Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(1), 1-7
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.81001

The Compactness of Weighted Composition Operator on Bloch Sapce

Jiaqi Xiao*, Zhuoshi Ma

School of Mathematics, Jiaying University, Meizhou Guangdong
Email: *454932935@qq.com

Received: Dec. 4th, 2017; accepted: Dec. 19th, 2017; published: Dec. 26th, 2017

Abstract

If f is an analytic function in the unit disk D, the weighted composition operator is defined as following: $(W_{\psi,\varphi})f(z)=\psi(z)f(\varphi(z))$. In this paper, using the function theoretic of ψ and φ characterize the compactness of weighted composition operator on Bloch space.

Keywords

Bloch Space, Weighted Composition Operator, Compactness

Bloch空间上加权复合算子的紧性

肖嘉琪*，马卓仕

嘉应学院，数学学院，广东 梅州
Email: *454932935@qq.com

收稿日期：2017年12月4日；录用日期：2017年12月19日；发布日期：2017年12月26日

摘　要

若 f 是单位圆盘 D 上的解析函数，定义加权复合算子如下：$(W_{\psi,\varphi})f(z)=\psi(z)f(\varphi(z))$ 借助 ψ 和 φ 的函数特征给出了加权复合算子 $W_{\psi,\varphi}$ 在Bloch空间上紧性的刻画。

*通讯作者。

文章引用: 肖嘉琪, 马卓仕. Bloch 空间上加权复合算子的紧性[J]. 理论数学, 2018, 8(1): 1-7.
DOI: 10.12677/pm.2018.81001

关键词

Bloch空间，加权复合算子，紧性

1. 引言

令 $D=\{z:|z|<1\}$ 是复平面 C 上的单位圆盘。$H(D)$ 表示单位圆盘 D 上的解析函数。设 $a\in D$，$\sigma_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$ 表示单位圆盘 D 上的莫比乌斯变换。

定义 1.1： 设 $0<p<\infty$，若 $f\in H(D)$ 且满足

$$\int_D|f(z)|^p\,\mathrm{d}\sigma(z)<\infty,$$

则称 f 属于 Bergman 空间。

定义 1.2： 若 $f\in H(D)$ 且满足

$$\|f\|_\beta=\sup_{z\in D}|f'(z)|\left(1-|z|^2\right)<\infty,$$

则称 f 属于 Bloch 空间，记为 B。赋予范数 $\|f\|_B=|f(0)|+\|f\|_\beta$，Bloch 空间是一个 Banach 空间。由文献[1]中的定理 1 可知，

$$\|f\|_\beta\approx\sup_{a\in D}\|f\circ\sigma_a-f(a)\|_{A^2}.$$

定义 1.3： 若 $f\in H(D)$ 且满足

$$\sup_{z\in\partial D}|f'(z)|\left(1-|z|^2\right)=0,$$

则称 f 属于小 Bloch 空间，记为 B_0。

定义 1.4： 设 $0<p<\infty$，若 $f\in H(D)$ 且满足

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p\mathrm{d}\theta<\infty,$$

则称 f 属于 Hardy 空间。

定义 1.5： 设 $0<p<\infty$，若 $f\in H(D)$ 且满足

$$\|f\|_*^2=\sup_{I\subset\partial D}\frac{1}{2\pi}\int_I|f(\varsigma)-f_I|^2\frac{\mathrm{d}\varsigma}{2\pi}<\infty,$$

则称 f 属于 BMOA 空间。赋予范数 $\|f\|_{\mathrm{BMOA}}=|f(0)|+\|f\|_*$，BMOA 空间是一个 Banach 空间。由文献[2]可知

$$\|f\|_*\approx\sup_{a\in D}\|f\circ\sigma_a-f(a)\|_{H^2}.$$

本文中用 $S(D)$ 表示单位圆盘 D 上解析自映射的全体。设 $\psi\in H(D)$ 和 $\varphi\in S(D)$。复合算子和乘积算子分别定义如下：

$$\left(C_\varphi f\right)(z)=f\left(\varphi(z)\right),\left(M_\psi f\right)(z)=\psi(z)f(z).$$

由ψ和φ诱导的加权复合算子$W_{\psi,\varphi}$定义如下：

$$\left(W_{\psi,\varphi}\right)f(z)=\psi(z)f\left(\varphi(z)\right).$$

由 Littlewood 从属定理可知，BMOA 空间上的复合算子有界。有关 BMOA 空间上的复合算子的研究见参考文献[2] [3] [5] [6] [7] [11] [12] [13]。基于文献[11]的结果，乌兰哈斯教授在文献[12]中给出了 BMOA 空间上复合算子紧性的充要条件为：BMOA 空间上复合算子是紧的当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\varphi^n\right\|_*=0,\quad \lim_{|\varphi(a)|\to 1}\left\|\sigma_a\circ\varphi\right\|_*=0.$$

在文献[13]中，乌兰哈斯教授、郑德超教授和朱克和教授给出了进一步的结论为：BMOA 空间上复合算子是紧的当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\varphi^n\right\|_*=0.$$

在文献[4]中，Colonna 应用文献[13]中的形式给出的结论为：BMOA 空间上加权复合算子是紧的当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\psi\varphi^n\right\|_*=0,\ \lim_{|\varphi(a)|\to 1}\left(\log\frac{2}{1-\left|\varphi(a)\right|^2}\right)\left\|\psi\circ\sigma_a-\psi(a)\right\|_{H^2}=0.$$

受文献[4]和[7] [8] [9]的启发，本文给出了 Bloch 空间上加权复合算子紧性的充要条件。

2. 主要结论

本节中给出了 Bloch 空间上加权复合算子$W_{\psi,\varphi}$是紧的充要条件的刻画，该刻画主要依赖于ψ和φ的函数特征。

引理 2.1 [10]：设$2\le p<\infty$，那么有

$$\sup_{a\in D}\left\|f\circ\sigma_a-f(a)\right\|_{A^2}\approx\sup_{a\in D}\left\|f\circ\sigma_a-f(a)\right\|_{A^p}.$$

引理 2.2：设ψ属于 Bloch 空间和$\varphi\in S(D)$。那么对任意f属于 Bloch 空间，存在一个常数C使得

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\psi\circ\sigma_a-\psi(a)\right)\cdot\left(f\circ\varphi\circ\sigma_a-f\left(\varphi(a)\right)\right)\right\|_{A^2}^2\\&\le C\left\|\psi\circ\sigma_a-\psi(a)\right\|_{A^2}\cdot\sup_{a\in D}\left\|\psi\circ\sigma_a-\psi(a)\right\|_{A^2}.\end{aligned}$$

证明：令$\Phi=\psi\circ\sigma_a-\psi(a)$和$F=f\circ\varphi\circ\sigma_a-f\left(\varphi(a)\right)$，由引理 2.1 和 Holder 不等式可得结论。

引理 2.3 [1]：设f属于 Bloch 空间和$z\in D$，那么有

$$\left|f(z)\right|\le\log\frac{2}{1-|z|^2}\|f\|_B.$$

定理 1：设ψ属于 Bloch 空间和$\varphi\in S(D)$。若$W_{\psi,\varphi}$在 Bloch 空间上有界，那么 Bloch 空间上加权复合算子$W_{\psi,\varphi}$是紧的充要条件为：

$$\lim_{r\to 1}\sup_{\{a\in D:|\varphi(a)|>r\}}\alpha(\psi,\varphi,a)=0,\tag{1}$$

$$\lim_{r\to 1}\sup_{\{a\in D:|\varphi(a)|>r\}}\beta(\psi,\varphi,a)=0,\tag{2}$$

对任意的 $R\in(0,1)$，

$$\lim_{r\to1}\sup_{\{a\in D:|\varphi(a)|>r\}}\int_{E(\varphi,a,t)}\left|\psi\circ\sigma_a(z)\right|^2\mathrm{d}\sigma(z)=0, \tag{3}$$

其中 $E(\varphi,a,t)=\left\{z\in D:\left|\sigma_{\varphi(a)}\circ\varphi\circ\sigma_a\right|>t\right\}$。

证明：设 $W_{\psi,\varphi}$ 在 Bloch 空间上有界。那么(1)、(2)和(3)式成立。

如果(1)不成立，那么存在一个正数 δ 和一个单位上的数列 $\{a_n\}$ 使得

$$\left|\varphi(a_n)\right|\to1(n\to\infty),\ \alpha(\psi,\varphi,a_n)\ge\delta>0.$$

对任意的 $n\in\mathbb{N}$，令 $f_n=\sigma_{\varphi(a_n)}-\varphi(a_n)$，易验证 f_n 属于 Bloch 空间。根据文献[10]中的(2-17)可得

$$\alpha(\psi,\varphi,a_n)\le\sup_{a_n\in D}\left\|\psi\circ\sigma_{a_n}-\psi(a_n)\right\|_{A^2}+\left\|W_{\psi,\varphi}f_n\right\|_B.$$

由文献[10]中的定理 2.8 和 $\left|\varphi(a_n)\right|\to1(n\to\infty)$，可知，当 $n\to\infty$，

$$\sup_{a_n\in D}\left\|\psi\circ\sigma_{a_n}-\psi(a_n)\right\|_{A^2}\le\left(\log\frac{2}{1-\left|\varphi(a_n)\right|^2}\right)^{-1}\sup_{a\in D}\beta(\psi,\varphi,a)\to0.$$

另有， f_n 在单位圆盘的紧子集上一致收敛到零，那么有 $\lim_{n\to\infty}\left\|W_{\psi,\varphi}f_n\right\|_B=0$。所以

$$\lim_{n\to\infty}\alpha(\psi,\varphi,a_n)=0,$$

这与假设相矛盾。即(1)是 $W_{\psi,\varphi}$ 在 Bloch 空间上紧的必要条件。

其次，假设(2)不成立，那么存在一个正数 δ 和一个单位上的数列 $\{a_n\}$ 使得

$$\left|\varphi(a_n)\right|\to1(n\to\infty),\ \beta(\psi,\varphi,a_n)\ge\delta>0.$$

对任意的 $n\in\mathbb{N}$，令 $h_n=\log\left(2\Big/\left(1-\overline{\varphi(a_n)}z\right)\right)$ 和 $g_n=h_n^2\big/h_n\left(\varphi(a_n)\right)$。很容易验证 $g_n\in B_0$。那么有，$\sup_{a\in D}\left\|g_n\circ\sigma_a-g_n(a)\right\|_{A^2}<\infty$。故，由文献[9]中的(2-19)和引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\beta(\psi,\varphi,a_n)&=\left\|\psi\circ\sigma_{a_n}-\psi(a_n)\cdot g_n\left(\varphi(a_n)\right)\right\|_{A^2}\\&\le C\left\|g_n\right\|_B\left(\left\|\psi\circ\sigma_a-\psi(a)\right\|_{A^2}\cdot\sup_{a_n\in D}\left\|\psi\circ\sigma_{a_n}-\psi(a_n)\right\|_{A^2}\right)^{1/2}\\&\quad+\left\|\left(W_{\psi,\varphi}g_n\right)\circ\sigma_a-\left(W_{\psi,\varphi}g_n\right)(a)\right\|_{A^2}+\alpha(\psi,\varphi,a_n)\left\|g_n\circ\sigma_a-g_n(a)\right\|_{A^2}.\end{aligned}$$

所以，当 $n\to\infty$ 时，

$$\left\|\psi\circ\sigma_a-\psi(a)\right\|_{A^2}\cdot\sup_{a_n\in D}\left\|\psi\circ\sigma_{a_n}-\psi(a_n)\right\|_{A^2}\to0\ \text{和}\ \alpha(\psi,\varphi,a_n)\to0.$$

由于 g_n 在单位圆盘的紧子集上一致收敛到零，故 $\lim_{n\to\infty}\left\|W_{\psi,\varphi}g_n\right\|_B=0$。因此

$$\lim_{n\to\infty}\beta(\psi,\varphi,a_n)=0,$$

这与假设相矛盾。即(2)是 $W_{\psi,\varphi}$ 在 Bloch 空间上紧的必要条件。

最后，假设(3)不成立。当 $n\to\infty$，那么存在 $R\in(0,1),\delta>0,a_n\in D$ 和 $t_n\in(0,1)$ 使得 $\left|\varphi(a_n)\right|\le R$ 和

$$\lim_{r\to1}\sup_{\{a\in D:|\varphi(a)|>r\}}\int_{E(\varphi,a,t)}\left|\psi\circ\sigma_a(z)\right|^2\mathrm{d}\sigma(z)\ge\delta>0.$$

选取的一个列为$\left\{t_n^n\right\}$。令$f_n(z)=\left(\sigma_{\varphi(a_n)}(z)\right)^n, z\in D$。那么，对任意的$n\in N$，$\|f_n\|_B\le 2$和

$$\begin{aligned}\|W_{\psi,\varphi}f_n\|_B^2&\ge\left\|\left(\psi\circ\sigma_{a_n}\right)\cdot f_n\circ\varphi\circ\sigma_{a_n}\right\|_{A^2}^2\\&\ge\int_{E(\varphi,a_n,t_n)}\left|\psi\circ\sigma_a(z)\right|^2 t_n^{2n}\mathrm{d}\sigma(z)\ge t_n^{2n}\delta.\end{aligned}$$

由于$\left|\varphi(a_n)\right|\le R<1$，$f_n$在单位圆盘的紧子集上一致收敛到零，那么有$\lim\limits_{n\to\infty}\|W_{\psi,\varphi}f_n\|_B=0$。这与假设相矛盾。即(3)是$W_{\psi,\varphi}$在Bloch空间上紧的必要条件。

反之，假设(1)、(2)和(3)式成立。令$f_n\in B$且f_n在单位圆盘的紧子集上一致收敛到零。接下来需要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\|W_{\psi,\varphi}f_n\|_B=0$。令$0<\varepsilon<1$，根据(1)、(2)和(3)式，存在$r\in(0,1), t\in(0,1)$和$n_0\in\mathbb{N}$使得

$$\sup_{\{|\varphi(a)|>r\}}\max\left\{\alpha(\psi,\varphi,a)+\beta(\psi,\varphi,a),\left(\log\frac{1}{1-|\varphi(a)|^2}\right)^{1/2}\right\}<\varepsilon, \tag{4}$$

$$\sup_{\{a\in D:|\varphi(a)|\le r\}}\int_{E(\varphi,a,t)}\left|\psi\circ\sigma_a(z)\right|^2\mathrm{d}\sigma(z)<\varepsilon^4, \tag{5}$$

和

$$\sup_{\{n\ge n_0\}}\max_{w\in Q}\left|f_n(w)\right|<\varepsilon<1, \tag{6}$$

其中$Q:=\overline{rD}\cup\left\{\sigma_b(z)\in D: b\in\overline{rD}, z\in\overline{tD}\right\}\subset D$。

另一方面，对任意的$n_0\in\mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}\|W_{\psi,\varphi}f_n\|_B&\le\left|\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)(0)\right|+\sup_{|\varphi(a)|>r}\left\|\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)\circ\sigma_a-\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)(a)\right\|_{A^2}\\&\quad+\sup_{|\varphi(a)|\le r}\left\|\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)\circ\sigma_a-\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)(a)\right\|_{A^2}\\&=A_1+A_2+A_3,\end{aligned}$$

其中

$$A_1=\left|\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)(0)\right|,$$

$$A_2=\sup_{|\varphi(a)|>r}\left\|\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)\circ\sigma_a-\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)(a)\right\|_{A^2},$$

和

$$A_3=\sup_{|\varphi(a)|\le r}\left\|\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)\circ\sigma_a-\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)(a)\right\|_{A^2}.$$

由引理2.3和(4)式，可知$A_1=\left|\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)(0)\right|<\varepsilon$。根据文献[10]中的(2.13)和引理2.1，可得

$$\begin{aligned}A_2&=\sup_{|\varphi(a)|>r}\left\|\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)\circ\sigma_a-\left(W_{\psi,\varphi}f_n\right)(a)\right\|_{A^2}\\&\le C\left\|\psi\circ\sigma_a-\psi(a)\right\|_{A^2}\cdot\sup_{a\in D}\left\|\psi\circ\sigma_a-\psi(a)\right\|_{A^2}\\&\quad+\sup_{|\varphi(a)|>r}\left(\alpha(\psi,\varphi,a)+\beta(\psi,\varphi,a)\right)\\&\le C\sup_{|\varphi(a)|>r}\left(\left\|\psi\circ\sigma_a-\psi(a)\right\|_{A^2}\left(\log\frac{2}{1-|\varphi(a_n)|^2}\right)^{-1}\beta(\psi,\varphi,a)\right)^{1/2}\\&\quad+\sup_{|\varphi(a)|>r}\left(\alpha(\psi,\varphi,a)+\beta(\psi,\varphi,a)\right).\end{aligned}$$

由于 $W_{\psi,\varphi}$ 在 Bloch 空间上有界，故由文献[10]中定理 2.8 可知 $\beta(\psi,\varphi,a)<\infty$。所以，由(4)式可推导出 $A_2 \le C\varepsilon$。

对于 A_3，令 $F_{n,a}=f_n\circ\varphi\circ\sigma_a-f_n(\varphi(a))$。那么，根据(6)式，可得

$$\begin{aligned}A_3 &\le \sup_{a\in D}\|\psi\circ\sigma_a-\psi(a)\|_{A^2}\cdot\sup_{|\varphi(a)|\le r}\|\psi\circ\sigma_a-\psi(a)\|_{A^2}\\ &\quad+\sup_{|\varphi(a)|\le r}\|(\psi\circ\sigma_a)f_n\circ\varphi\circ\sigma_a-f_n(\varphi(a))\|_{A^2}\\ &\le\|\psi\circ\sigma_a-\psi(a)\|_{A^2}\bullet\max_{|w|\le r}|f_n|+(A_4+A_5)^{1/2}\\ &\le\varepsilon+(A_4+A_5)^{1/2},\end{aligned}$$

其中

$$A_4=\sup_{\{|\varphi(a)|\le r\}}\int_{\partial D\setminus E(\varphi,a,t)}|\psi\circ\sigma_a(z)F_{n,a}(z)|^2\,\mathrm{d}\sigma(z),$$

$$A_5=\sup_{\{|\varphi(a)|\le r\}}\int_{E(\varphi,a,t)}|\psi\circ\sigma_a(z)F_{n,a}(z)|^2\,\mathrm{d}\sigma(z).$$

对 $a\in D$ 和 $n\ge n_0$，令 $G_{n,a}=f\circ\sigma_{\varphi(a)}-f_n(\varphi(a))$ 和 $\lambda_a=\sigma_{\varphi(a)}\circ\varphi\circ\sigma_a-f_n(\varphi(a))$。

则 $G_{n,a}(0)=0$ 和 $F_{n,a}=G_{n,a}\circ\sigma_{\varphi(a)}$。根据文献[9]中的(3-19)式，对任意的 $z\in\partial D\setminus E(\varphi,a,t)$ 可得

$$F_{n,a}(z)=G_{n,a}(\lambda_a(z))\le 2|\lambda_a(z)|\max_{|w|\le t}|G_{n,a}(w)|.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\sup_{\{|\varphi(a)|\le r\}}\int_{\partial D\setminus E(\varphi,a,t)}|\psi\circ\sigma_a(z)F_{n,a}(z)|^2\,\mathrm{d}\sigma(z)\\ &\le 4\left(\max_{|w|\le t}|G_{n,a}(w)|\right)^2\|(\psi\circ\sigma_a)\cdot\lambda_a\|_{A^2},\end{aligned}$$

显然，由(6)式，当 $|\varphi(a)|\le r$，可得

$$\max_{|w|\le t}|G_{n,a}(w)|\le\max_{|w|\le t}\left|f_n\left(\sigma_{\varphi(a)}(w)\right)\right|+|f_n(\varphi(a))|\le 2\varepsilon$$

和

$$\begin{aligned}\|(\psi\circ\sigma_a)\cdot\lambda_a\|_{A^2}&\le\|(\psi\circ\sigma_a-\psi(a))\cdot\lambda_a\|_{A^2}+\|\psi(a)\cdot\lambda_a\|_{A^2}\\ &\le\|(\psi\circ\sigma_a-\psi(a))\|_{A^2}\|\lambda_a\|_\infty+\sup_{a\in D}\alpha(\psi,\varphi,a)<\infty.\end{aligned}$$

因此，$A_4\le C\varepsilon^2$。

对 A_5，根据 Holder 不等式和(5)，有

$$\begin{aligned}A_5&\le\sup_{\{|\varphi(a)|\le r\}}\left(\int_{E(\varphi,a,t)}|\psi\circ\sigma_a(z)|^2\,\mathrm{d}\sigma(z)\right)^{1/2}\\ &\quad\cdot\sup_{\{|\varphi(a)|\le r\}}\left(\int_{E(\varphi,a,t)}|\psi\circ\sigma_a(z)|^2|F_{n,a}(z)|^4\,\mathrm{d}\sigma(z)\right)^{1/2}\\ &\le\varepsilon^2\sup_{\{|\varphi(a)|\le r\}}\|(\psi\circ\sigma_a)\cdot F_{n,a}\|_{A^4}\|F_{n,a}\|_{A^4}.\end{aligned}$$

根据引理 2.1 和文献[2]中的引理 2.7，可得

$$\|F_{n,a}\|_{A^4}\le C\|f_n\circ\varphi\circ\sigma_a-f_n(\varphi(a))\|_{A^2}\le C.$$

更进一步，

$$\sup_{\{|\varphi(a)|\le r\}} \left\|(\psi\circ\sigma_a)\cdot F_{n,a}\right\|_{A^4} \le \sup_{\{|\varphi(a)|\le r\}} \left\|(W_{\psi,\varphi} f_n)\circ\sigma_a - (W_{\psi,\varphi} f_n)(a)\right\|_{A^2}$$
$$+\sup_{\{|\varphi(a)|\le r\}} \left\|(\psi\circ\sigma_a - \psi(a))\cdot f_n(\varphi(a))\right\|_{A^4}$$
$$\le C\left(\left\|W_{\psi,\varphi} f_n\right\|_B \left\|\psi\circ\sigma_a - \psi(a)\right\|_{A^2}\right).$$

因此，$A_5 \le C\varepsilon^2$。所以，$A_5 \le C\varepsilon$。所以有

$$\sup_{n\ge n_0} \left\|W_{\psi,\varphi} f_n\right\|_B \le A_1 + A_2 + A_3 \le C\varepsilon,$$

其中 C 与 ε 无关。

基金项目

广东省大学生科技创新培育专项资金(“攀登计划”专项资金)资助项目(pdjh2017b0473)。

参考文献 (References)

[1] Axler, S. (1986) The Bergman space, the Bloch Space and Commutators of Multiplication Operators. *Duke Mathematical Journal*, **53**, 315-332. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-86-05320-2

[2] Garnett, J. (1981) Bounded Analytic Functions. Academic Press, New York.

[3] Colonna, F. (2013) New Criteria for Boundedness and Compactness of Weighted Composition Operators Mapping into the Bloch Space. *Central European Journal of Mathematics*, **11**, 55-73.

[4] Colonna, F. (2013) Weighted Composition Operators between H^∞ and BMOA. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **50**.

[5] Galindo, P., Laitila, J., Lindsrom, M. (2013) Essential Norm Estimates for Composition Operators on BMOA. *Journal of Functional Analysis*, **265**, 629-643. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.05.002

[6] Bourdon, P., Cima, J. and Matheson, A. (1999) Compact Composition Operators on BMOA. *Transactions of the American Mathematical Society*, **351**, 2183-2196. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-99-02387-9

[7] Hyyarinen, O. and Lindstrom, M. (2012) Estimates of Essential Norms of Weighted Composition Operators between Bloch-Type Spaces. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **393**, 38-44. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.03.059

[8] Laitiala, J. (2009) Weighted Composition Operators on BMOA. *Computational Methods & Function Theory*, **9**, 27-46.

[9] Laitiala, J. and Lindstrom, M. (2015) The Essential Norm of a Weighted Composition Operator on BMOA. *Mathematische Zeitschrift*, **279**, 423-434. https://doi.org/10.1007/s00209-014-1375-6

[10] Liu, X. and Li, S. (2017) Norm and Essential Norm of a Weighted Composition Operator on the Bloch Space. *Integral Equations & Operator Theory*, 1-17.

[11] Smith, W. (1999) Compactness of Composition Operators on BMOA. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **127**, 2715-2725. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-99-04856-X

[12] Wulan, H. (2007) Compactness of Composition Operators on BMOA and VMOA. Science in China (Series A: Mathematics), **50**, 997. https://doi.org/10.1007/s11425-007-0061-0

[13] Wulan, H., Zheng, D. and Zhu, K. (2009) Compact Composition Operators on BMOA and the Bloch Space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **137**, 3861-3868. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-09-09961-4

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org