Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(1), 14-21
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.81003

Determination Method of Positive Definite Matrix and New Brauer Oval

Qiaojuan Zheng

School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: 603795477@qq.com

Received: Dec. 18th, 2017; accepted: Jan. 1st, 2018; published: Jan. 8th, 2018

Abstract

The eigenvalue inclusion region in [Qiaojuan Zheng, Yaotang Li. *p*-Norm DSDD Matrices and New Eigenvalue Localization Region, Applied Mathematical Progress, 2017, 6(3): 367-375.] is used to obtain a method for determining the positive definite property of the real symmetric matrix. In addition, a new normal matrix Brauer oval eigenvalue inclusion region is given, so that each oval contains at least one eigenvalue of the matrix.

Keywords

***p*-norm DSDD Matrix, Real Symmetric Matrix, Positive Definite Property, Eigenvalue Contain Region**

正定矩阵的判定方法和新的Brauer卵形

郑巧娟

云南大学数学与统计学院，云南 昆明
Email: 603795477@qq.com

收稿日期：2017年12月18日；录用日期：2018年1月1日；发布日期：2018年1月8日

摘 要

利用文[郑巧娟，李耀堂。*p*-范数双严格对角占优矩阵与新的特征值包含区域。应用数学进展，2017，6(3)：367-375。]中所给矩阵的特征值包含区域获得了实对称矩阵正定性的一种判定方法。另外，给出了一个新的正规矩阵Brauer卵形特征值包含区域，使得每个卵形至少包含矩阵的一个特征值。

关键词

***p*-范数DSDD矩阵，实对称矩阵，正定性，特征值包含区域**

文章引用: 郑巧娟. 正定矩阵的判定方法和新的 Brauer 卵形[J]. 理论数学, 2018, 8(1): 14-21.
DOI: 10.12677/pm.2018.81003

1. 引言

正定矩阵及其正定矩阵的判定是矩阵理论研究的重要内容之一，很多学者对其做出了研究。对于正定矩阵的研究，起初出现在实二次型与 Hermite 型的研究中。而这种正定性的研究只局限于实对称矩阵和 Hermite 矩阵。随着数学以及矩阵应用等的发展，有不少学者开始研究非对称的较为广义的正定矩阵，并取得了丰富的成果，这些成果在自动控制、系统理论等许多领域都有广泛的应用。本文中，我们还将致力于实对称矩阵的正定性研究。利用文献[1]中给出的一类非奇异矩阵——p-范数双严格对角占优矩阵及特征值包含区域，给出了实对称矩阵正定性的一种判定方法。

此外，矩阵特征值的包含区域在动力系统的稳定性分析，控制系统的可控制性研究，线性方程组的算法分析等问题的研究中有着重要的作用，是矩阵应用与分析中的一个重要课题。而我们熟悉的特征值包含区域，有著名的 Geršgorin 定理、Brauer 定理等等，但是无论 Geršgorin 定理还是 Brauer 定理都不能保证每个 Geršgorin 圆盘和每个 Brauer 卵形都包含矩阵的特征值。对于正规矩阵，本文将给出一种新的 Brauer 卵形，使其每个卵形至少包含矩阵的一个特征值。

2. 预备知识

本节给出一些基本符号和基本概念，以备后用。

首先给出文中所用的符号和术语。设 n 为自然数，记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$。$C^n\left(R^n\right)$ 为 n 维复(实)列向量空间，$C^{n\times n}\left(R^{n\times n}\right)$ 为 $n\times n$ 维复(实)矩阵组成的集合。设向量 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}\in C^n$，$A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，$q,p\in[1,\infty]$。记

$$\|x\|_q=\left(\sum_{i\in N}|x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},\quad r_i^p(A)=\left(\sum_{j\in N\setminus\{i\}}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad i\in N。$$

特别地，当 $p=1$ 时，$r_i(A)=\sum_{j\in N\setminus\{i\}}|a_{ij}|$。

定义 1 [2]：设 $A\in R^{n\times n}$ 是对称矩阵。如果对任意 $0\neq x\in R^n$，都有

$$x^{\mathrm{T}}Ax>0\left(x^{\mathrm{T}}Ax\geq 0\right) \tag{2.1}$$

则称 A 是实对称正定矩阵(实对称半正定矩阵)。

文献[3] [4]中介绍了双对角占优矩阵、双严格对角占优矩阵并给出了关于矩阵特征值包含区域的 Brauer 定理。

定义 2 [3]设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，如果

$$|a_{ii}|\cdot|a_{jj}|\geq r_i(A)r_j(A),\quad i,j\in N,\ 且\ i\neq j \tag{2.2}$$

则称 A 为双对角占优矩阵，记为 DDD 矩阵。如果

$$|a_{ii}|\cdot|a_{jj}|>r_i(A)r_j(A),\quad i,j\in N,\ 且\ i\neq j$$

则称 A 为双严格对角占优矩阵，记为 DSDD 矩阵。

定理 1 [4]：(Brauer 定理)设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，则 A 的所有特征值都包含在其 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个 Cassini 卵形区域的并集之中，即

$$\sigma(A)\subseteq K(A)=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}K_{i,j}(A) \tag{2.3}$$

其中 $\sigma(A)$ 为 A 的谱，

$$K_{i,j}(A)=\left\{z\in C:\left|z-a_{ii}\right|\cdot\left|z-a_{jj}\right|\le r_i(A)r_j(A)\right\},$$

称为矩阵 A 的 Cassini 卵形区域。

在文献[1]中，我们引进了一类新的非奇异 H-矩阵—p-范数 DSDD 矩阵并给出了其对应的特征值包含区域。

定义 3 [1]：设 $A\in C^{n\times n}$， $p\in[1,\infty]$。若存在满足 $\|x\|_q\le 1$ 的正向量 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}>0$ 使得

$$x_ix_j\left|a_{ii}\right|\left|a_{jj}\right|>r_i^p(A)r_j^p(A),\ i,j\in N;\ i\neq j \tag{2.4}$$

成立，则称 A 为 p-范数 DSDD 矩阵，其中 q 为 p 的 Hölder 补，即 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。

定理 3 [1]：设 A 为 p-范数 DSDD 矩阵，则 A 非奇异。

定理 4 [1]：设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$， $p\in[1,\infty]$，则 A 为 p-范数 DSDD 矩阵当且仅当

$$\sum_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\left(\frac{r_i^p(A)r_j^p(A)}{\left|a_{ii}\right|\left|a_{jj}\right|}\right)^{\frac{p}{p-1}}<1。 \tag{2.5}$$

定理 5 [1]：设 $A\in C^{n\times n}$， $p\in[1,\infty]$，则对任意满足 $\|x\|_q\le 1$ 的正向量 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}>0$，有

$$\sigma(A)\subseteq\Phi^{p,x}(A):=\bigcap_{\|x\|_q\le 1}\bigcup_{i,j\in N}\Phi_{i,j}^{p,x}(A)。 \tag{2.6}$$

其中 $\Phi_{i,j}^{p,x}(A):=\left\{z\in C:x_ix_j\left|z-a_{ii}\right|\left|z-a_{jj}\right|\le r_i^p(A)r_j^p(A)\right\}$； q 为 p 的 Hölder 补，即 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。

定理 6：设 $A\in C^{n\times n}$ 且对任意 $i\in N$，存在 $j\neq i$，使 $a_{ij}\neq 0$，且 $p\in(1,\infty]$，则

$$\sigma(A)\subseteq\Phi^p(A)$$

其中，

$$\Phi^p(A):=\left\{z\in C:\sum_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\left(\frac{r_i^p(A)r_j^p(A)}{\left|z-a_{ii}\right|\cdot\left|z-a_{jj}\right|}\right)^{\frac{p}{p-1}}\ge 1\right\} \tag{2.7}$$

证明：设 $A\in C^{n\times n}$， $p>1$， $\lambda\in\sigma(A)$，假若 $\lambda\notin\Phi^p(A)$，则

$$\sum_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\left(\frac{r_i^p(A)r_j^p(A)}{\left|z-a_{ii}\right|\cdot\left|z-a_{jj}\right|}\right)^{\frac{p}{p-1}}<1。 \tag{2.8}$$

令 $B=\lambda I-A=\left(b_{ij}\right)$，由 $\lambda\in\sigma(A)$ 知， $0\in\sigma(B)$，故 B 为奇异矩阵。由 $B=\lambda I-A=\left(b_{ij}\right)$ 知

$$r_i^p(B)=r_i^p(A)，\ |b_{ii}|=|\lambda-a_{ii}|，\ i\in N，$$
$$r_j^p(B)=r_j^p(A)，\ |b_{jj}|=|\lambda-a_{jj}|，\ j\in N。$$

于是由(2.8)式可得

$$\sum_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\left(\frac{r_i^p(B)r_j^p(B)}{|b_{ii}|\cdot|b_{jj}|}\right)^{\frac{p}{p-1}}<1。$$

再由定理 4 知矩阵 B 为 p-范数 DSDD 矩阵，于是由定理 3 知矩阵 B 为非奇异的，这与矩阵 B 是奇异的相矛盾。综上所述，$\lambda\in\Phi^p(A)$。

下面给出判定实对称矩阵正定的一些必要条件和充分条件。

定理 7 [2]：设 $A\in R^{n\times n}$，如果 A 是实对称正定矩阵，则 A 的对角元素全为正。

定理 8 [2] [2]：实对称矩阵 A 是正定矩阵的充分必要条件是 A 的特征值全大于零。

定理 9 [5]：实对称矩阵 A 是正半定矩阵的充分必要条件是 A 的特征值全是非负实数。

3. 实对称矩阵正定性的判定

本节我们给出一些判定实对称矩阵正(半)定性的充分条件。

定理 10：设 $A\in R^{n\times n}$ 为对称矩阵，且 $a_{ii}>0\,(i\in N)$。如果 A 为 p-范数 DSDD 矩阵，则 A 是正定的。

证明：反证法。设 $\lambda\in\sigma(A)$，则 λ 为实数。由定理 5 知，存在满足 $\|x\|_q\le 1$ 的正向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}>0$ 和 $i_0,j_0\in N$ 且 $i_0\neq j_0$，使得

$$\lambda\in\Phi_{i_0,j_0}^{p,x}(A)$$

即

$$x_{i_0}x_{j_0}|\lambda-a_{i_0i_0}||\lambda-a_{j_0j_0}|\le r_{i_0}^p(A)r_{j_0}^p(A) \tag{3.1}$$

假若 $\lambda\le 0$，由于 $a_{ii}>0, i\in N$ 和 A 为 p-范数 DSDD 矩阵得

$$x_{i_0}x_{j_0}|\lambda-a_{i_0i_0}||\lambda-a_{j_0j_0}|\ge x_{i_0}x_{j_0}a_{i_0i_0}a_{j_0j_0}>r_{i_0}^p(A)r_{j_0}^p(A)$$

这与(3.1)式相矛盾，因此 $\lambda>0$。再由定理 8 知，A 是正定的。

引理 1 [6]：设 A 为 n 阶复矩阵，且对任意的 $i\in N$，有 $a_{ii}>0$。如果 A 为双对角占优矩阵，则 A 为正半定的；如果 A 为双严格对角占优矩阵，则 A 为正定的。

定理 11：设 $A\in R^{n\times n}$ 为对称矩阵，且 $a_{ii}>0\,(i\in N)$，$p\in[1,\infty]$。如果

$$\sum_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\left(\frac{r_i^p(A)r_j^p(A)}{|a_{ii}||a_{jj}|}\right)^{\frac{p}{p-1}}\le 1 \tag{3.2}$$

则 A 是正半定的。

证明：若 $p=1$，则

$$\max_{\substack{i,j\in N,\\ i\neq j}}\frac{r_i(A)r_j(A)}{|a_{ii}||a_{jj}|}\le 1，$$

由定义 2 知，A 为双对角占优矩阵。根据引理 1 可知，A 是正半定的。若 $p>1$，设 λ 是 A 的特征值。由定理 6 知 $\lambda\in\Phi^p(A)$。这表明对于

$$\sum_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\left(\frac{r_i^p(A)r_j^p(A)}{|\lambda-a_{ii}|\cdot|\lambda-a_{jj}|}\right)^{\frac{p}{p-1}}\geq 1$$

假若 $\lambda<0$，由于 $a_{ii}>0, i\in N$，故有

$$\sum_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\left(\frac{r_i^p(A)r_j^p(A)}{|a_{ii}|\cdot|a_{jj}|}\right)^{\frac{p}{p-1}}>\sum_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\left(\frac{r_i^p(A)r_j^p(A)}{|\lambda-a_{ii}|\cdot|\lambda-a_{jj}|}\right)^{\frac{p}{p-1}}\geq 1$$

这与(3.2)式相矛盾，因此 $\lambda\geq 0$。再由定理 9 可知，A 是正半定的。

4. 新的 Brauer 卵形

本节，我们给出正规矩阵的新型的特征值 Brauer 卵形包含区域。

定义 4 [7]： 设 $A\in C^{n\times n}$，若

$$AA^*=A^*A$$

则称 A 为正规矩阵。

我们知道，即使著名的 Geršgorin’s 定理也不能保证每个 Geršgorin 圆盘都包含矩阵的一个特征值。但在文献[8]中，对于正规矩阵，给出了一种 Geršgorin 型圆盘，其每个圆盘都包含矩阵的特征值。

定理 12 [8]： 设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵。则 A 的每个 Geršgorin 圆盘

$$E_i=\left\{z\in C:|z-a_{ii}|\leq r_i^2(A)\right\},\tag{4.1}$$

必包含矩阵 A 的一个特征值，其中，

$$r_i^2(A)=\left(\sum_{\substack{i,j\in N,\\ j\neq i}}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}。$$

同样，矩阵 A 的某个 Brauer Cassini 卵形可能也不包含矩阵 A 的特征值。然而对于正规矩阵，应用定理 11，我们可得到下面的结论。

定理 13： 设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，则 A 的每个卵形区域

$$E_{i,j}=\left\{z\in C:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leq r_i^2(A)r_j^2(A)\right\}\tag{4.2}$$

必包含矩阵 A 的一个特征值。

证明： 反证法。假若存在 $E_{i,j}$ 不包含矩阵 A 的任何特征值，则对任意的 $\lambda\in\sigma(A)$ 有

$$|\lambda-a_{ii}||\lambda-a_{jj}|>r_i^2(A)r_j^2(A)$$

即

$$\frac{|\lambda-a_{ii}||\lambda-a_{jj}|}{r_i^2(A)r_j^2(A)}=\frac{|\lambda-a_{ii}|}{r_i^2(A)}\cdot\frac{|\lambda-a_{jj}|}{r_j^2(A)}>1。$$

因此，$\frac{|\lambda-a_{ii}|}{r_i^2(A)}$ 与 $\frac{|\lambda-a_{jj}|}{r_j^2(A)}>1$ 至少有一个成立，即

$$|\lambda-a_{ii}|>r_i^2(A)，\quad |\lambda-a_{jj}|>r_j^2(A)$$

至少有一个成立。这表明 A 的第 i 个和第 j 个 Geršgorin 圆盘中至少有一个不包含矩阵 A 的任何特征值。这与定理 12 的结论矛盾。

例 1： 设

$$A=\begin{bmatrix}10 & 3 & 7 & 7\\ 3 & 4 & 2 & 2\\ 7 & 2 & 6 & 5\\ 7 & 2 & 5 & 3\end{bmatrix}。$$

易知 A 为正规矩阵且 $\sigma(A)=\{-1.4474, 0.7211, 3.0056, 20.7208\}$。见图 1~图 2。

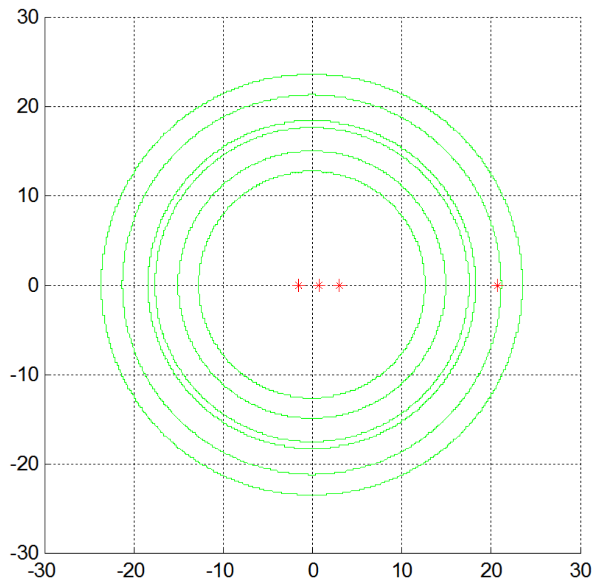

Figure 1. The new brauer oval $E_{i,j}$ of a for example 1
图 1. 例 1 中矩阵 A 的新的 Brauer 卵形 $E_{i,j}$

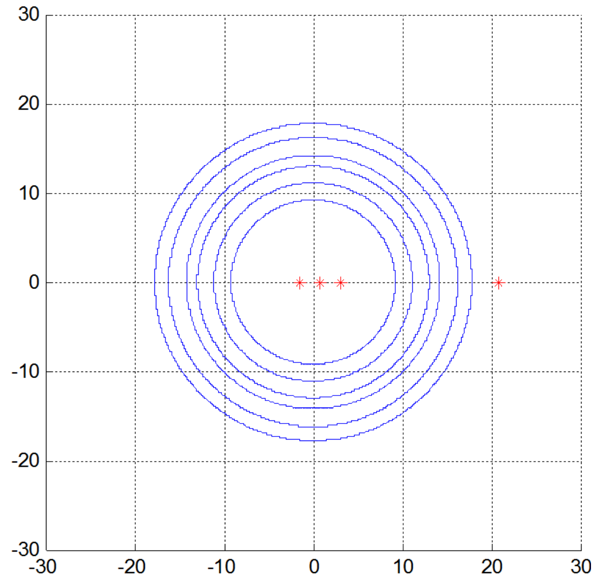

Figure 2. The brauer cassini oval $k_{i,j}(a)$ of a for example 1
图 2. 例 1 中矩阵 A 的 Brauer Cassini 卵形 $K_{i,j}(A)$

定理 14： 设矩阵 $A \in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，则 $E_{i,j} \subseteq K_{i,j}$。

证明： 由 Cauchy-Schwartz 不等式知，

$$r_i^2(A) \le r_i(A) \le \sqrt{n-1} r_i^2(A), i \in N \text{。}$$

因此

$$r_i^2(A) r_j^2(A) \le r_i(A) r_j(A) \le (n-1) r_i^2(A) r_j^2(A) \text{。}$$

故 $r_i^2(A) r_j^2(A) \le r_i(A) r_j(A)$，由此即得，$E_{i,j} \subseteq K_{i,j}$。

在例 1 中，对于矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{。}$$

我们从图 3 中，可以看出 $E_{i,j}(A) \subseteq K_{i,j}(A)$。但是，正规矩阵 A 的某些特征值可能不在 $\bigcup_{\substack{i,j\in N,\\ i\ne j}} E_{i,j}$ 之内。

例 2

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \text{。}$$

矩阵 B 为实对称矩阵，则 B 为正规矩阵。用 Matlab 计算得

$$\sigma(B) = \{0.0102, 0.8431, 3.8581, 30.288\},$$

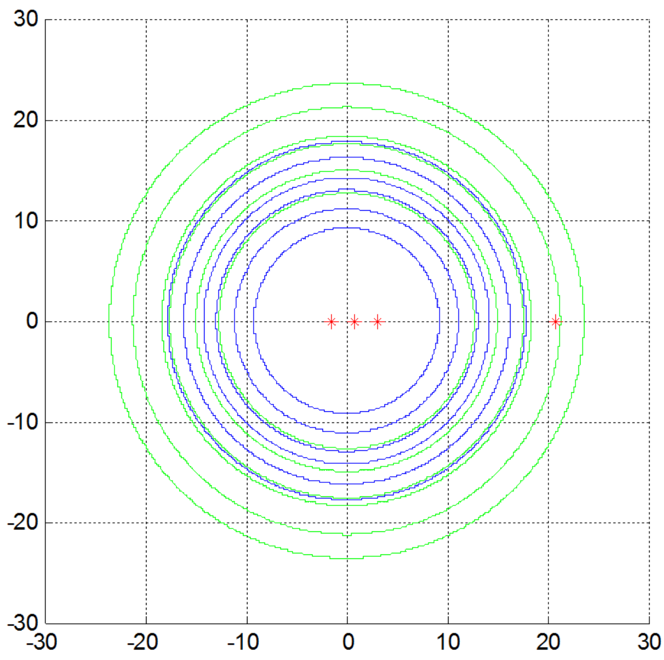

Figure 3. The formula and firgure in the same example 1
图 3. 同例 1 中的公式、图示

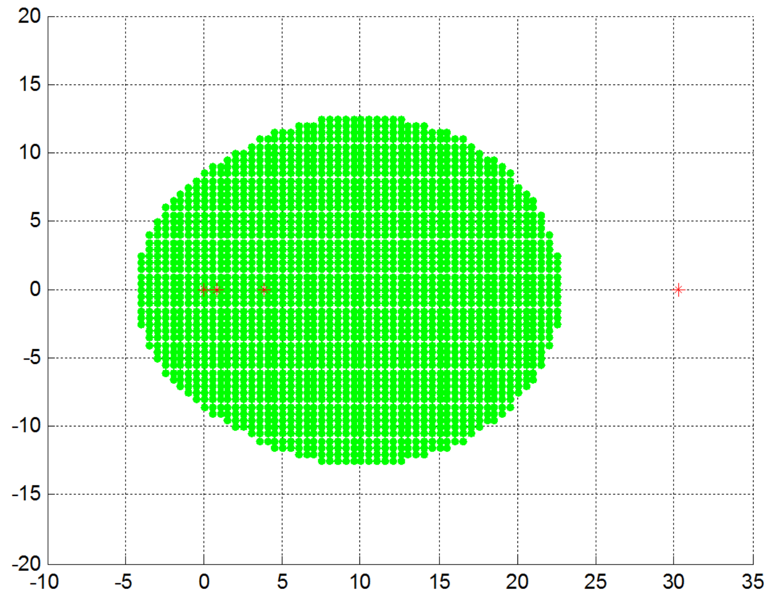

Figure 4. The union set of the new brauer oval of B for example 2
图 4. 例 2 中矩阵 B 的所有新的 Brauer 卵形的并集

其 Brauer 型特征值包含区域如图 4 所示。显然，

$$30.288 \not\subset \bigcup_{\substack{i,j\in N,\\ i\neq j}} E_{i,j},\ N=\{1,2,3,4\}。$$

参考文献 (References)

[1] 郑巧娟, 李耀堂. p-范数双严格对角占优矩阵与新的特征值包含区域[J]. 应用数学进展, 2017, 6(3): 367-375.

[2] 徐仲, 陆全, 张凯院, 安小红. H-矩阵类的理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[3] Li, B.S. (1997) Doubly Diagonally Dominant Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **261**, 221-235.

[4] Varga, R. (2004) Geršgorin and His Circle. Springer, Berlin.

[5] 倪凌炜. 实正定矩阵的若干判定方法[J]. 湖州师范学院学报, 2004: 125-128.

[6] 顾敦和. 关于正定矩阵判定的一点注记[J]. 华东工学院学报, 1987: 43-46.

[7] 陈公宁. 矩阵理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[8] Smoktunowicz, A. and Kerzkowski, J. (2011) Block Normal Matrices and Geršgorin-Type Discs. *Electronic Journal of Linear Algebra*, **22**, 1059-1069.