Pure Mathematics 理论数学, **2016, 6(5), 402-410**
Published Online September 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65055

Two New Eigenvalue Inclusion Sets for Tensors

Ruiyan Hu, Jing Zhao, Yaotang Li*

School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: 12014000810@mail.ynu.edu.cn, *liyaotang@ynu.edu.cn

Received: Sep. 1st, 2016; accepted: Sep. 16th, 2016; published: Sep. 20th, 2016

Abstract

The concept of tensors is a generalization of matrices to high order. And there are some important applications in many scientific fields, such as data analysis, signal and image processing and so on. Tensor eigenvalue theory is an important aspect of tensor research and application. In this paper, two new eigenvalue inclusion sets for tensors are given, and it is proved that the new eigenvalue inclusion sets are tighter than the classical Gersgorin inclusion set. In addition, as applications of the results, two sufficient conditions for the (semi-)positive definite property of the even order symmetric tensors are obtained.

Keywords

Tensor, Eigenvalue Inclusion Set, Symmetric Tensor, Positive Definite

两个新的张量特征值包含区域

胡汭炎，赵　晶，李耀堂*

云南大学数学与统计学院，云南　昆明
Email: 12014000810@mail.ynu.edu.cn, *liyaotang@ynu.edu.cn

收稿日期：2016年9月1日；录用日期：2016年9月16日；发布日期：2016年9月20日

*通讯作者。

文章引用: 胡汭炎, 赵晶, 李耀堂. 两个新的张量特征值包含区域[J]. 理论数学, 2016, 6(5): 402-410.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65055

摘　要

张量是矩阵的高阶推广，在数据分析、信号与图像处理等许多科学领域中都有重要应用，而张量的特征值是张量理论和应用研究的一个重要方面。本文给出了两个新的张量特征值包含集，证明了所得的包含集含于经典的Gersgorin特征值包含集中，并由其得到偶数阶实对称张量(半)正定性的两个充分条件。

关键词

张量，特征值包含集，对称张量，正定性

1. 引言

张量是矩阵的高阶推广，在信号图像处理[1]，非线性优化[2]，高阶统计学[3]，数据挖掘与处理[1]和弹性分析[4]等方面有重要的应用。

设 $\mathcal{A}=\left[a_{i_1\cdots i_m}\right]$，若 $a_{i_1\cdots i_m}\in\mathbb{C}(\mathbb{R})$，其中 $j=1,\cdots,m;i_j=1,\cdots,n$，则称 $\mathcal{A}$ 为 m 阶 n 维的复(实)张量，记作 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{[m,n]}\left(\mathbb{R}^{[m,n]}\right)$。显然，向量是一阶张量，矩阵是二阶张量。此外，若存在复(实) λ 和非零向量 $x=\left[x_1,\cdots,x_n\right]^{\mathrm{T}}$ 满足多元齐次方程：

$$\mathbb{A}x^{m-1}=\lambda x^{[m-1]},$$

则称 λ 为 $\mathcal{A}$ 的特征值，x 为 $\mathcal{A}$ 的相应于 λ 的特征向量，其中 $\mathcal{A}x^{m-1}$ 和 $x^{[m-1]}$ 为 n 维向量，其第 i 个元素分别为：

$$\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N}a_{ii_2,\cdots,i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m} \text{ 和 } \left(x^{[m-1]}\right)_i=x_i^{m-1}。$$

若 $\mathcal{A}$ 和 x 是实的，则 λ 是实的，这时称 λ 为张量 $\mathcal{A}$ 的 H-特征值。

设张量 $\mathcal{A}=\left[a_{i_1\cdots i_m}\right]\in\mathbb{R}^{[m,n]}$，若它的每一个元素 $a_{i_1\cdots i_m}\geq 0(>0)$，则称 $\mathcal{A}$ 为非负(正)张量，记作 $\mathcal{A}\geq 0(>0)$。若对任意 $\pi\in\Pi_m$ 都有：

$$a_{i_1,\cdots,i_m}=a_{\pi(i_1,\cdots,i_m)},$$

则称 $\mathcal{A}$ 为对称张量[5]，其中 Π_m 是指标为 m 的置换群。令 $\sigma_{i_1,\cdots,i_m}$ 为 Kronecher 符号，即若 $i_1=i_2=\cdots=i_m$，则 $\sigma_{i_1,\cdots,i_m}=1$，否则 $\sigma_{i_1,\cdots,i_m}=0$。用 $\mathrm{I}=\left(\mathrm{I}_{i_1\cdots i_m}\right)$ 表示 m 阶 n 维单位张量，其元素如下：

$$\mathrm{I}_{i_1\cdots i_m}=\begin{cases}1, \text{ 若 } i_i=i_2=\cdots=i_m,\\ 0, \text{ 否则.}\end{cases}$$

设 $\mathcal{A}=\left[a_{i_1\cdots i_m}\right]\in\mathbb{C}^{[m,n]}$，若 $\mathcal{A}$ 的所有特征值都不为零，则称 $\mathcal{A}$ 是非奇异的。称 $\mathcal{A}=\left[a_{i_1\cdots i_m}\right]\in\mathbb{R}^{[m,n]}$ 为 Z-张量，如果它的所有非对角元非正，即 $\mathcal{A}$ 可表示为 $\mathcal{A}=s\mathcal{I}-\mathcal{B}$，其中 $s>0$，$\mathcal{B}\geq 0$ ([6]，定义 3)。此外，若 $s\geq\rho(\mathcal{B})$，则称 $\mathcal{A}$ 为 M-张量；若 $s>\rho(\mathcal{B})$，则称 $\mathcal{A}$ 为非奇异的 M-张量([6]，定义 4)。

定义 1.1 ([6]，定义 8) 设 $\mathcal{A}=\left[a_{i_1\cdots i_m}\right]\in\mathbb{C}^{[m,n]}$，用 $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}=\left(\mathcal{M}_{i_1i_2\cdots i_m}\right)$ 表示 $\mathcal{A}$ 的比较张量，其中：

$$\mathcal{M}_{i_1i_2\cdots i_m}=\begin{cases}\left|a_{i_1i_2\cdots i_m}\right|, \text{若} i_1=i_2=\cdots=i_m,\\ -\left|a_{i_1i_2\cdots i_m}\right|, \text{否则.}\end{cases}$$

定义 1.2 ([6]，定义 9) 若张量 $\mathcal{A}$ 的比较张量 $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ 是 M-张量，则称 $\mathcal{A}$ 为 H-张量。若张量 $\mathcal{A}$ 的比较张量 $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ 是非奇异的 M-张量，则称 $\mathcal{A}$ 为强 H-张量。

设 $\mathcal{A}=\left(a_{i_1\cdots i_m}\right)\in\mathbb{R}^{[m,n]}$，定义 m 次齐次 n 元多项式 $f(x)$ 如下：

$$f(x):=\mathcal{A}x=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m\in N}a_{i_1i_2\cdots i_m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}，\quad x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n。$$

设张量 $\mathcal{A}$ 为偶数阶的实对称张量，若对任意的非零向量 $x\in\mathbb{R}^n$，$\mathcal{A}x>0$ ($\mathcal{A}x\ge 0$)，则 $\mathcal{A}$ 是正(半)定的。

定理 1.1 ([5]，定理 5)设 $\mathcal{A}$ 是偶数阶实对称张量，则 $\mathcal{A}$ 是正(半)定的当且仅当 $\mathcal{A}$ 的所有 H-特征值是正(非负)的。

张量 $\mathcal{A}$ 的所有特征值构成的集合称为 $\mathcal{A}$ 的谱，记作 $\sigma(\mathcal{A})$。张量的特征值在张量理论和应用中具有特别重要的意义，然而当张量的阶数和维数较高时，张量特征值的精确计算却是相当困难的。因此，张量特征值的定位和估计成为当今学者们研究的一个热门问题[5] [7]-[9]。祁在[5]中把关于矩阵的著名的 Gerschgorin 特征值包含定理推广到实对称张量，这个结果很容易推广到一般的张量中，即有：

定理 1.2 ([5]，定理 6) 设 $\mathcal{A}=\left[a_{i_1\cdots i_m}\right]\in\mathbb{C}^{[m,n]}$，则

$$\sigma(\mathcal{A})\subset\Gamma(\mathcal{A})=\bigcup_{i\in N}\Gamma_i(\mathcal{A})，$$

其中 $\Gamma_i(\mathcal{A})=\left\{z\in\mathbb{C};\left|z-a_{i,\cdots,i}\right|\le r_i(\mathcal{A})\right\}$，$r_i(\mathcal{A})=\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in N\\ \sigma_{i,i_2,\cdots,i_m}=0}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|$。

2015 年，Li 等在文[9]中又给出张量特征值的如下包含区域。

定理 1.3 ([9]，定理 2.1) 设 $\mathcal{A}=\left[a_{i_1\cdots i_m}\right]\in\mathbb{C}^{[m,n]}$，$n\ge 2$，则

$$\sigma(\mathcal{A})\subset\Omega(\mathcal{A})=\left(\bigcup_{i\in N}\hat{\Omega}_i(\mathcal{A})\right)\cup\left(\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\ne j}}\left(\tilde{\Omega}_{i,j}(\mathcal{A})\cap\Gamma_i(\mathcal{A})\right)\right)$$

其中：

$$\hat{\Omega}_i(\mathcal{A})=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-a_{i\cdots i}\right|\le r_i^{\Delta_i}(\mathcal{A})\right\}；$$

$$\tilde{\Omega}_{i,j}(\mathcal{A})=\left\{z\in\mathbb{C}:\left(\left|z-a_{i\cdots i}\right|-r_i^{\Delta_i}(\mathcal{A})\right)\left(\left|z-a_{j\cdots j}\right|-r_j^{\bar{\Delta}_i}(\mathcal{A})\right)\le r_i^{\bar{\Delta}_i}(\mathcal{A})r_j^{\Delta_i}(\mathcal{A})\right\}；$$

$$r_i^{\Delta_i}(\mathcal{A})=\sum_{\substack{(i_2,\cdots,i_m)\in\Delta_i\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|,\ r_i^{\bar{\Delta}_i}(\mathcal{A})=\sum_{(i_2,\cdots,i_m)\in\bar{\Delta}_i}\left|a_{ii_2\cdots i_m}\right|；$$

$$\Delta_i=\left\{\left(i_2,i_3,\cdots,i_m\right):\text{存在}\, j\in\{2,\cdots,m\}\,\text{使得}\, i_j=i,\text{其中}\, i,i_2,\cdots,i_m\in N\right\}；$$

$$\bar{\Delta}_i=\left\{\left(i_2,i_3,\cdots,i_m\right):\square\text{于任意的}\, j\in\{2,\cdots,m\}\,\text{都有}\, i_j\ne i,\text{其中}\, i,i_2,\cdots,i_m\in N\right\}。$$

定理 1.4 ([9]，定理 2.3) 设 $\mathcal{A}$ 是 m 阶 n 维复张量，$n\ge 2$，则：$\Omega(\mathcal{A})\subset\Gamma(\mathcal{A})$。

本文继续张量特征值的定位问题的研究。在第二节，给出两个新的张量特征值包含区域，并对得到的包含区域进行比较。在第三节给出几个数值例子。在第四节，应用所获张量特征值包含区域给出张量正定(半正定)的几个充分性条件。

2. 新的张量特征值包含区域

最近，Wang 等在文[10]给出了张量的一个如下非奇异性条件。

引理 2.1 ([10]，定理 3.1) 设 $\mathcal{A}=\left[a_{i_1\cdots i_m}\right]\in\mathbb{C}^{[m,n]}$，若

$$\left|a_{i\cdots i}\right|^{m-1}\left|a_{j\cdots j}\right|>r_i^{m-1}(\mathcal{A})r_j(\mathcal{A}),\forall i,j\in N,i\neq j,$$

则 $\mathcal{A}$ 是非奇异的 H-张量。

可得下面的张量的特征值包含区域。

定理 2.1 设 $\mathcal{A}=\left[a_{i_1\cdots i_m}\right]\in\mathbb{C}^{[m,n]}$，$n\geq 2$，则

$$\sigma(\mathcal{A})\subset\Phi(\mathcal{A})=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\Phi_{i,j}(\mathcal{A}),$$

其中 $\Phi_{ij}(\mathcal{A})=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-a_{i\cdots i}\right|^{m-1}\left|z-a_{j\cdots j}\right|\leq\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1}r_j(\mathcal{A})\right\}$。

证明： 设 $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$，则 $\lambda\mathrm{I}-\mathcal{A}$ 是奇异的。若 $\lambda\notin\Phi(\mathcal{A})$，则 $\lambda\notin\Phi_{ij}(\mathcal{A}),\forall i,j\in N,i\neq j$，即

$$\left|\lambda-a_{i\cdots i}\right|^{m-1}\left|\lambda-a_{j\cdots j}\right|>\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1}r_j(\mathcal{A}),\forall i,j\in N,i\neq j。$$

再由引理 2.1 知 $\lambda\mathrm{I}-\mathcal{A}$ 是非奇异的，产生矛盾，故 $\lambda\in\Phi(\mathcal{A})$。□

注 2.1： 当 $m=2$，即 $\mathcal{A}$ 退化为矩阵时：

$$\Phi_{ij}(\mathcal{A})=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-a_{i\cdots i}\right|\left|z-a_{j\cdots j}\right|\leq r_i(\mathcal{A})r_j(\mathcal{A})\right\}。$$

这时定理 2.1 就是矩阵的 Brauer 特征值包含定理。

下面我们给出另一个张量特征值包含区域。

定理 2.2 设 $\mathcal{A}=\left[a_{i_1\cdots i_m}\right]\in\mathbb{C}^{[m,n]}$，$n\geq 2$，则：

$$\sigma(\mathcal{A})\subset\Psi(\mathcal{A})=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\Psi_{i,j}(\mathcal{A}),$$

其中 $\Psi_{ij}(\mathcal{A})=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-a_{i\cdots i}\right|^{m-1}\left(\left|z-a_{j\cdots j}\right|-r_j^{\bar{\Delta}_i}(\mathcal{A})\right)\leq\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1}r_j^{\Delta_i}(\mathcal{A})\right\}$。

证明： 对于任意的 $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$，设 $x=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ 是相应的特征向量，则

$$\mathcal{A}x^{m-1}=\lambda x^{[m-1]}。\tag{1}$$

设 $\left|x_t\right|\geq\left|x_s\right|\geq\max\left\{\left|x_k\right|:k\in N,k\neq s,k\neq t\right\}$，则 $\left|x_t\right|>0$。由(1)式得：

$$\left(\lambda-a_{t\cdots t}\right)x_t^{m-1}=\sum_{\sigma_{ti_2\cdots i_m}=0}a_{ti_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m},$$

$$\left|\lambda-a_{t\cdots t}\right|\left|x_t\right|^{m-1}\leq\sum_{\sigma_{ti_2\cdots i_m}=0}\left|a_{ti_2\cdots i_m}\right|\left|x_{i_2}\right|\cdots\left|x_{i_m}\right|。$$

因 $\left|x_t\right|\geq\left|x_s\right|\geq\max\left\{\left|x_k\right|:k\in N,k\neq s,k\neq t\right\}$，故

$$\left|\lambda-a_{t\cdots t}\right|\left|x_t\right|^{m-1}\leq\sum_{\sigma_{ti_2\cdots i_m}=0}\left|a_{ti_2\cdots i_m}\right|\left|x_{i_2}\right|\cdots\left|x_{i_m}\right|\leq\sum_{\sigma_{ti_2\cdots i_m}=0}\left|a_{ti_2\cdots i_m}\right|\left|x_t\right|^{m-2}\left|x_s\right|。$$

又因 $\left|x_t\right|>0$，对上述不等式两边同时除以 $\left|x_t\right|^{m-2}$ 得：

$$\left|\lambda-a_{t\cdots t}\right|\left|x_t\right|\leq\sum_{\sigma_{ti_2\cdots i_m}=0}\left|a_{ti_2\cdots i_m}\right|\left|x_s\right|。$$

于是有

$$\left|\lambda-a_{t\cdots t}\right|^{m-1}\left|x_t\right|^{m-1}\le\left(\sum_{\sigma_{ti_2\cdots i_m}=0}\left|a_{ti_2\cdots i_m}\right|\right)^{m-1}\left|x_s\right|^{m-1} \tag{2}$$

同样由(1)式可得

$$\begin{aligned}\left(\lambda-a_{s\cdots s}\right)x_s^{m-1}&=\sum_{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0}a_{si_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\\&=\sum_{\substack{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0\\(i_2,\cdots,i_m)\in\Delta_t}}a_{si_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}+\sum_{\substack{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0\\(i_2,\cdots,i_m)\notin\Delta_t}}a_{si_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\end{aligned}\text{。}$$

对上述不等式两边取绝对值得

$$\begin{aligned}\left|\lambda-a_{s..s}\right|\left|x_s\right|^{m-1}&\le\sum_{\substack{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0\\(i_2,\cdots,i_m)\in\Delta_t}}\left|a_{si_2\cdots i_m}\right|\left|x_{i_2}\right|\cdots\left|x_{i_m}\right|+\sum_{\substack{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0\\(i_2,\cdots,i_m)\notin\Delta_t}}\left|a_{si_2\cdots i_m}\right|\left|x_{i_2}\right|\cdots\left|x_{i_m}\right|\\&\le\sum_{\substack{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0\\(i_2,\cdots,i_m)\in\Delta_t}}\left|a_{si_2\ldots i_m}\right|\left|x_t\right|^{m-1}+\sum_{\substack{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0\\(i_2,\cdots,i_m)\notin\Delta_t}}\left|a_{si_2\cdots i_m}\right|\left|x_s\right|^{m-1}\end{aligned},$$

移项得

$$\left(\left|\lambda-a_{s\cdots s}\right|-\sum_{\substack{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0\\(i_2,\cdots,i_m)\notin\Delta_t}}\left|a_{si_2\cdots i_m}\right|\right)\left|x_s\right|^{m-1}\le\sum_{\substack{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0\\(i_2,\cdots,i_m)\in\Delta_t}}\left|a_{si_2\ldots i_m}\right|\left|x_t\right|^{m-1}\text{。} \tag{3}$$

现分两种情况讨论，若$\left|x_s\right|=0$，由(2)式得$\lambda=a_{t\cdots t}$，显然$\lambda\in\Psi(\mathcal{A})$；若$\left|x_s\right|\ne0$，由不等式(2)乘不等式(3)得：

$$\begin{aligned}&\left(\left|\lambda-a_{s\cdots s}\right|-\sum_{\substack{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0\\(i_2,\cdots,i_m)\notin\Delta_t}}\left|a_{si_2\cdots i_m}\right|\right)\left|\lambda-a_{t\cdots t}\right|^{m-1}\left|x_t\right|^{m-1}\left|x_s\right|^{m-1}\\&\le\sum_{\substack{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0\\(i_2,\cdots,i_m)\in\Delta_t}}\left|a_{si_2\cdots i_m}\right|\left(\sum_{\sigma_{ti_2\cdots i_m}=0}\left|a_{ti_2\cdots i_m}\right|\right)^{m-1}\left|x_t\right|^{m-1}\left|x_s\right|^{m-1}\end{aligned}\text{。}$$

因为$\left|x_t\right|\ne0,\left|x_s\right|\ne0$，对上述不等式两边同时除以$\left|x_t\right|^{m-1}\left|x_s\right|^{m-1}$得

$$\left(\left|\lambda-a_{s\cdots s}\right|-\sum_{\substack{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0\\(i_2,\cdots,i_m)\notin\Delta_t}}\left|a_{si_2\ldots i_m}\right|\right)\left|\lambda-a_{t\cdots t}\right|^{m-1}\le\sum_{\substack{\sigma_{si_2\cdots i_m}=0\\(i_2,\cdots,i_m)\in\Delta_t}}\left|a_{si_2\cdots i_m}\right|\left(\sum_{\sigma_{ti_2\cdots i_m}=0}\left|a_{ti_2\cdots i_m}\right|\right)^{m-1}\text{。}$$

上述式子表明$\lambda\in\Psi(\mathcal{A})$。因此$\sigma(\mathcal{A})\subset\Psi(\mathcal{A})$。□

注 2.2 当$m=2$，即$\mathcal{A}$退化为矩阵时，

$$\Psi_{ij}(\mathcal{A})=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-a_{t\cdots t}\right|\left(\left|z-a_{j\cdots j}\right|-r_j^i(\mathcal{A})\right)\le r_i(\mathcal{A})\left|a_{ji}\right|\right\}\text{。}$$

这时定理 2.2 就是矩阵的 D-Z 矩阵特征值包含定理。

下面我们对上述特征值包含区域进行比较。

定理 2.3 设$\mathcal{A}=\left[a_{i_1\cdots i_m}\right]\in\mathbb{C}^{[m,n]}$，$n\ge2$，则

$$\Phi(\mathcal{A})\subseteq\Gamma(\mathcal{A}),\quad\Psi(\mathcal{A})\subseteq\Gamma(\mathcal{A})\text{。}$$

证明：首先证明 $\Phi(\mathcal{A}) \subseteq \Gamma(\mathcal{A})$。设 $\lambda \in \Phi(\mathcal{A})$。则存在 $i, j \in N, i \neq j$ 使得 $\lambda \in \Phi_{ij}(\mathcal{A})$，即：

$$\left|\lambda - a_{t\cdots t}\right|^{m-1}\left|\lambda - a_{j\cdots j}\right| \leq \left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1}\left(r_j(\mathcal{A})\right)。 \tag{4}$$

当 $\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1} r_j(\mathcal{A}) = 0$ 时，由(4)式可得 $\lambda = a_{i\cdots i}$ 或 $\lambda = a_{j\cdots j}$。则 $\lambda \in \Gamma(\mathcal{A})$。当 $\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1} r_j(\mathcal{A}) \neq 0$ 时，由(4)式可得：

$$\frac{\left|\lambda - a_{i\cdots i}\right|^{m-1}}{\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1}} \frac{\left|\lambda - a_{j\cdots j}\right|}{r_j(\mathcal{A})} \leq 1。$$

即：

$$\frac{\left|\lambda - a_{i\cdots i}\right|^{m-1}}{\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1}} \leq 1 \text{或} \frac{\left|\lambda - a_{j\cdots j}\right|}{r_j(\mathcal{A})} \leq 1。$$

由上式得 $\frac{\left|\lambda - a_{i\cdots i}\right|}{r_i(\mathcal{A})} \leq 1$ 或 $\frac{\left|\lambda - a_{j\cdots j}\right|}{r_j(\mathcal{A})} \leq 1$。于是 $\lambda \in \Gamma_i(\mathcal{A})$ 或 $\lambda \in \Gamma_j(\mathcal{A})$，因而 $\lambda \in \Gamma(\mathcal{A})$，故 $\Phi(\mathcal{A}) \subseteq \Gamma(\mathcal{A})$。

下证：$\Psi(\mathcal{A}) \subseteq \Gamma(\mathcal{A})$。设 $\lambda \in \Psi(\mathcal{A})$，则存在 $i, j \in N, i \neq j$ 使得 $\lambda \in \Psi_{ij}(\mathcal{A})$，即

$$\left|\lambda - a_{i\cdots i}\right|^{m-1}\left(\left|\lambda - a_{j\cdots j}\right| - r_j^{\bar{\Delta}_i}(\mathcal{A})\right) \leq \left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1} r_j^{\Delta_i}(\mathcal{A})。 \tag{5}$$

当 $\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1}\left(r_j^{\Delta_i}(\mathcal{A})\right) = 0$ 时，由(5)式得 $\lambda = a_{i\cdots i}$ 或 $\left|\lambda - a_{j\cdots j}\right| - r_j^{\bar{\Delta}_i}(\mathcal{A}) \leq 0$，于是有

$\left|\lambda - a_{i\cdots i}\right| \leq r_i(\mathcal{A})$ 或 $\left|\lambda - a_{j\cdots j}\right| \leq r_j^{\bar{\Delta}_i}(\mathcal{A}) \leq r_j(\mathcal{A})$，即或 $\lambda \in \Gamma_i(\mathcal{A})$ 或 $\lambda \in \Gamma_j(\mathcal{A})$，因而 $\lambda \in \Gamma(\mathcal{A})$。当 $\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1}\left(r_j^{\Delta_i}(\mathcal{A})\right) \neq 0$ 时，由(5)式得

$$\frac{\left|\lambda - a_{i\cdots i}\right|^{m-1}}{\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1}} \frac{\left(\left|\lambda - a_{j\cdots j}\right| - r_j^{\bar{\Delta}_i}(\mathcal{A})\right)}{r_j^{\Delta_i}(\mathcal{A})} \leq 1。$$

于是

$$\frac{\left|\lambda - a_{i\cdots i}\right|^{m-1}}{\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1}} \leq 1 \text{或} \frac{\left|\lambda - a_{j\cdots j}\right| - r_j^{\bar{\Delta}_i}(\mathcal{A})}{r_j^{\Delta_i}(\mathcal{A})} \leq 1。$$

即

$$\frac{\left|\lambda - a_{i\cdots i}\right|}{\left(r_i(\mathcal{A})\right)} \leq 1 \text{或} \frac{\left|\lambda - a_{j\cdots j}\right| - r_j^{\bar{\Delta}_i}(\mathcal{A})}{r_j^{\Delta_i}(\mathcal{A})} \leq 1。$$

上式表明 $\lambda \in \Gamma_i(\mathcal{A})$ 或 $\lambda \in \Gamma_j(\mathcal{A})$，因而 $\lambda \in \Gamma(\mathcal{A})$。由此知 $\Psi(\mathcal{A}) \subseteq \Gamma(\mathcal{A})$。□

由于理论上无法比较 $\Omega(\mathcal{A})$、$\Psi(\mathcal{A})$ 和 $\Phi(\mathcal{A})$ 三者的大小，下节我们用三个数值例子对其比较。

3. 数值例子

本节我们用三个数值例子对本文的结果进行解释。

例 3.1. 考虑二阶张量

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

分别应用定理 2.1 和定理 2.2 得到：

$$\Phi(E)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|z-1||z-i|\le 1\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:|z+1||z-i|\le 1\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:|z-1||z+1|\le 1\},$$

$$\Psi(E)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|z-1|(|z-i|-1)\le 0\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:|z+1|(|z+1|-1)\le 0\}。$$

图 1 表明对于此张量有 $\Psi(\mathcal{A})\not\subset\Phi(\mathcal{A})$ 和 $\Phi(\mathcal{A})\not\subset\Psi(\mathcal{A})$。

例 3.2. 设 $\mathcal{A}=(a_{i_1i_2i_3})\in\mathbb{C}^{[3,3]}$，其中 $a_{122}=a_{132}=1, a_{233}=2, a_{212}=3, a_{312}=3$，其他的元素都为零。分别应用定理 1.2、定理 2.1 和定理 2.2 得到：

$$\Omega(\mathcal{A})=\{z\in\mathbb{C}:(|z|-3)|z|\le 6\}\cap\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 5\}=\{z\in\mathbb{C}:(|z|-3)|z|\le 6\}。$$

$$\Phi(\mathcal{A})=\{z\in\mathbb{C}:|z|^3\le 75\},\ \Psi(\mathcal{A})=\{z\in\mathbb{C}:(|z|-3)|z|^2\le 18\}。$$

图 2 表明对于此张量有 $\Psi(\mathcal{A})\subset\Phi(\mathcal{A})\subset\Omega(\mathcal{A})$。

例 3.3. 设 $\mathcal{A}=(a_{i_1i_2i_3})\in\mathbb{C}^{[3,3]}$，其中 $a_{122}=a_{132}=1, a_{233}=a_{211}=2, a_{311}=3$，其他的元素都为零。分别应用定理 1.2、定理 1.3 和定理 2.1 得到：

$$\Omega(\mathcal{A})=\{z\in\mathbb{C}:(|z-2|)|z|\le 6\}\cap\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 3\}=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 3\},$$

$$\sigma(\mathcal{A})\subset\Phi(\mathcal{A})=\{z\in\mathbb{C}:|z|^3\le 48\},\quad \sigma(\mathcal{A})\subset\Psi(\mathcal{A})=\{z\in\mathbb{C}:(|z|-2)|z|^2\le 18\}。$$

图 3 表明对于此张量有 $\Omega(\mathcal{A})\subset\Psi(\mathcal{A})\subset\Phi(\mathcal{A})$。

上面三个例子表明在某些情况下 $\Phi(\mathcal{A})$ 和 $\Psi(\mathcal{A})$ 比 $\Omega(\mathcal{A})$ 小，在某些情况下 $\Phi(\mathcal{A})$ 和 $\Psi(\mathcal{A})$ 比 $\Omega(\mathcal{A})$ 大。

4. 偶数阶实对称张量正定性的判定

应用第二节得结果，本节给出偶数阶实对称张量正(半正)定性的两个充分条件。

定理 4.1 设 $\mathcal{A}$ 是偶数阶实对称张量，且 $a_{k\cdots k}\ge 0, k\in N$，若对于任意的 $i,j\in N$， $j\ne i$ 都有：

$$a_{i\cdots i}^{m-1}\left(a_{j\cdots j}-r_j^{\bar{\Delta}_i}(\mathcal{A})\right)>\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1}r_j^{\Delta_i}(\mathcal{A}) \tag{6}$$

则 $\mathcal{A}$ 是正定的。

证： 设 λ 是 $\mathcal{A}$ 的 H-特征值。由定理 2.1 知， $\lambda\in\Psi(\mathcal{A})$，则存在 $i_0,j_0\in N, i_0\ne j_0$ 使得 $\lambda\in\Psi_{i_0,j_0}(\mathcal{A})$，即：

$$\left(|\lambda-a_{j_0\cdots j_0}|-r_{j_0}^{\bar{\Delta}_{i_0}}(\mathcal{A})\right)|\lambda-a_{i_0\cdots i_0}|^{m-1}\le r_{j_0}^{\Delta_{i_0}}(\mathcal{A})\left(r_{i_0}(\mathcal{A})\right)^{m-1}。 \tag{7}$$

假若 $\lambda\le 0$，则因 $a_{k\cdots k}\ge 0, k\in N$ 和(7)式成立，故：

$$\left(|\lambda-a_{j_0\cdots j_0}|-r_{j_0}^{\bar{\Delta}_{i_0}}(\mathcal{A})\right)|\lambda-a_{i_0\cdots i_0}|^{m-1}\ge\left(a_{j_0\cdots j_0}-r_{j_0}^{\bar{\Delta}_{i_0}}(\mathcal{A})\right)a_{i_0\cdots i_0}^{m-1}>r_{j_0}^{\Delta_{i_0}}(\mathcal{A})\left(r_{i_0}(\mathcal{A})\right)^{m-1}$$

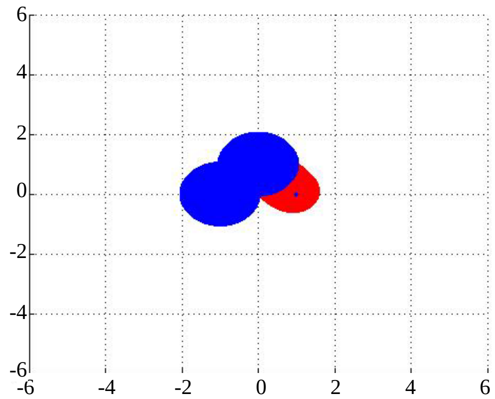
这与(8)式矛盾，因此 $\lambda>0$。再由定理 1.1 知 $\mathcal{A}$ 是正定的。

类似地可证如下结论。

定理 4.2 设 $\mathcal{A}$ 是偶数阶实对称张量，且 $a_{k\cdots k}\ge 0, k\in N$，若对于任意的 $i,j\in N$， $j\ne i$ 都有：

$$a_{i\cdots i}^{m-1}\left(a_{j\cdots j}-r_j^{\bar{\Delta}_i}(\mathcal{A})\right)\ge\left(r_i(\mathcal{A})\right)^{m-1}r_j^{\Delta_i}(\mathcal{A})$$

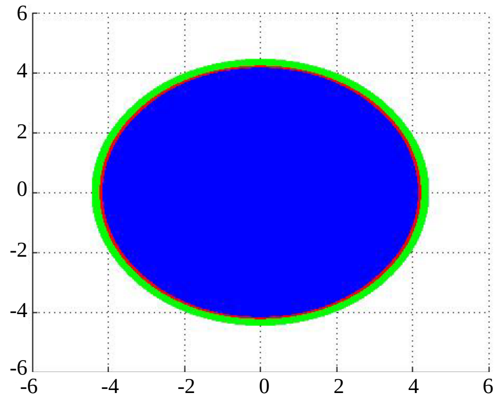
则 $\mathcal{A}$ 是正半定的。



注：蓝色为 $\Phi(E)$，红色为 $\Psi(E)$。

Figure 1. The comparison of $\Phi(E)$, $\Psi(E)$

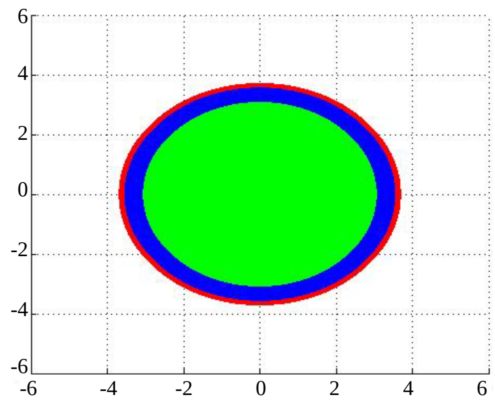
图 1. $\Phi(E)$ 和 $\Psi(E)$ 关系图



注：图中蓝色为 $\Psi(\mathcal{A})$，红色区域为 $\Phi(\mathcal{A})$，绿色为 $\Omega(\mathcal{A})$。

Figure 2. The comparison of $\Phi(\mathcal{A}),\Omega(\mathcal{A}),\Psi(\mathcal{A})$

图 2. $\Phi(\mathcal{A}),\Omega(\mathcal{A})$ 和 $\Psi(\mathcal{A})$ 关系图



注：图中蓝色为 $\Psi(\mathcal{A})$，红色区域为 $\Phi(\mathcal{A})$，绿色为 $\Omega(\mathcal{A})$

Figure 3. The comparison of $\Phi(\mathcal{A}),\Omega(\mathcal{A}),\Psi(\mathcal{A})$

图 3. $\Phi(\mathcal{A}),\Omega(\mathcal{A})$ 和 $\Psi(\mathcal{A})$ 关系图

例 3. 设 $\mathcal{A}=\left(a_{ijkl}\right)$ 是 4 阶 2 维的实对称张量，其中

$$a_{1111}=1; a_{2222}=2; a_{3333}=4; a_{2333}=a_{2332}=a_{3322}=a_{3223}=-\frac{1}{2}=\left(a_{ijkl}\right)$$

其它 $a_{ijkl}=0$。通过计算知张量 $\mathcal{A}$ 满足定理 4.1 的条件，则 $\mathcal{A}$ 是正定的。事实上，通过[2]中推论 2 可得到 $\mathcal{A}$ 的 H-特征值为 $\lambda_{\mathcal{A}}=0.6972$。由定义 4.1 知 $\mathcal{A}$ 确实是正定的。

基金项目

本文受国家自然科学基金资助项目(11361074)资助。

参考文献 (References)

[1] Nikias, C.L. and Mendel, J.M. (1993) Signal Processing with Higher-Order Spectra. *IEEE Signal Processing Magazine*, **10**, 10-37.

[2] Qi, L., Wang, F. and Wang, Y. (2009) Z-Eigenvalue Methods for a Global Polynomial Optimization Problem. *Mathematical Programming*, **118**, 301-316. http://dx.doi.org/10.1007/s10107-007-0193-6

[3] Ching, W. and Ng, M. (2006) Markov Chains: Models, Algorithms and Applications. Int. Ser. Oper. Res .Manag. Sci. Springer, New York.

[4] Bose, N.K. and Kamat, P.S. (1975) Algorithm for Stability Test of Multidimensional Filters. *IEEE Transactions on Acoustics*, *Speech*, *and Signal Processing*, **20**, 169-175.

[5] Qi, L. (2005) Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor. *Journal of Symbolic Computation*, **40**, 1302-1324.

[6] Ding, W.Y., Qi, L.Q. and Wei, Y.M. (2013) M-Tensors and Nonsingular M-Tensors. *Linear Algebra and Its Applications*, **439**, 3264-3278.

[7] Cartwright, D. and Sturmfels, B. (2010) The Number of Eigenvalues of Tensors. arXiv:1004.4953vl, Apr.

[8] Kolda, T.G. and Mayo, J.R. (2011) Shifted Power Method for Computing Tensor Eigenpairs. arXiv:1007.1267v2, Math. NA.

[9] Li, C.Q., Zhou, J.J. and Li, Y.T. (2015) A New Brauer-Type Eigenvalue Localization Set for Tensors. *Linear and Multilinear Algebra*, **64**, 727-736. http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2015.1119779

[10] Wang, Y.J., Zhou, G.L. and Caccetta, L. (2016) Nonsingular H-Tensors and Their Criteria. *Journal of Industrial & Management Optimization*, **12**, 1173-1186. http://dx.doi.org/10.3934/jimo.2016.12.1173