是满射，则$G$的二阶导群$G''$包含在$G$的中心$Z(G)$里且$C_G\left(\alpha^2\right)$是Abel群。

关键词

有限生成，无挠幂零群，正则自同构，自同构

1. 引言和主要结果

本文采用的符号和术语都是标准的，按照[1]。

在群论里，如果群G的自同构α没有非平凡的不动点，则称α是正则自同构。

对于2阶正则自同构，Burnside [2]证明了一个经典结果。即

命题1.1 设G是有限群，α是G的2阶正则自同构当且仅当G是奇阶Abel群。

对于3阶正则自同构，Gorenstein [3]证明了具有3阶正则自同构的有限群是幂零群。Neumann [4]把有限群推广到任意群，得到了下面的结果。

命题1.2 设G是一个群，α是G的3阶正则自同构且$\varphi:G\to G\left(g\mapsto[g,\alpha]\right)$是满射，则$G$是幂零类不超过2的幂零群。

对于素数阶正则自同构，Thompson [5]证明了有限群论里的一个著名结果：如果有限群G有一个素数阶的正则自同构，那么G是幂零群。在无限群中，Higman [6]用Lie环的方法证明了：如果局部幂零群G具有素数p阶的正则自同构，那么G是幂零类不超过$h(p)$的幂零群，其中$h(p)$是只与p有关的函数。在[7]中，我们推广了Higman的结果，用纯群论的方法证明了下面的结论。

命题1.3 设G是剩余有限的可解群或是剩余有限的可解群的有限扩张，α是G的素数p阶正则自同构且$\varphi:G\to G\left(g\mapsto[g,\alpha]\right)$是满射，则$G$是幂零类不超过$h(p)$的幂零群，其中$h(p)$是只与$p$有关的函数。

受命题1.2和命题1.3的启发，我们舍去自同构正则性的假设，只考虑在满射的条件下，自同构的阶数对群结构的影响。在[8]中，我们研究了有限生成无挠幂零群的素数p阶自同构，证明了下面的结果。

命题1.4 设G是有限生成无挠幂零群，α是G的p阶自同构且$\varphi:G\to G\left(g\mapsto[g,\alpha]\right)$是满射，则$G$是幂零类不超过$h(p)$的幂零群，其中$h(p)$是只与$p$有关的函数。

在本文中，我们考虑有限生成无挠幂零群的4阶自同构。得到了下面的结果。

定理1.1 设G是有限生成无挠幂零群，α是G的4阶自同构且$\varphi:G\to G\left(g\mapsto[g,\alpha]\right)$是满射，则以下结论成立

(i) $G''\le Z(G)$；

(ii) $C_G\left(\alpha^2\right)$是Abel群。

2. 定理的证明

引理2.1 设G是一群，α是G的n阶自同构且$\varphi:G\to G\left(g\mapsto[g,\alpha]\right)$是满射，则对于任意的$x\in G$，有$xx^{\alpha}x^{\alpha^2}\cdots x^{\alpha^{n-1}}=1$。

证明 因为φ是满射，所以对于任意的$x\in G$，存在某个$g\in G$，使得$x=[g,\alpha]$。因此

$$xx^{\alpha}x^{\alpha^2}\cdots x^{\alpha^{n-1}}=[g,\alpha][g,\alpha]^{\alpha}[g,\alpha]^{\alpha^3}\cdots[g,\alpha]^{\alpha^{n-1}}=g^{-1}g^{\alpha^n}=g^{-1}g=1。$$

引理 2.2 设G是有限生成无挠幂零群，α是G的n阶自同构且$\varphi:G\to G(g\mapsto[g,\alpha])$是满射，对于任意的不整除$n$的素数$q$，以下结论成立

(i) $\bigcap_{t>0}G^{q^t}=1$；

(ii) 对于任意的正整数t，α诱导了G/G^{q^t}的正则自同构α_t。

证明 (i) 由[1]的定理 5.2.21 可知G是剩余有限q-群。因此对于任意的正整数t，G/G^{q^t}是有限q-群且$\bigcap_{t>0}G^{q^t}=1$。

(ii) 任取$\bar{g}\in G/G^{q^t}$，使得$\bar{g}^{\alpha_t}=\bar{g}$。在$G/G^{q^t}$中，我们应用引理 2.1 可得

$$\bar{g}^{\alpha_t}\bar{g}^{\alpha_t^2}\cdots\bar{g}^{\alpha_t^{n-1}}=\bar{g}^n=1。$$

因为q不整除n，所以$\bar{g}=1$。因此α_t是正则自同构。

引理 2.3 [9] 设G是局部有限群，α是G的 4 阶正则自同构，则G''包含在$Z(G)$中。

定理 1.1 的证明 (i) 取$q\neq 2$，根据引理 2.2 的(ii)我们可以知道对于任意的正整数t，α诱导了G/G^{q^t}的正则自同构α_t。易知α_t的阶数整除 4。由命题 1.1 和引理 2.3 知道$\left(G/G^{q^t}\right)''$包含在G/G^{q^t}的中心里。因此$\left[\left(G/G^{q^t}\right)'',G/G^{q^t}\right]=1$。即$\left[G''G^{q^t},G\right]\le G^{q^t}$。从而

$$[G'',G]\le\left[G''G^{q^t},G\right]\le G^{q^t}。$$

进而

$$[G'',G]\le\bigcap_{t>0}G^{q^t}。$$

因为$\bigcap_{t>0}G^{q^t}=1$，所以$G''\le Z(G)$。

(ii) 记$\varphi=\alpha^2$，只需证$C_G(\varphi)$是 Abel 群即可。取$q\neq 2$，考虑$C_{G/G^{q^t}}(\bar{\varphi})$。如果$C_{G/G^{q^t}}(\bar{\varphi})=1$，则$\bar{\varphi}$是$G/G^{q^t}$的 2 阶正则自同构。由命题 1.1 知道$G/G^{q^t}$是 Abel 群。因此对于任意的$g_1,g_2\in G$，有$[\bar{g}_1,\bar{g}_2]=1$。即$[g_1,g_2]\in G^{q^t}$。因为$\bigcap_{t>0}G^{q^t}=1$，所以$[g_1,g_2]=1$。这表明$G$是 Abel 群。显然$C_G(\varphi)$也是 Abel 群。如果$C_{G/G^{q^t}}(\bar{\varphi})\neq 1$，则$C_{G/G^{q^t}}(\bar{\varphi})$是$\bar{\alpha}$-不变，因此$\bar{\alpha}$是$C_{G/G^{q^t}}(\bar{\varphi})$的 1 阶或 2 阶自同构。注意到

$$C_{C_{G/G^{q^t}}(\bar{\varphi})}(\bar{\alpha})\le C_{G/G^{q^t}}(\bar{\alpha})=1,$$

于是$\bar{\alpha}$是$C_{G/G^{q^t}}(\bar{\varphi})$的正则自同构。因为$C_{G/G^{q^t}}(\bar{\varphi})\neq 1$，所以$\bar{\alpha}$是$C_{G/G^{q^t}}(\bar{\varphi})$的 2 阶正则自同构。由命题 1.1 知道$C_{G/G^{q^t}}(\bar{\varphi})$是 Abel 群。注意到

$$C_G(\varphi)/C_G(\varphi)\cap G^{q^t}\cong C_G(\varphi)G^{q^t}/G^{q^t}\le C_{G/G^{q^t}}(\bar{\varphi}),$$

我们有$C_G(\varphi)/C_G(\varphi)\cap G^{q^t}$是 Abel 群。所以对于任意的$g_1,g_2\in C_G(\varphi)$，有$[\bar{g}_1,\bar{g}_2]=1$。即$[g_1,g_2]\in C_G(\varphi)\cap G^{q^t}\le G^{q^t}$。因为$\bigcap_{t>0}G^{q^t}=1$，所以$[g_1,g_2]=1$。这表明$C_G(\varphi)$是 Abel 群。

基金项目

河北省教育厅青年基金(QN2016184)，河北工程大学博士基金和河北工程大学研究生教育教学改革研究项目(161290140004)资助。

参考文献 (References)

[1] Robinson, D.J.S. (1996) A Course in the Theory of Groups. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-8594-1

[2] Burnside, W. (1955) Theory of Groups of Finite Order. 2nd Edition, Dover Publications Inc., New York.

[3] Gorenstein, D. (1980) Finite Groups. Chelsea Publishing Company, New York.

[4] Neumann, B.H. (1956) Group with Automorphisms That Leave Only the Neutral Element Fixed. *Archiv der Mathematik*, **7**, 1-5. http://dx.doi.org/10.1007/BF01900516

[5] Thompson, J. (1959) Finite Groups with Fixed-Point-Free Automorphisms of Prime Order. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **45**: 578-581. http://dx.doi.org/10.1073/pnas.45.4.578

[6] Higman, G. (1957) Groups and Rings Having Automorphisms without Non-Trivial Fixed Elements. *Journal of the London Mathematical Society*, **64**, 321-334. http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-32.3.321

[7] 徐涛，刘合国. 有限秩的可解群的正则自同构[J]. 数学年刊, 2014, 35A(5): 543-550.

[8] Xu, T. and Liu, H.G. (2016) Finitely Generated Torsion-Free Nilpotent Groups Admitting an Automorphism of Prime Order. *Communications in Mathematical Sciences*, **32**, 167-172.

[9] Kovács, L.G. (1961) Group with Regular Automorphisms of Order Four. *Mathematische Zeitschrift*, **75**, 277-294. http://dx.doi.org/10.1007/BF01211026