Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(4), 282-287
Published Online July 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74037

Hans汉斯

A kind of Analysis of the Multi-Prime Goldbach's Issues

Yunhua Cui

Unit95899, beijing
Email: cuiyunhuacyh@163.com

Received: Jun. 23rd, 2017; accepted: Jul. 6th, 2017; published: Jul. 13th, 2017

Abstract

The applications of prime distribution theory with the new train of thought are researched upon prime groups with restraint. The minimum amounts of the multi-prime Goldbach's issues are deduced by expanding the analysis and conclusions in odd Goldbach's prime groups.

Keywords

Prime Distribution, Goldbach's Conjecture, Odd Goldbach's Conjecture, Multi-Prime Goldbach's Issue

多素数哥德巴赫问题的一种分析

崔蕴华

95899部队，北京
Email: cuiyunhuacyh@163.com

收稿日期：2017年6月23日；录用日期：2017年7月6日；发布日期：2017年7月13日

摘　要

研究素数分布理论新思路对约束素数组的实际应用，将奇数哥德巴赫猜想的分析方法和结论推广到多素数哥德巴赫问题,并得出了最小数量的结论。

关键词

素数分布，哥德巴赫猜想，奇数哥德巴赫猜想，多素数哥德巴赫问题

文章引用: 崔蕴华. 多素数哥德巴赫问题的一种分析[J]. 理论数学, 2017, 7(4): 282-287.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74037

1. 引言

递推采用素数消元法，可方便地将 3 素数哥德巴赫命题[1]结论推广到 4 素数与任意多素数。

2. 命题 1：(多素数哥德巴赫命题)

满足 $\sum_{i=1}^{k} p_i = n\ (n \gg k, n \ge 3200)$ 的 k 素数哥德巴赫数组数量表示为

$$r_k(n) > \frac{2}{(k-2)!k!}\int_2^n \frac{t^{k-2}\mathrm{d}t}{(\ln t)^k} \tag{1}$$

并展开为渐近级数

$$r_k(n) > \frac{2}{(k-2)!(k-1)!k!}\sum_{j=k}^{r_k}\frac{(j-1)!}{(k-1)^{j-k+1}}\left(\frac{n^{k-1}}{(\ln n)^j} - \frac{2^{k-1}}{(\ln 2)^j}\right) \tag{2}$$

式中 r_k 为 n 对渐近级数式的最佳截断

$$r_k = \left[\frac{(k-1)(\ln n - \ln 2)}{\ln\ln n - \ln\ln 2}\right] - 1 \tag{3}$$

$r_k(n)$ 以首项表为

$$r_k(n) > \frac{2}{(k-1)!k!}\left(\frac{n^{k-1}}{(\ln n)^k}\right) \tag{4}$$

证明：

1) 3 素数推广到 4 素数

令素数 p_1, p_2, p_3, p_4 满足

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = n\ , 2 \mid n \tag{5}$$

设式(5)中 $p_1 = p_i$ 遍取不超过 n 的全部素数 $P = \{3,5,\cdots,p_n \le n\}$， p_2, p_3, p_4 将满足约束条件

$$p_2 + p_3 + p_4 = n - p_i\ , 2 \mid / (n - p_i)$$

即 p_2, p_3, p_4 为 $n - p_i$ 的 3 素数数组。

与 3 素数命题[1]同理，由此构造的 p_1, p_2, p_3, p_4 必穷尽全部组合，且数组数量大于实际组合数的 4 倍。当正整数 n 比较大 $(n \gg 3200)$ 时，引用 3 素数命题数量下限 2 阶简化式(4.14) [1]，并将 n 改写为 $n - p_i$

$$r_3(n - p_i) > \frac{(n - p_i)^2}{3!(\ln(n - p_i))^3} \tag{6}$$

对集合 P 构造集合

$$N = n - P = \{n-3, n-5, \cdots, n - p_n\}$$

显然， N 内各元素对应的 3 素数数组求和并取 1/4，为 4 素数题解。即

$$r_4(n) > \frac{1}{4}\sum_{p_i \in P} r_3(n-p_i)$$

将式(6)代入得

$$r_4(n) > \frac{1}{4!}\sum_{p_i \in P} \frac{(n-p_i)^2}{\left(\ln(n-p_i)\right)^3} \tag{7}$$

同 3 素数命题分析，对 $r_4(n)$ 在 $r_3(n)$ 基础上作进一步的数量下限估计，并引用 $R-S$ 积分结论

$$r_4(n) > \frac{1}{4!}\int_2^n \frac{t^2 \mathrm{d}t}{(\ln t)^4} \tag{8}$$

以最低门限方式表为

$$r_{4\min}(n) = \frac{1}{4!}\int_2^n \frac{t^2 \mathrm{d}t}{(\ln t)^4} \tag{9}$$

以式

$$\int t^m (\ln t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{t^{m+1}(\ln t)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int t^m (\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

对式(9)分部积分得

$$r_4(n) > \frac{1}{4!}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{n^3}{(\ln n)^4} - \frac{2^3}{(\ln 2)^4}\right) + \frac{4}{3}\int_2^n \frac{t^2}{(\ln t)^5}\mathrm{d}t\right\}$$

以 r_4 表渐近级数的最佳截断，进一步展开为渐近级数

$$r_4(n) > \frac{1}{4!}\sum_{k=4}^{r_4} \frac{(k-1)!}{3! \cdot 3^{k-3}}\left(\frac{n^3}{(\ln n)^k} - \frac{2^3}{(\ln 2)^k}\right)$$

即

$$r_4(n) > \frac{1}{4! \cdot 3!}\sum_{k=4}^{r_4} \frac{(k-1)!}{3^{k-3}}\left(\frac{n^3}{(\ln n)^k} - \frac{2^3}{(\ln 2)^k}\right) \tag{10}$$

只取首项并忽略积分下限项为

$$r_4(n) > \frac{n^3}{3 \cdot 4!(\ln n)^4} \tag{11}$$

以最低门限方式表为

$$r_{4\min}(n) \sim \frac{n^3}{3 \cdot 4!(\ln n)^4} \tag{12}$$

与奇数哥德巴赫命题同法可确定最佳截断为

$$r_4 = \left[\frac{3(\ln n - \ln 2)}{\ln\ln n - \ln\ln 2}\right] - 1 \tag{13}$$

当 x 充分大时，式(13)可近似为

$$r_4 \sim \left[\frac{3(\ln n)}{\ln\ln n}\right] - 1 \tag{14}$$

2) 4 素数推广到任意 k 素数

采用递推方法，在满足 $n \gg 3200, n \gg k$ 的条件下，可将多素数组数量下限的结论由 4 素数递推到 5 素数，6 素数，$\cdots$，k 素数命题。计算出由 3 素数到 k 素数数量下限的对数积分式、首项表达式有关参数，列入表 1。

由表 1，当 n 比较大 $(n \gg 3200, n \gg k)$ 时，k 素数命题数量的对数积分表为

$$r_k(n) > \frac{2}{(k-2)!k!}\int_2^n \frac{t^{k-2}\mathrm{d}t}{(\ln t)^k} \tag{15}$$

以最低门限方式表为

$$r_{k\min}(n) = \frac{2}{(k-2)!k!}\int_2^n \frac{t^{k-2}dt}{(\ln t)^k} \tag{16}$$

以 r_k 表 $l_k sn$ 的最佳截断，可将对数积分式(16)展开为渐近级数 $l_k sn$

$$\begin{aligned} r_{k\min}(n) &= \frac{2}{(k-2)!k!} l_k sn \\ &= \frac{2}{(k-2)!k!}\sum_{j=k}^{r_k}\left(\frac{(j-1)!}{(k-1)!(k-1)^{j-k+1}}\left(\frac{n^{k-1}}{(\ln n)^j} - \frac{2^{k-1}}{(\ln 2)^j}\right)\right) \\ &= \frac{2}{(k-2)!(k-1)!k!}\sum_{j=k}^{r_k}\left(\frac{(j-1)!}{(k-1)^{j-k+1}}\left(\frac{n^{k-1}}{(\ln n)^j} - \frac{2^{k-1}}{(\ln 2)^j}\right)\right) \end{aligned} \tag{17}$$

与奇数哥德巴赫命题同法可证明相应最佳截断为

$$r_k = \frac{(k-1)(\ln n - \ln 2)}{\ln\ln n - \ln\ln 2} - 2$$

取

$$r_k = \left[\frac{(k-1)(\ln n - \ln 2)}{\ln\ln n - \ln\ln 2}\right] - 1 \tag{18}$$

当 n 很大时

$$r_k \sim \left[\frac{(k-1)(\ln n)}{\ln\ln n}\right] - 1 \tag{19}$$

式(1)(2)成立。

对式(17)仅取首项为

$$r_k(n) > \frac{2}{(k-1)!k!}\left(\frac{n^{k-1}}{(\ln n)^k}\right) \tag{20}$$

以最低门限方式表为

$$r_{k\min}(n) = \frac{2}{(k-1)!k!}\left(\frac{n^{k-1}}{(\ln n)^k}\right) \tag{21}$$

命题 1 证毕。

3. 实例 2：(多素数哥德巴赫数组例)

对 $n=1000$ (偶)或 $n=1001$ (奇)，对应 $k=3\sim 28$ 按式(21)计算出相应 $r_{k\min}(n)$ 列入表 2，表中同时列出自由度 $\chi=k-1$，渐近级数式首项阶数 k，相应由式(18)表示的最佳截断 r_k 和渐近级数的有效项数 (r_k-k+1)。

为避免表格过大，表中数据的选择不满足 $n\gg 3200$，对说明表中各项参数关系是有效的。

Table 1. The related parameters about the quantity limit of multi-prime propositions to logarithmic integral type and first expression

表 1. 多素数命题数量下限对数积分式、首项表达式有关参数

$r_{\min}(n)$	对数积分 $\int$			首项		
	系数	t	$(\ln t)$	系数	n	$(\ln n)$
$r_{3\min}(n)$	$\frac{1}{3}$	t^1	$(\ln t)^{-3}$	$\frac{1}{3!}$	n^2	$(\ln n)^{-3}$
$r_{4\min}(n)$	$\frac{1}{4!}$	t^2	$(\ln t)^{-4}$	$\frac{1}{3\cdot 4!}$	n^3	$(\ln n)^{-4}$
$r_{5\min}(n)$	$\frac{1}{3\cdot 5!}$	t^3	$(\ln t)^{-5}$	$\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5!}$	n^4	$(\ln n)^{-5}$
$r_{6\min}(n)$	$\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6!}$	t^4	$(\ln t)^{-6}$	$\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6!}$	n^5	$(\ln n)^{-6}$
$r_{7\min}(n)$	$\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7!}$	t^5	$(\ln t)^{-7}$	$\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7!}$	n^6	$(\ln n)^{-6}$
…						
$r_{k\min}(n)$	$\frac{2}{(k-2)!k!}$	t^{k-2}	$(\ln t)^{-k}$	$\frac{2}{(k-1)!k!}$	n^{k-1}	$(\ln n)^{-k}$

Table 2. The relational table $(n=1000/1001)$ between k and $r_{k\min}(n)$

表 2. k 与 $r_{k\min}(n)$ 对关系表 $(n=1000/1001)$

$n=1001$							$n=1000$						
k	$r_{k\min}(n)$	自由度 χ	首项阶数	最佳截断	有效项数	备注	k	$r_{k\min}(n)$	自由度 χ	首项阶数	最佳截断	有效项数	备注
3	507	2	3	4	2		4	6100	3	4	7	4	
5	44297	4	5	9	5		6	213056	5	6	12	7	
7	738028	6	7	15	9		8	1918381	7	8	17	10	
9	3842563	8	9	20	12		10	6139521	9	10	23	14	
11	8148064	10	11	26	16		12	8861230	11	12	28	17	$r_{\min}^{\max}(n)$
13	8306623	12	13	31	19	$r_{\min}^{\max}(n)$	14	6540698	13	14	34	21	
15	4562495	14	15	36	22		16	2719691	15	16	39	24	
17	1467205	16	17	42	26		18	684787	17	18	44	27	
19	294314	18	19	47	29		20	110426	19	20	50	31	
21	38712	20	21	53	33		22	11926	21	22	55	34	
23	3476	22	23	58	36		24	895	23	24	61	38	
25	220	24	25	63	39		26	48	25	26	66	41	
27	10	26	27	69	43	$r_{\min}^{\min}(n)$	28	2	27	28	71	44	$r_{\min}^{\min}(n)$

1) n 增大时，以 p_i 对应的多素数组数求和代替 $n-p_i$ 对应的多素数组数求和造成的误差增大；k 增大时，每次递推以首阶代替各阶求和引进的误差增大，递推次数增多引起误差积累加大。因此 n,k 较大时，数量下限 $r_{k\min}(n)$ 将越发远离实际数量 $r_k(n)$，但这并不影响数量下限的理论意义，它从数量的角度证明了多素数哥德巴赫数组的存在性，并给出任何情况下总能满足的下限数量。

2) 当 k 由 $k=3$ 逐步递增时，由于自由度加大，$r_k(n)$ 首先单调递增，直到对 $n=1001$ 对应 $k=13$ 出现最大值 $r_{13\min}=r_{\min}^{\max}(n)=8306623$，对 $n=1000$ 对应 $k=12$ 出现最大值 $r_{12\min}=r_{\min}^{\max}(n)=8861230$；$k$ 再增大时，由于自由度过大，可选择的组合数单调递减，直到对 $n=1001$ 对应 $k=27$ 出现最小值 $r_{27\min}(n)=r_{\min}^{\min}(n)=10$；对 $n=1000$ 对应 $k=28$ 出现最小值 $r_{28\min}(n)=r_{\min}^{\min}(n)=2$。

致　谢

青年高级工程师王炜华博士、汤宏伟、王远和李军博士完成了文献[1]的仿真计算，崔雁巍完成了文档整理和校对，在此表示衷心感谢。感谢爱妻邢纪荣和家人的理解、支持和关爱。

参考文献 (References)

[1] 崔蕴华, 素数分布研究新思路的若干应用, 前沿科学, 2016, 10(4): 26-45.