Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(4), 250-254
Published Online July 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74032

Hans汉斯

The Identities of M-Gonal Number with Its Application

—M-Gonal Numbers Revisited

Minghao Guo[1], Zhicheng Guo[2]

[1]School of Biomedical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai
[2]Dept. Northern Design and Research Institute, Shijiazhuang Hebei
Email: 13833116000@139.com

Received: Jun. 17th, 2017; accepted: Jun. 30th, 2017; published: Jul. 6th, 2017

Abstract

In this paper, we present some arithmetic relationships among same-level M-Gonal numbers in a specific situation. We also illustrate some arithmetic relations on M-Gonal numbers who are related with Pythagorean Triangles Number. A few special cases are discussed to obtain some interesting results.

Keywords

M-Gonal Number, Pythagorean Equation, Partitions

M角数恒等式及其应用

—从 M 角数谈起

郭铭浩[1]，郭志成[2]

[1]上海交通大学生物医学工程学院，上海
[2]北方设计研究院，河北 石家庄
Email: 13833116000@139.com

收稿日期：2017年6月17日；录用日期：2017年6月30日；发布日期：2017年7月6日

摘 要

本文中给出了一些等级相同并满足一定条件的*M*角数数字关系式。得到了与毕达哥拉斯三角数相关的特

文章引用: 郭铭浩, 郭志成. M 角数恒等式及其应用[J]. 理论数学, 2017, 7(4): 250-254.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74032

殊**M**角数数字关系式。讨论了一些特殊情况，并得到了一些有趣的结果。

关键词

***M*角数，Pythagorean方程，分拆**

1. 引言

Fermat 在 Diophtantus 的《数论》的空白处写下了第 18 条评注是下面的命题[1]。

命题 1： 当 $m \ge 3$ 时，所有的自然数可表为不超过 m 个 m 角数[1] (m-gonal number)之和。

命题 1 中 4 角数部分抽出来就是下面的命题。

命题 2： 对任意的自然数 n，不定方程

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = n$$

有解。

Euler 在知道了 Fermat 的命题 1 时颇为激动，然而对命题 2 的证明颇费周章却不得其解。1772 年 Lagrange 在 Euler 研究的基础上，利用 Euler 的四平方恒等式[2]

$$\begin{aligned}&\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(A^2+B^2+C^2+D^2\right)\\&=\left(aA+bB+cC+dD\right)^2+\left(aB-bA-cD+dC\right)^2\\&\quad+\left(aC+bD-cA-dB\right)^2+\left(aD-bC+cB-dA\right)^2\end{aligned}$$

证明了命题 2，并于 1812 年证明了命题 1。

无论 Fermat 还是 Euler，都对命题 1 情有独钟。Fermat 在所记命题 1 的空白处，写到了命题 1 是关系到数论的许多神秘之处，并说关于这一点他自己有写一本书的打算。Euler 推导出的四平方恒等式也不是简单的，它使得只需要证明命题 2 对素数成立。

命题 1 没有要求自然数表为 m 个 m 角数之和。对命题 2，就是没有要求 x, y, z, u 的解都是正整数(有些可以是 0)。事实上，形为 $n = 2\cdot 4^k$ 的自然数不能表为 4 个正整数平方之和。

更准确的说，我们利用关系式

$$169 = 13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2 = 8^2 + 7^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2$$

和命题 2 推出下面的结论[3]：

对于 $n \ge 169$ 的自然数，都可以表为 5 个正整数平方之和。

直接验证 $n < 169$ 的自然数知道：除去下面的 12 个数，其它的自然数都可以表示为 5 个正整数平方之和。

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 18, 33$$

结论中的 5 是不能改进的。

[1] M 角数是所有角数的统称，m 角数指角数为 m 的数列。

前面结论的逆命题是：

命题 3： 如果存在一个 4 角数，可以分别表示为 2，3，4，5 个相异四角数之和，那么大于这个 4 角数的所有自然数都可以表示为不超过 4 个 4 角数之和[1]。

命题 3 中 4 个 4 角数也是不能改进的。逆命题中最重要的一部分条件是：一个 4 角数拆成了两个相异 4 角数之和。即勾股定理

$$13^2 = 12^2 + 5^2$$

我们称“第几个正整数的平方”为“第几项 4 角数”，那么勾股定理可以解释为：

第 13 项 4 角数等于第 12 项 4 角数与第 5 项 4 角数之和。

当把勾股定理推广到任意 m 角数的时候，发现了如下的结论：

命题 4： 第 $2m^2-7m+9$ 项 m 角数等于第 $2m^2-7m+8$ 项 m 角数与第 $2m-3$ 项 m 角数之和。

在平方数定义为 4 角数的情况下，上述结论做为勾股定理的一个推广是合格的 [2]，它实际上是洛伦兹(Lorentz)变换的对偶定理 [3]。顺便说，它也是数学上的质能公式。

2. 应用简介

我们用 $p(m,s)$ 表示角数为 m 的 M 角数第 s 项数值，如果我们把 m 角数的第 s 项计算公式

$$p(m,s) = \frac{m-2}{2}s^2 - \frac{m-4}{2}s$$

代入上述的结论，很容易推出方程

$$m(m-2)(2m-7) = 0$$

也就是说，如果方程成立，就证明了上述的结论。然而，讲明白这个方程的符号和数字的物理意义并不是容易的事情[4]。从方程的推导过程我们仅仅可以看出，由质能公式确定的空间可以从五维降低到三维。

我们可以用哥德尔数简单解释质能公式如下：第 $2m^2-7m+9$ 项 m 角数减第 $2m^2-7m+8$ 项 m 角数对应质能公式的ΔE，第 $2m-3$ 项 m 角数对应Δmc^2，两者数值相等。

我们逐渐的会明白，上述结论在形式上是对质能公式 $\Delta E = \Delta mc^2$ 的两边取对数得到的数学公式，它深刻地刻画了物质世界的基本属性[5] [6]。并预示着一个物理学上的以下结论：任何系统的平动量与转动量的和是一个定值。物理上的能量守恒定律和动量守恒定律以及万有引力定律都来源于此。

我们得到这些物理上的结论并不奇怪，因为质能公式和它的三次方程在数学上称为自守形式(Automorphic form)，它应用到物理上就是各种守恒定律。需要说明的是：守恒定律的个数是有限的，它的最多个数是由自守形式确定的。

3. 一般的整数分拆命题

一般的，第 s 项的 m 角数记为 $p(m,s)$，拆数 $p(m,2m^2-7m+9)$成相异 m 个 m 角数的分拆[7] [8]种数，通常情况下都大于 1。拆数 $p(m,2m^2-7m+9)$成相异 $3,4,\cdots,m-1$ 个 m 角数的分拆种数≥1。例如 $m=4,5$

$$13^2 = 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2 = 10^2 + 7^2 + 4^2 + 2^2$$

[2] 本结论将指数 2 推广到了任意正整数(偏序集)。当结论用于平面直角三角形时，就是勾股定理 $z^2 = x^2 + y^2$ 。当指数 s 取无穷大时，就是圆周长公式 $l = 2\pi r$ 。

[3] 由于洛伦兹(Lorentz)变换是相对论的数学工具，从 M 角数的平面图可以看出，结论给出的是研究量子理论的数学工具。故称之为洛伦兹(Lorentz)变换的对偶定理。

$$852 = 590 + 210 + 35 + 12 + 5 = 532 + 210 + 70 + 35 + 5$$

也就是说，4 角数(平方数)169 拆成 4 个 4 角数及 5 角数 852 拆成 5 个 5 角数的相异分拆种数是 2。它可以推出命题 5。

命题 5： 当 $m \geq 4$ 时，m 角数的第 $2m^2 - 7m + 9$ 项，可以分拆为 $2,3,4,5,\cdots,m+1$ 个相异的 m 角数之和。

这个命题的正确性是毋庸置疑的，因为我们只需要重复命题 1 的证明过程并用哥德尔数解释方程

$$m(m-2)(2m-7) = 0$$

的意义。这种方法略显拙笨，且简化证明过程不属本文的内容。故不再赘述。

由命题 5 可以推出：所有的自然数都可以表示为不超过 m 个允许重复的 m 角数之和。下面给出 5 角数和 6 角数的相异分拆。

$$\begin{aligned} 852 &= 782 + 70 = 590 + 145 + 117 = 651 + 145 + 51 + 5 \\ &= 590 + 210 + 35 + 12 + 5 = 651 + 92 + 70 + 22 + 12 + 5 \\ 3003 &= 2850 + 153 = 2415 + 435 + 153 = 1770 + 1035 + 153 + 45 \\ &= 1653 + 780 + 435 + 120 + 15 = 946 + 780 + 561 + 435 + 190 + 91 \\ &= 861 + 780 + 496 + 435 + 352 + 91 + 15 \end{aligned}$$

当 $m \geq 4$ 时，第 $2m^2 - 7m + 9$ 项拆成相异 2 个 m 角数之和的分拆种数都是 1，当自然数 N 大于等于第 $2m^2 - m + 9$ 项 m 角数 $p\left(m, 2m^2 - 7m + 9\right)$ 时，拆数 N 成相异 3 个 m 角数或更多个 m 角数之和的相异分拆种数一般情况下都大于 1，它们的种数计算依赖于二元数的分拆理论。

4. 分拆理论现状简介及展望——用多个平方和表示的数

在很多文献中，定义多项式幂

$$\left(1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots\right)^s = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} x^{n^2}\right)^s$$

的展开式中，项 x^t 的系数为 $r_s(t)$。函数 $r_s(t)$表示的是拆数 t 为 s 个(注：不一定相异)平方数(4 角数)的种数。

拆数 t 为 2，3，4 个 4 角数之和的分拆种数(或者相异种数)人们已经研究的很清楚了。对拆数 t 为偶数个 4 角数之和的分拆种数 $r_{2k}(t)$的定量研究，目前多使用椭圆模函数理论，它涉及艰深的算数函数。对于 t 为奇数 $r_{2k+1}(t)$的定量研究，涉及 Legendre 符号和广义 Jacobi 符号

$$\left(\frac{n}{m}\right)$$

的一个有限和。这些结果许多都是大部头专著[9]。

由此可以看出，求解 $m \geq 4$ 时，拆数 t 成相异 k 个 m 角数的分拆种数是一个多么困难的问题。但是上述方法都不属于我们要讨论的内容。我们所要寻找的是，怎样用递推的方法求解出拆数 t 成相异 k 个 m 角数的分拆种数。m 角数中第 $2m^2 - 7m + 9$ 项的分拆种数的计算为我们提供了这种可能，其中第 $2m^2 - 7m + 9$ 项的 $t = p\left(m, 2m^2 - 7m + 9\right)$ 分为两个 m 角数之和的种数都是 1 的结果已开先河。

参考文献 (References)

[1] Dickson, E.L. (2010) History of the Theory of Numbers. *Diophantine Analysis*, **2**, 6-18.

[2] Kato, K., Kurokawa, N. and Saito, T. (2005) Number Theory 1: Fermat’s dream. Originally published in Japanese by Iwanami Shoten Publishers, Tokyo.

[3] 闵嗣鹤，严士健. 初等数论(第二版) [M]. 北京：北京大学出版社, 2003: 271-275.

[4] Kato, K., Kurokawa, N. and Saito, T. (2005) Number Theory 2: Introduction to Class Field Theory. Originally published in Japanese by Iwanami Shoten Publishres, Tokyo.

[5] 牛顿. 自然哲学之数学原理，宇宙体系[M]. 武汉：武汉出版社, 1992.

[6] 俞允强. 广义相对论引论[M]. 第 2 版. 北京：北京大学出版社, 1997.

[7] Euler, L. (1988) Introduction to Analysis of the Infinite. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1021-4

[8] Koch, H. and Andrews, G.E. (1979) The Theory of Partitions. (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications) 2. London-Amsterdam-Don Mills-Sydney-Tokyo, Addison-Wesley Publ. Company 1976. XIV, 255 S. $ 16.50. *ZAMM—Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **59**, 285-285. https://doi.org/10.1002/zamm.19790590632

[9] Hardy, G.H. (1981) An Introduction to the Theory of Numbers. The English Language Book Society and Oxford Univ. Pr, London.