Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(5), 398-401
Published Online September 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65054

Hans汉斯

A Note on the Convergence of Sequence

Jian Wu, Liao Zhou, Chengen Sun

School of Mathematics & Physics Science and Engineering, Anhui University of Technology, Ma'anshan Anhui
Email: wzz30@ahut.edu.cn, wujian950304@163.com

Received: Aug. 18th, 2016; accepted: Sep. 2nd, 2016; published: Sep. 7th, 2016

Abstract

In this paper, we discuss the relationship between Cauchy convergence, Cesaro convergence and Abel convergence. Some examples are given to show that the three kinds of Cenvergence are weaker one by one. Furthermore, by adding some mild conditions the weaker type inverse propositions are presented.

Keywords

Cauchy Convergence, Cesaro Convergence, Abel Convergence

关于序列收敛性的一个注记

吴　健，周　廖，孙成恩

安徽工业大学数理科学与工程学院，安徽　马鞍山
Email: wzz30@ahut.edu.cn, wujian950304@163.com

收稿日期：2016年8月18日；录用日期：2016年9月2日；发布日期：2016年9月7日

摘　要

本文讨论Cauchy收敛、Cesaro收敛、以及Abel收敛性之间的关系。给出了若干反例说明这三种收敛性一个比一个弱，并且通过增加适当的条件给出较弱形式的逆命题。

文章引用: 吴健, 周廖, 孙成恩. 关于序列收敛性的一个注记[J]. 理论数学, 2016, 6(5): 398-401.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.65054

关键词

Cauchy收敛，Cesaro收敛，Abel收敛

1. 引言

众所周知，序列的收敛性 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 在数学分析中扮演着极其重要的角色(见[1]-[4])，通常的收敛均是 Cauchy 收敛。

定义 1 对于有界序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$，如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 则称序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy 收敛到 x。

即：$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 意味着对 $\forall\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得对 $\forall n > N$，有 $|x_n - x| < \varepsilon$。

在实际应用中有一些序列并不能满足上述条件。因此，许多学者就提出了考虑在更弱的条件下序列的收敛问题。其中最著名的就是 Cesaro 收敛和 Abel 收敛。

定义 2 对于有界序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$，如果 $\lim_n \frac{x_0 + \cdots + x_{n-1}}{n} = x$。则称序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cesaro 收敛到 x。

定义 3 对于有界序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$，如果 $\lim_{s\to 1^-}(1-s)\sum_{n=0}^{\infty} x_n s^n = x$。则称序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Abel 收敛到 x。

本文主要研究这三种收敛性的关系，研究表明序列 Cauchy 收敛可推导序列 Cesaro 收敛，序列 Cesaro 收敛可推导 Abel 收敛，并且给出具体的例子说明它们的逆都不成立。即这三种收敛性一个比一个弱。我们通过增加适当的条件给出较弱形式的逆命题。

2. 主要结论

定理 1 设序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy 收敛到 x，则序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cesaro 收敛到 x。

证明 由 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$，可以对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 选取 N，使得当 $n > N$ 时成立 $|x_n - x| < \varepsilon$ 于是

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x_0 + \cdots + x_{n-1}}{n} - x\right| &= \frac{\left|(x_0 - x) + \cdots + (x_{n-1} - x)\right|}{n} \\
&\le \frac{\left|(x_0 - x) + \cdots + (x_N - x)\right|}{n} + \frac{\left|(x_{N+1} - x) + \cdots + (x_{n-1} - x)\right|}{n} \\
&< \frac{C}{n} + \frac{n-N}{n}\varepsilon
\end{aligned}
$$

这里 $C = \left|(x_0 - x) + \cdots + (x_N - x)\right|$ 是一个确定的数，由此可见，只须取 $N^* = \max\left\{N, \left[\frac{C}{\varepsilon}\right]\right\}$，就可以保证当 $n > N^*$ 成立

$$
\left|\frac{x_0 + \cdots + x_{n-1}}{n} - x\right| < 2\varepsilon
$$

结论成立。

注 1 如果定理 1 中的 x 取 $\pm\infty$，结论仍然成立。即：如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$，则 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_0 + \cdots + x_{n-1}}{n} = \pm\infty$。定理 1 的逆命题一般来说不成立，例如：取 $x_n = (-1)^n, n = 0,1,\cdots$ 但通过附加适当的条件其逆命题也可以成立。

命题 1 设序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 单调递增，且 Cesaro 收敛到 x，则序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy 收敛到 x。

证明 见参考文献[5]。

命题 2 设序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cesaro 收敛到x，且满足$\lim_{n\to\infty} n\left(x_n - x_{n-1}\right) = 0$，则序列$\{x_n\}$是 Cauchy 收敛到$x$。

证明

令$y_1 = x_1$，$y_2 = x_2 - x_1$，$\cdots$，$y_n = x_n - x_{n-1}$。

则$\lim_{n\to\infty} ny_n = 0$且

$$x_n = y_n + y_{n-1} + \cdots + y_1 。$$

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_n \left(x_n - \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right) \\
&= \lim_n \left[\left(y_1 + \cdots + y_n \right) - \frac{y_1 + \left(y_1 + y_2 \right) + \cdots + \left(y_1 + \cdots + y_n \right)}{n} \right] \\
&= \lim_n \frac{y_2 + 2y_3 + \cdots + \left(n-1 \right) y_n}{n} \\
&= \lim_n \frac{ny_{n+1}}{\left(n+1 \right) - n} = 0
\end{aligned}$$

注意到，$x_n = x_n - \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$，结论成立。

如果序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$有不同的收敛子列，则$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$一定不是 Cauchy 收敛，但它的算术平均可能收敛。下面给出这样一个结论，它在概率论中非常有用。

命题 3 设d是一正整数。序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$满足

$$\lim_{n\to\infty} x_{nd+r} = a_r ，\quad 1 \le r \le d$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} a_k$$

证明 由定理 1，有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{kd+r} = a_r$$

记$M = \sup_{n\ge 0} x_n$，$n = kd + r$，$1 \le r \le d$，则

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} a_k \right| &\le \frac{1}{n} \sum_{j=kd+1}^{kd+r} x_j + \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{kd} x_j - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} a_k \right| \\
&\le \frac{Md}{n} + \frac{1}{d} \sum_{r=1}^{d} \left| \frac{kd}{n} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} x_{jd+r} - a_r \right|
\end{aligned}$$

令$n \to \infty$，则$k \to \infty$且$\dfrac{kd}{n} \to 1$。结论成立。

定理 2 如果序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cesaro 收敛到x，则序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Abel 收敛到x

证明 不妨假设级数$\sum_{n=0}^{\infty} x_n s^n$的收敛半径小于或等于 1。即

$$\limsup_{n\to\infty} \left| x_n \right|^{\frac{1}{n}} \le 1 。$$

令 $R(s)=(1-s)\sum_{n=0}^{\infty}x_n s^n$， $s\in[0,1)$， $A_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_k$

注意到

$$\begin{aligned}(1-s)^2\sum_{n=1}^{\infty}nA_n s^{n-1}&=(1-s)\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\left(s^{n-1}-s^n\right)\\&=(1-s)\left\{A_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)A_{n+1}-nA_n\right]s^n\right\}\\&=R(s)\end{aligned}$$

往证 $\lim_{s\to1^-}R(s)=x$。事实上，如果 $\lim_{n\to\infty}A_n=x$，那么因为 $(1-s)^2\sum_{n=1}^{\infty}ns^{n-1}=1$， $s\in[0,1)$，故对任意的 N：

$$\begin{aligned}\left|x-(1-s)^2\sum_{n=1}^{\infty}nA_n s^{n-1}\right|&=(1-s)^2\left|\sum_{n=1}^{\infty}n(x-A_n)s^{n-1}\right|\\&\le(1-s)^2\sum_{n=1}^{\infty}ns^{n-1}\left|x-A_n\right|\\&\le\frac{N(N+1)}{2}(1-s)^2\sup_{n\ge0}\left|x-A_n\right|+\sup_{n\ge N}\left|x-A_n\right|\end{aligned}$$

因此，如果 $A_n\to x$。

$$\limsup_{s\to1^-}\left|x-R(s)\right|\le\lim_{N\to\infty}\sup_{n\ge N}\left|x-A_n\right|=0$$

注 2 定理 2 的逆一般来说也不成立，例如：假设 $x_n=(-1)^{n+1}n$，易知 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的收敛半径为 1，并且

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}, & 若n是奇数\\ -\frac{1}{2}, & 若n是偶数\end{cases}$$

和

$$(1-s)\sum_{k=1}^{\infty}x_k s^k=\frac{s(1-s)}{(1+s)^2}$$

因此，$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Abel 收敛到 0，但是 Cesaro 意义下发散。

基金项目

安徽省大学生创新基金项目资助(201410360300)。

参考文献 (References)

[1] Korevaar, J. (2004) Tauberian Theory. A Century of Developments. Grundlehren der Mathematichen Wissenschaften 329. Springer-Verlag, xvi+483.

[2] Montgomery, H.L. and Vaughan, R.C. (2007) Multiplicative Number Theory I. Classical Theory (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). Cambridge University Press, Cambridge, 147-167.

[3] Tauber, A. (1897) Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen [A Theorem about Infinite Series]. *Monatshefte fur Mathematik und Physik*, **8**, 273-277. http://dx.doi.org/10.1007/BF01696278 (in German)

[4] Wiener, N. (1932) Tauberian Throrems. *Annals of Mathematics*, **33**, 1-100. http://dx.doi.org/10.2307/1968102

[5] Stoll, M. (2004) Introduction to Real Analysis. Chinese Machine Press, Beijing.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx