Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(5), 391-397
Published Online September 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65053

Hans汉斯

The Relations between Solutions of High Order Complex Domain Differential Equation and Small Functions

Yitao Ding, Lipeng Xiao

School of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: 461745672@qq.com

Received: Aug. 17th, 2016; accepted: Aug. 31st, 2016; published: Sep. 5th, 2016

Abstract

In this paper, we investigate the problems on fixed points and hyper-order of solutions of high order differential equations with meromorphic coefficients, and we obtain the precise properties of high solutions of linear differential equations.

Keywords

Periodic Higher Order Linear Differential Equations, Fixed Point, Small Functions

高阶线性微分方程亚纯解同小函数的关系

丁逸韬，肖丽鹏

江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌
Email: 461745672@qq.com

收稿日期：2016年8月17日；录用日期：2016年8月31日；发布日期：2016年9月5日

摘 要

本文研究了高阶线性微分方程亚纯解的不动点及亚纯解同小函数的关系问题，得到了微分方程亚纯解的

文章引用: 丁逸韬, 肖丽鹏. 高阶线性微分方程亚纯解同小函数的关系[J]. 理论数学, 2016, 6(5): 391-397.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65053

一些性质。

关键词

高阶线性微分方程，不动点，小函数

1. 引言与结果

本文将使用值分布的标准记号[1]-[3]，用 $\sigma(f)$ 和 $\mu(f)$ 表示亚纯函数 f 的级和下级，用 $\lambda(f)$ 和 $\bar{\lambda}(f)$ 表示亚纯函数 f 的零点收敛指数和不同零点收敛指数，并引入以下定义：

定义 1 [4] 亚纯函数 $f(z)$ 的超级定义 $\sigma_2(f)$ 为

$$\sigma_2(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

定义 2 [5] 亚纯函数 $f(z)$ 的二级零点收敛指数 $\lambda_2(f)$ 定义为

$$\lambda_2(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log\log N(r,f)}{\log r}.$$

$f(z)$ 的二级不同零点收敛指数 $\overline{\lambda_2}(f)$ 定义为

$$\overline{\lambda_2}(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log\log \bar{N}(r,f)}{\log r}.$$

定义 3 [6] 假设 $f(z)$ 为亚纯函数，那么我们定义 $f(z)$ 的不动点的收敛指数 $\tau(f)$ 为

$$\tau(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log \bar{N}\left(r,\frac{1}{f-z}\right)}{\log r}.$$

定义 4 [6] 假设 $f(z)$ 为亚纯函数，那么我们定义 $f(z)$ 的二级不动点的收敛指数 $\tau_2(f)$ 为

$$\tau_2(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log\log \bar{N}\left(r,\frac{1}{f-z}\right)}{\log r}.$$

自文献[7]-[9]以来，国际上分别对复域齐次与非齐次线性微分方程解的零点与增长性进行了许多研究，且人们用超级的概念对齐次线性微分方程的无穷解作出了更精确的估计。对于线性微分方程大量的无穷级亚纯解，如何得到其不动点的个数的精确估计，并用超级、二级零点收敛指数、二级不同零点收敛指数的概念进一步地估计微分方程的无穷解的增长性、零点密度及不动点密度，陈宗煊在文献[5]中首次得到了几种类型二阶线性微分方程整函数解的不动点性质，得到了以下结果：

定理 A 假设 $P(z)$ 为多项式，次数 $\deg P(z)=n\geq 1$，那么微分方程

$$f''+P(z)f=0 \tag{1}$$

的所有非零解 $f(z)$ 有无穷多个不动点，且满足：$\tau(f)=\sigma(f)=\dfrac{n+2}{2}$。

陈玉、陈宗煊、廖莉在文献[10]中研究了高阶复域微分方程亚纯解的不动点与超级，得到了以下结果：

定理 B 假设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 是亚纯函数，满足

$\max\left\{\sigma\left(a_j\right)\left(j=1,2,\cdots,k-1\right),\lambda\left(\dfrac{1}{a_0}\right)\right\}<\mu\left(a_0\right)\le\sigma\left(a_0\right)<+\infty$，如果微分方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=0 \tag{2}$$

有亚纯解 f，且 $\lambda\left(\dfrac{1}{f}\right)<+\infty$，我们有

i) 如果 $a_1+a_0z\not\equiv0$，那么至多有一个例外解，方程(2)的其它所有非零解 f 都有无穷多个不动点，且满足 $\tau(f)=\sigma(f)=+\infty$，$\tau_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$。

ii)进一步地，如果 $a_1=0$，那么方程(2)的所有非零亚纯解 f 都有无穷多个不动点，且满足 $\tau(f)=\sigma(f)=+\infty$，$\tau_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$。

本文将在更宽泛的条件下，考虑方程(2)的非零亚纯解以及解的一阶导函数同小函数的关系。

定理 1 假设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1},\varphi\not\equiv0$ 是有限级亚纯函数，满足 $\sigma\left(a_j\right)<\sigma\left(a_0\right)\left(j=1,2,\cdots,k-1\right)$，且 $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\dfrac{\log m\left(r,a_0\right)}{\log r}=\sigma\left(a_0\right)$，$\varphi$ 不是方程(2)的解，如果 $f\not\equiv0$ 是方程(2)的亚纯解，且 $\lambda\left(\dfrac{1}{f}\right)<\mu(f)$。那么

i) $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\sigma(f)=+\infty,\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$；

ii) 进一步，若 $\varphi^{(k)}+\left(a_{k-1}-\dfrac{a_0'}{a_0}\right)\varphi^{(k-1)}+\sum\limits_{j=0}^{k-2}\left(a_{j+1}'+a_j-\dfrac{a_0'}{a_0}a_{j+1}\right)\varphi^{(j)}\not\equiv0$，则 $\overline{\lambda_2}(f'-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$。

定理 2 假设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1},F\not\equiv0$，$\varphi\not\equiv0$ 是有限级亚纯函数，满足 $\sigma\left(a_j\right)<\sigma\left(a_0\right)\left(j=1,2,\cdots,k-1\right)$，且 $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\dfrac{\log m\left(r,a_0\right)}{\log r}=\sigma\left(a_0\right)$，$\varphi$ 不是微分方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=F \tag{3}$$

的解，如果方程(3)有非零亚纯解，且 $\lambda\left(\dfrac{1}{f}\right)<\mu(f)$，$\sigma(f)=+\infty$。那么

i) $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\sigma(f)=+\infty,\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$，至多除去一个例外；

ii) 进一步，若 $F''-\dfrac{a_0'}{a_0}F'-\left[\varphi^{(k)}+\left(a_{k-1}-\dfrac{a_0'}{a_0}\right)\varphi^{(k-1)}+\sum\limits_{j=0}^{k-2}\left(a_{j+1}'+a_{(j)}-\dfrac{a_0'}{a_0}a_{j+1}\right)\varphi^{(j)}\right]\not\equiv0$，则 $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$，至多除去一个例外。

定理 3 假设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1},F,\varphi\not\equiv0$ 是有限级亚纯函数，满足 $\sigma\left(a_j\right)<\sigma\left(a_0\right)\left(j=1,2,\cdots,k-1\right)$，且 $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\dfrac{\log m\left(r,a_0\right)}{\log r}=\sigma\left(a_0\right)$，$\varphi$ 不是微分方程(3)的解，如果方程(3)有非零亚纯解 f，且 $\lambda\left(\dfrac{1}{f}\right)<\mu(f)$，那么

i) $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\sigma(f)=+\infty,\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$，至多除去一个例外；

ii) 进一步，若 $F''-\dfrac{a_0'}{a_0}F'-\left[\varphi^{(k)}+\left(a_{k-1}-\dfrac{a_0'}{a_0}\right)\varphi^{(k-1)}+\sum\limits_{j=0}^{k-2}\left(a_{j+1}'+a_j-\dfrac{a_0'}{a_0}a_{j+1}\right)\varphi^{(j)}\right]\not\equiv0$，则 $\overline{\lambda_2}(f'-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$，至多除去一个例外。

注记 1 将定理 1，定理 2，定理 3 条件 $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\dfrac{\log m\left(r,a_0\right)}{\log r}=\sigma\left(a_0\right)$ 变换成 $N\left(r,a_0\right)=O\left(m\left(r,a_0\right)\right)$，定理 1，定理 2，定理 3 结论仍然成立。

注记 2 令 $\varphi = z$，可以分别得到方程(2)及方程(3)非零亚纯解的不动点性质。

推论 1 假设 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ 是亚纯函数，满足 $\sigma(a_j) < \sigma(a_0) < +\infty (j = 1, 2, \cdots, k-1)$，且 $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\log m(r, a_0)}{\log r} = \sigma(a_0)$。如果 $f \not\equiv 0$ 是方程(2)的亚纯解，且 $\lambda\left(\dfrac{1}{f}\right) < \mu(f)$。则 f 满足 $\tau(f) = \sigma(f) = +\infty$，$\tau_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(a_0)$。

推论 2 假设 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, F \not\equiv 0$，$F \not\equiv a_1 + a_0 z$ 是有限级亚纯函数，满足 $\sigma(a_j) < \sigma(a_0) < +\infty (j = 1, 2, \cdots, k-1)$，如果方程(3)有非零亚纯解 f，且 $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\log m(r, a_0)}{\log r} = \sigma(a_0)$，$\lambda\left(\dfrac{1}{f}\right) < \mu(f)$，$\sigma(f) = +\infty$，那么，$f$ 有无穷多个不动点，且满足 $\tau(f) = \sigma(f) = +\infty$，$\tau_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(a_0)$，至多除去一个例外。

推论 3 假设 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$，$F \not\equiv a_1 + a_0 z$ 是有限级亚纯函数，满足 $\sigma(a_j) < \sigma(a_0) < +\infty (j = 1, 2, \cdots, k-1)$，且 $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\log m(r, a_0)}{\log r} = \sigma(a_0)$，如果方程(3)有非零亚纯解 f，且 $\lambda\left(\dfrac{1}{f}\right) < \mu(f)$，那么，$f$ 有无穷多个不动点，且满足 $\tau(f) = \sigma(f) = +\infty$，$\tau_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(a_0)$，至多除去一个例外；进一步地，如果 $F \not\equiv 0$，则 $\lambda(f) = \tau(f) = \sigma(f) = +\infty$，$\lambda_2(f) = \tau_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(a_0)$。

2. 预备知识及引理

引理 1 [11] 假设 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ 是亚纯函数，满足 $\sigma(a_j) < \sigma(a_0) < +\infty (j = 1, 2, \cdots, k-1)$，且满足条件 $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\log m(r, a_0)}{\log r} = \sigma(a_0)$。如果 $f \not\equiv 0$ 是方程(2)的亚纯解，且 $\lambda\left(\dfrac{1}{f}\right) < \mu(f)$。则 f 满足 $\sigma(f) = +\infty$，$\sigma_2(f) = \sigma(a_0)$。

类似文献[11]中定理 2 的证明方法，我们可得到以下引理：

引理 2 假设 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, F \not\equiv 0$ 是有限级亚纯函数，满足 $\sigma(a_j) < \sigma(a_0) (j = 1, 2, \cdots, k-1)$，如果方程(3)有非零亚纯解 f，且 $\lambda\left(\dfrac{1}{f}\right) < \mu(f)$，$\sigma(f) = +\infty$，那么

i) $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = +\infty$；

ii) $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \le \sigma(a_0)$。若 $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\log m(r, a_0)}{\log r} = \sigma(a_0)$，则 $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(a_0)$，至多除去一个例外。

引理 3 假设 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, F$ 是有穷级亚纯函数，满足 $\sigma(a_j) < \sigma(a_0) (j = 1, 2, \cdots, k-1)$，且 $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\log m(r, a_0)}{\log r} = \sigma(a_0)$，如果方程(3)有非零亚纯解 f，且 $\lambda\left(\dfrac{1}{f}\right) < \mu(f)$，那么

i) $\sigma(f) = +\infty$，至多除去一个例外。进一步地，若 $F \not\equiv 0$，则 $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = +\infty$，至多可能除去一个例外；

ii) $\sigma_2(f) = \sigma(a_0)$，至多可能除去一个例外。进一步地，若 $F \not\equiv 0$，则 $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(a_0)$，至多可能除去一个例外。

证明 i)：若 $F \equiv 0$，由引理 1 知 $\sigma(f) = +\infty$。若 $F \not\equiv 0$，假设方程(3)存在两个互不相等的解 f_1, f_2，满足 $\sigma(f_1) = \sigma(f_2) < +\infty$，那么 $\sigma(f_1 - f_2) < +\infty$。又 $f_1 - f_2$ 是方程(2)的解，由引理 1 得 $\sigma(f_1 - f_2) = +\infty$，

矛盾，故$\sigma(f)=+\infty$，至多可能除去一个例外。进一步地，若$F\not\equiv 0$，由引理2知$\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=+\infty$，至多可能除去一个例外。

ii)：类似i)的证明可得。

3. 定理的证明

定理1的证明：i) 假设f是方程(2)的非零亚纯解，且$\lambda\left(\frac{1}{f}\right)<\mu(f)$，由引理1知，$\sigma(f)=+\infty$。令$g=f-\varphi$，则$f=g+\varphi$，$f'=g'+\varphi'$，$f^{(n)}=g^{(n)}+\varphi^{(n)}(n=2,3,\cdots,k)$，且$\sigma(g)=\sigma(f-\varphi)=\sigma(f)=+\infty$，将$f=g+\varphi$，$f'=g'+\varphi'$，$f^{(n)}=g^{(n)}+\varphi^{(n)}(n=2,3,\cdots,k)$代入方程(2)，得到

$$g^{(k)}+a_{k-1}g^{(k-1)}+\cdots+a_0g=-\left(\varphi^{(k)}+a_{k-1}\varphi^{(k-1)}+\cdots+a_1\varphi'+a_0\varphi\right). \tag{4}$$

令$X_0=\varphi^{(k)}+a_{k-1}\varphi^{(k-1)}+\cdots+a_1\varphi'+a_0\varphi$。由$\varphi$不是方程(2)的解知$X_0\not\equiv 0$，于是方程(4)可以写成

$$\frac{1}{g}=-\frac{1}{X_0}\left(\frac{g^{(k)}}{g}+a_{k-1}\frac{g^{(k-1)}}{g}+\cdots+\frac{a_1g'}{g}+a_0\right). \tag{5}$$

故有

$$m(r,g)\le m\left(r,\frac{1}{X_0}\right)+\sum_{i=1}^{k}m\left(r,\frac{g^{(i)}}{g}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,a_j\right)+c. \tag{6}$$

c为常数，下面c都代表常数，取值可能不同。考虑方程(5)，假设z_0是g的一个$\alpha(\alpha>k)$阶零点，则z_0至少是X_0的$\alpha-k$阶零点，所以有

$$N\left(r,\frac{1}{g}\right)\le k\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{X_0}\right). \tag{7}$$

又因为$m\left(r,\frac{g^{(n)}}{g}\right)\le c\log\left(rT(r,g)\right)$，除去一个线测度为有穷的集合$E_1\subset[0,+\infty)$，所以由(6) (7)式得

$$T(r,g)=T\left(r,\frac{1}{g}\right)+c\le k\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+T\left(r,\frac{1}{X_0}\right)+c\log\left(r,T(r,g)\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,a_j\right)+c. \tag{8}$$

故$\sigma(g)\le\bar{\lambda}(g)$，$\sigma_2(g)\le\bar{\lambda}_2(g)$，所以$\sigma(g)=\bar{\lambda}(g)$，$\sigma_2(g)=\bar{\lambda}_2(g)$。由引理1得$\bar{\lambda}(f-\varphi)=\sigma(f)=+\infty$，$\bar{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$。

ii) 令$h=f'-\varphi$，则$f'=h+\varphi$，$f''=h'+\varphi'$，$f^{(n)}=h^{(n-1)}+\varphi^{(n-1)}(n=3,4,\cdots,k+1)$，且$\sigma(h)=\sigma(f')=\sigma(f)=+\infty$。对方程(2)两边微分得到

$$f^{(k+1)}+a_{k-1}f^{(k)}+\left(a'_{k-1}+a_{k-2}\right)f^{(k-1)}+\cdots+\left(a'_1+a_0\right)f+a'_0f=0. \tag{9}$$

又由方程(2)

$$f=-\frac{1}{a_0}\left(f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_1f'\right). \tag{10}$$

故有

$$h^{(k)}+\left(a_{k-1}-\frac{a_0'}{a_0}\right)h^{(k-1)}+\cdots+\left(a_1'+a_0-\frac{a_0'a_1}{a_0}\right)h=-\left[\varphi^{(k)}+\left(a_{k-1}-\frac{a_0'}{a_0}\right)\varphi^{(k-1)}+\cdots+\left(a_1'+a_0-\frac{a_0'a_1}{a_0}\right)\varphi\right]. \quad (11)$$

令 $Y_0=-\left[\varphi^{(k)}+\left(a_{k-1}-\frac{a_0'}{a_0}\right)\varphi^{(k-1)}+\cdots+\left(a_1'+a_0-\frac{a_0'a_1}{a_0}\right)\varphi\right]$，则由定理条件知 $Y_0\not\equiv 0$。于是，方程(11)变成

$$\frac{1}{h}=-\frac{1}{Y_0}\left[\frac{h^{(k)}}{h}+\left(a_{k-1}-\frac{a_0'}{a_0}\right)\frac{h^{(k-1)}}{h}+\cdots+a_1'+a_0-\frac{a_0'a_1}{a_0}\right]. \quad (12)$$

对方程(12)式运用类似(6)~(8)式的方法得到

$$T(r,h)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{h}\right)+T\left(r,\frac{1}{Y_0}\right)+c\log\left(r,T(r,h)\right)+\sum_{j=0}^{k-2}m\left(r,a_{j+1}'+a_j-\frac{a_0'a_{j+1}}{a_0}\right)+T\left(r,a_{k-1}-\frac{a_0'}{a_0}\right)+c. \quad (13)$$

所以 $\sigma_2(h)\le\overline{\lambda}_2(h)$，故 $\sigma_2(h)=\overline{\lambda}_2(h)$，即 $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$。

定理 2 的证明： i) 假设 f 是方程(3)的非零亚纯解，且 $\lambda\left(\frac{1}{f}\right)<\mu(f)$，$\sigma(f)=+\infty$。令 $g=f-\varphi$，则 $f=g+\varphi$，$f'=g'+\varphi'$，$f^{(n)}=g^{(n)}+\varphi^{(n)}(n=2,3,\cdots,k)$，且 $\sigma(g)=\sigma(f-\varphi)=\sigma(f)=+\infty$，将 $f=g+\varphi$，$f'=g'+\varphi'$，$f^{(n)}=g^{(n)}+\varphi^{(n)}(n=2,3,\cdots,k)$ 代入方程(3)，得到

$$g^{(k)}+a_{k-1}g^{(k-1)}+\cdots+a_0g=F-\left(\varphi^{(k)}+a_{k-1}\varphi^{(k-1)}+\cdots+a_1\varphi'+a_0\varphi\right). \quad (14)$$

令 $X_1=F-\left(\varphi^{(k)}+a_{k-1}\varphi^{(k-1)}+\cdots+a_1\varphi'+a_0\varphi\right)$，由于 φ 不是方程(3)的解，知 $X_1\not\equiv 0$。于是方程(14)可以写成

$$\frac{1}{g}=-\frac{1}{X_1}\left(\frac{g^{(k)}}{g}+a_{k-1}\frac{g^{(k-1)}}{g}+\cdots+\frac{a_1g'}{g}+a_0\right). \quad (15)$$

对方程(15)运用类似(6)~(8)式的方法得到

$$T(r,g)=T\left(r,\frac{1}{g}\right)+c\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+T\left(r,\frac{1}{X_1}\right)+c\log\left(r,T(r,g)\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,a_j\right)+c. \quad (16)$$

故 $\sigma(g)\le\overline{\lambda}(g)$，$\sigma_2(g)\le\overline{\lambda}_2(g)$，所以 $\sigma(g)=\overline{\lambda}(g)$，$\sigma_2(g)=\overline{\lambda}_2(g)$。由引理 2 得 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\sigma(f)=+\infty$，$\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$，至多除去一个例外。

ii) 令 $h=f'-\varphi$，则 $f'=h+\varphi$，$f''=h'+\varphi'$，$f^{(n)}=h^{(n-1)}+\varphi^{(n-1)}(n=3,4,\cdots,k+1)$，由引理 2 得 $\sigma(h)=\sigma(f')=\sigma(f)=+\infty$。对方程(3)两边微分得到

$$f^{(k+1)}+a_{k-1}f^{(k)}+\left(a_{k-1}'+a_{k-2}\right)f^{(k-1)}+\cdots+\left(a_1'+a_0\right)f+a_0'f=F'. \quad (17)$$

又由方程(3)

$$f=-\frac{1}{a_0}\left(f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_1f'-F\right). \quad (18)$$

故有

$$\begin{aligned}&h^{(k)}+\left(a_{k-1}-\frac{a_0'}{a_0}\right)h^{(k-1)}+\cdots+\left(a_1'+a_0-\frac{a_0'a_1}{a_0}\right)h\\&=F'-\frac{a_0'}{a_0}F-\left[\varphi^{(k)}+\left(a_{k-1}-\frac{a_0'}{a_0}\right)\varphi^{(k-1)}+\cdots+\left(a_1'+a_0-\frac{a_0'a_1}{a_0}\right)\varphi\right].\end{aligned}\tag{19}$$

令 $Y_1=F'-\frac{a_0'}{a_0}F-\left[\varphi^{(k)}+\left(a_{k-1}-\frac{a_0'}{a_0}\right)\varphi^{(k-1)}+\cdots+\left(a_1'+a_0-\frac{a_0'a_1}{a_0}\right)\varphi\right]$，由已知条件知 $Y_1\neq 0$。

于是，方程(19)变为

$$\frac{1}{h}=-\frac{1}{Y_1}\left[\frac{h^{(k)}}{h}+\left(a_{k-1}-\frac{a_0'}{a_0}\right)\frac{h^{(k-1)}}{h}+\cdots+a_1'+a_0-\frac{a_0'a_1}{a_0}\right].\tag{20}$$

对方程(20)运用类似(6)~(8)式的方法得到

$$T(r,h)\le k\bar{N}\left(r,\frac{1}{h}\right)+T\left(r,\frac{1}{Y_1}\right)+c\log\left(r,T(r,h)\right)+\sum_{j=0}^{k-2}m\left(r,a_{j+1}'+a_j-\frac{a_0'a_{j+1}}{a_0}\right)+T\left(r,a_{k-1}-\frac{a_0'}{a_0}\right)+c.\tag{21}$$

所以 $\sigma_2(h)\le\bar{\lambda}_2(h)$，故 $\sigma_2(h)=\bar{\lambda}_2(h)$，由引理 2 知即 $\bar{\lambda}_2(f'-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$，至多除去一个例外。

定理 3 的证明：由引理 3 知，$\sigma(f)=+\infty$，至多可能除去一个例外。由定理 1，定理 2 的证明方法及结论易得。

参考文献 (References)

[1] Hayman, W. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[3] 何育赞, 肖修治. 代数体函数和常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1988.

[4] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[5] 陈宗煊. 二阶复域微分方程解的不动点与超级[J]. 数学物理学报, 2000, 20(3): 425-432.

[6] 陈玉, 陈宗煊. 二阶复域微分方程亚纯解的不动点与超级[J]. 大学数学, 2006, 22(6): 78-81.

[7] Bank, S. and Laine, I. (1982) On the Oscillation Theory of $f"+Af=0$ Where A Is Entire. *Transactions of the American Mathematical Society*, **273**, 351-363. http://dx.doi.org/10.2307/1999210

[8] Gao, S.A. (1989) On the Complex Oscillation of Solutions of Nonhomogeneous Linear Differential Equations with Polynomial Coefficients. *Comment Mathematici Universitatis Sancti Pauli*, **38**, 11-20.

[9] Kwon, K.-H. (1996) Nonexistence of Finite Order Solutions of Certain Second Order Linear Differential equations. *Kodai Mathematical Journal*, **19**, 378-387. http://dx.doi.org/10.2996/kmj/1138043654

[10] 陈玉, 陈宗煊, 廖莉. 高阶复域微分方程亚纯解的不动点与超级[J]. 江西师范大学学报, 2006, 30(3): 241-243.

[11] 陈玉, 陈宗煊. 几类高阶复域微分方程亚纯解的增长性[J]. 数学研究与评论, 2007, 27(4): 826-832.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx