

# Group Consensus of Third-Order Multi-Agent Systems with Fixed Topology

Jiahuan Sima, Xiaoquan Ding\*

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan  
Email: \*xqding@haust.edu.cn

Received: May 11<sup>th</sup>, 2018; accepted: May 23<sup>rd</sup>, 2018; published: May 30<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

This paper is concerned with the group consensus problem for third-order multi-agent systems with fixed directed topology. By using algebraic graph theory and matrix theory, necessary and sufficient conditions are derived for multi-agent systems to achieve group consensus. Finally, a simulation example is given to verify the effectiveness of the theoretical results.

## Keywords

Third-Order Multi-Agent System, Group Consensus, Fixed Topology

---

# 三阶多智能体系统在固定拓扑下的分组一致性

司马嘉欢, 丁孝全\*

河南科技大学数学与统计学院, 河南 洛阳  
Email: \*xqding@haust.edu.cn

收稿日期: 2018年5月11日; 录用日期: 2018年5月23日; 发布日期: 2018年5月30日

---

## 摘要

本文讨论三阶多智能体系统在固定有向拓扑下的分组一致性。利用代数图论和矩阵理论, 建立了三阶多智能体系统实现分组一致性的充要条件。数值模拟验证了理论结果的有效性。

## 关键词

三阶多智能体系统, 分组一致性, 固定拓扑

---

\*通讯作者。



## 1. 引言

多智能体系统的一致性作为复杂网络动力学当前研究的热点,吸引了数学、物理学、社会学、信息科学和控制工程等领域学者的极大关注。一致性是指系统中的各智能体随着时间的变化,最终都趋于相同的状态。一致性作为协调控制的基础,其理论成果被无人机编队、水下作战潜艇、聚集问题和智能机器人等领域广泛应用。

2003年, Jababaie 等人[1]运用代数图论首次对一阶多智能体系统的一致性问题进行理论分析,证明了当通讯拓扑为无向连通图时,系统实现一致性。2004年, Olfati-Saber 和 Murray [2]提出了多智能体系统的理论框架和一致性协议的基本形式,证明了系统的收敛速度与通讯拓扑的代数连通度有关。2005年, Ren 和 Beard [3]将一阶多智能体系统实现一致性的条件放宽为通讯拓扑有生成树。2008年, Ren [4]指出在固定有向拓扑下,有生成树仅是二阶多智能体系统实现一致性的必要条件但非充分条件,为实现一致性,控制参数还需要满足一定的条件。2010年, Yu 等人[5]建立了在固定有向拓扑下二阶多智能体系统实现一致性的充要条件,发现拉普拉斯矩阵特征值的实部和虚部都会影响系统的一致性。

相比较而言,目前关于高阶系统的研究比较少,但其应用价值显而易见。2007年, Ren 等人[6]通过讨论固定有向拓扑下的拉普拉斯矩阵的特征值与系统矩阵的特征值之间的关系,给出高阶多智能体系统实现一致性的条件。2013年, Miao 等人[7]利用李雅普诺夫函数研究了在无向拓扑下带有噪声和时滞的高阶多智能体系统的一致性。2016年, Cao 和 Sun [8]讨论了离散时间固定有向拓扑下三阶多智能体系统实现一致性的充要条件和参数范围。

2009年, Yu 和 Wang [9]首次提出分组一致性的概念,讨论了无向拓扑下一阶多智能体系统的分组一致性。分组一致性是指在多智能体系统的协调控制中,根据环境、任务等实际需要,要求一个多智能体系统中的智能体同时协调完成两个甚至两个以上的不同任务。2014年, Xie 等人[10]建立了固定有向拓扑下一阶多智能体系统实现分组一致性的充要条件, Feng 等人[11]则建立了固定有向拓扑下二阶多智能体系统实现分组一致性的充要条件。Zhao 和 Ju [12]对固定有向拓扑和随机切换拓扑,分别给出了离散时间一阶多智能体系统实现分组一致性的充要条件。

本文在已有研究基础上,讨论三阶多智能体系统在固定有向拓扑下的分组一致性。首先,利用代数图论和矩阵理论,建立了系统实现分组一致性的充要条件。然后,利用复系数多项式稳定性理论,探讨了系统实现分组一致性与控制参数之间的关系。最后,用数值模拟验证了理论结果的有效性。

## 2. 预备知识和问题描述

考虑由  $n+m$  个三阶智能体组成的多智能体系统,每个智能体的状态遵循如下动力学模型

$$\dot{\xi}_i(t) = \zeta_i(t), \quad \dot{\zeta}_i(t) = \eta_i(t), \quad \dot{\eta}_i(t) = u_i(t), \quad i=1,2,\dots,n+m \quad (1)$$

其中  $\xi_i(t) \in \mathbb{R}$ 、 $\zeta_i(t) \in \mathbb{R}$ 、 $\eta_i(t) \in \mathbb{R}$  和  $u_i(t) \in \mathbb{R}$  分别表示第  $i$  个智能体的位置、速度、加速度和控制输入。假定  $n+m$  个智能体分为  $\ell_1$  和  $\ell_2$  两组,其中

$$\ell_1 = \{1, 2, \dots, n\}, \quad \ell_2 = \{n+1, n+2, \dots, n+m\},$$

并记

$$\begin{aligned} \xi^1 &= [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T, \quad \xi^2 = [\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{n+m}]^T, \quad \zeta^1 = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n]^T, \\ \zeta^2 &= [\zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \dots, \zeta_{n+m}]^T, \quad \eta^1 = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T, \quad \eta^2 = [\eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots, \eta_{n+m}]^T. \end{aligned}$$

**定义 2.1:** 如果存在控制算法  $u_i(t) (i=1, 2, \dots, n+m)$ , 使得对任意初始条件  $\xi_i(0)$ 、 $\zeta_i(0)$  和  $\eta_i(0)$ , 多智能体系统(1)的状态满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_i(t) - \xi_j(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\zeta_i(t) - \zeta_j(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\eta_i(t) - \eta_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in \ell_k, \quad k=1, 2,$$

则称多智能体系统(1)在控制算法  $u_i(t)$  作用下渐近实现分组一致性。

我们用加权有向图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$  表示各智能体之间的通讯关系, 其中  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n+m}\}$  为  $\mathcal{G}$  的节点集,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  为  $\mathcal{G}$  的边集,  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  为  $\mathcal{G}$  的加权邻接矩阵. 矩阵元素  $a_{ij} \neq 0$  当且仅当  $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ , 即第  $i$  个智能体能接收到来自第  $j$  个智能体的信息.  $L = D - A$  为  $\mathcal{G}$  的拉普拉斯矩阵, 其中  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_{n+m}\}$  为对角阵, 并且对  $i=1, 2, \dots, n+m$ , 对角线元素

$$d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n+m} a_{ij}.$$

本文约定  $I_n$  表示  $n$  阶单位矩阵,  $\mathbf{1}_n$  表示所有元素均为 1 的  $n$  维列向量,  $\mathbf{0}_n$  表示所有元素均为 0 的  $n$  维列向量,  $O_{n \times m}$  表示所有元素均为 0 的  $n \times m$  矩阵. 当维数已经明了或者不紧要时, 可省略表示它们维数的下标. 假定邻接矩阵  $A = [a_{ij}]$  满足下列条件:

**假设 2.1:**

$$(A_1) \quad \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} = 0, \quad \forall i \in \ell_1; \quad (A_2) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 0, \quad \forall i \in \ell_2.$$

为解决多智能体系统(1)的分组一致性问题, 在文献[5] [6] [9] [11]的基础上, 我们提出下列一致性算法:

$$u_i(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} [\alpha(\xi_j(t) - \xi_i(t)) + \beta(\zeta_j(t) - \zeta_i(t)) + \gamma(\eta_j(t) - \eta_i(t))] \\ + \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} [\alpha\xi_j(t) + \beta\zeta_j(t) + \gamma\eta_j(t)], \quad \forall i \in \ell_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} [\alpha\xi_j(t) + \beta\zeta_j(t) + \gamma\eta_j(t)] \\ + \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} [\alpha(\xi_j(t) - \xi_i(t)) + \beta(\zeta_j(t) - \zeta_i(t)) + \gamma(\eta_j(t) - \eta_i(t))], \quad \forall i \in \ell_2, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$  为控制参数.

在一致性算法(2)作用下, 多智能体系统(1)可表示成下列矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \zeta(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix},$$

其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} O_{(n+m) \times (n+m)} & I_{n+m} & O_{(n+m) \times (n+m)} \\ O_{(n+m) \times (n+m)} & O_{(n+m) \times (n+m)} & I_{n+m} \\ -\alpha L & -\beta L & -\gamma L \end{bmatrix}. \quad (3)$$

根据矩阵理论,  $\Phi$  的特征多项式为

$$\det(\lambda I_{3(n+m)} - \Phi) = \det[\lambda^3 I_{n+m} + (\gamma\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha)L] = \prod_{i=1}^{n+m} [\lambda^3 + (\gamma\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha)\mu_i], \quad (4)$$

其中  $\mu_i$  是  $L$  的第  $i$  个特征值。

**引理 2.1:** ([9]) 若假设 2.1 成立, 则  $L$  有一个几何重数至少为 2 的零特征值, 并且

$$q_1 = [\mathbf{1}_n^T, \mathbf{0}_m^T]^T \text{ 和 } q_2 = [\mathbf{0}_n^T, \mathbf{1}_m^T]^T$$

是  $L$  对应于零特征值的两个线性无关的右特征向量。

给定  $n$  阶复系数方程

$$\lambda^n + (a_1 + b_1j)\lambda^{n-1} + (a_2 + b_2j)\lambda^{n-2} + \dots + (a_n + b_nj) = 0, \quad (5)$$

其中  $j$  为虚数单位,  $a_k$  和  $b_k$  为实数,  $k = 1, 2, \dots, n$ 。令  $a_0 = 1, b_0 = 0$ , 以及

$$\begin{cases} B_i = a_{i-2,1}^4 a_{i-1,1}, \\ L_i = a_{i-1,1}^2 a_{i-2,1}^3 b_{i-2,2} - b_{i-1,2} B_i, \end{cases} \quad (6)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ , 其中  $a_{-1,j} = a_{l-1}, b_{-1,j} = b_{l-1}, a_{0,j} = a_l, b_{0,j} = b_l, l = 1, 2, \dots, n$ , 以及

$$\begin{cases} a_{i,2m-1} = a_{i-1,1}^3 a_{i-2,1}^3 a_{i-2,2m+1} - a_{i-1,1} a_{i-1,2m+1} B_i + b_{i-1,2m} L_i, \\ b_{i,2m} = a_{i-1,1}^3 a_{i-2,1}^3 b_{i-2,2m+2} - a_{i-1,1} b_{i-1,2m+2} B_i - a_{i-1,2m+1} L_i, \\ a_{i,j} = b_{i,j} = 0, \text{ 当 } i + j > n, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, n-1, m = 1, 2, \dots, [(n+1-i)/2]$ 。

**引理 2.2:** ([13]) 方程(5)的根全部都具有负实部的充要条件是(6)成立, 并且对任意  $i = 1, 2, \dots, n$ , 有  $B_i > 0$ 。

### 3. 主要结论

**定理 3.1:** 在一致性算法(2)的作用下, 当且仅当  $\Phi$  有一个代数重数为 6 的零特征值且非零特征值都具有负实部时, 多智能体系统(1)可渐近实现分组一致性。此外, 当渐近实现分组一致性时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \xi_i(t) - p_{11}^T \xi^1(0) - p_{12}^T \xi^2(0) - t p_{11}^T \zeta^1(0) - t p_{12}^T \zeta^2(0) - \frac{1}{2} t^2 p_{11}^T \eta^1(0) - \frac{1}{2} t^2 p_{12}^T \eta^2(0) \right\| = 0, \quad \forall i \in \ell_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \xi_i(t) - p_{21}^T \xi^1(0) - p_{22}^T \xi^2(0) - t p_{21}^T \zeta^1(0) - t p_{22}^T \zeta^2(0) - \frac{1}{2} t^2 p_{21}^T \eta^1(0) - \frac{1}{2} t^2 p_{22}^T \eta^2(0) \right\| = 0, \quad \forall i \in \ell_2,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \zeta_i(t) - p_{11}^T \zeta^1(0) - p_{12}^T \zeta^2(0) - t p_{11}^T \eta^1(0) - t p_{12}^T \eta^2(0) \right\| = 0, \quad \forall i \in \ell_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \zeta_i(t) - p_{21}^T \zeta^1(0) - p_{22}^T \zeta^2(0) - t p_{21}^T \eta^1(0) - t p_{22}^T \eta^2(0) \right\| = 0, \quad \forall i \in \ell_2,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \eta_i(t) - p_{11}^T \eta^1(0) - p_{12}^T \eta^2(0) \right\| = 0, \quad \forall i \in \ell_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \eta_i(t) - p_{21}^T \eta^1(0) - p_{22}^T \eta^2(0) \right\| = 0, \quad \forall i \in \ell_2,$$

其中  $p_1 = [p_{11}^T, p_{12}^T]^T$  和  $p_2 = [p_{21}^T, p_{22}^T]^T$  是  $L$  对应于零特征值且满足  $p_1^T q_1 = 1$  和  $p_2^T q_2 = 1$  的左特征向量,  $q_1$  和  $q_2$  的定义见引理 2.1。

**证明: (充分性)** 由(4)可知, 若  $\Phi$  的零特征值的代数重数为 6, 则  $L$  的零特征值的代数重数等于 2。再由引理 2.1 可知,  $L$  的零特征值的几何重数也等于 2。令  $p_1 = [p_{11}^T, p_{12}^T]^T$  和  $p_2 = [p_{21}^T, p_{22}^T]^T$  为  $L$  对应于零特

征值且满足

$$p_1^T q_1 = 1 \text{ 和 } p_2^T q_2 = 1$$

的左特征向量, 其中  $p_{11}$  和  $p_{21}$  为  $n$  维向量,  $p_{12}$  和  $p_{22}$  为  $m$  维向量, 则

$$p_{11}^T \mathbf{1}_n = 1, \quad p_{22}^T \mathbf{1}_m = 1.$$

设  $w = [w_1^T, w_2^T, w_3^T]^T$  为  $\Phi$  对应于零特征值的右特征向量, 则

$$\begin{bmatrix} O_{(n+m) \times (n+m)} & I_{n+m} & O_{(n+m) \times (n+m)} \\ O_{(n+m) \times (n+m)} & O_{(n+m) \times (n+m)} & I_{n+m} \\ -\alpha L & -\beta L & -\gamma L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n+m} \\ \mathbf{0}_{n+m} \\ \mathbf{0}_{n+m} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

由(7)可得

$$w_2 = w_3 = \mathbf{0}_{n+m} \text{ 和 } -\alpha L w_1 - \beta L w_2 - \gamma L w_3 = \mathbf{0}_{n+m}.$$

因此,  $w_1$  是  $L$  对应于零特征值的右特征向量。结合引理 2.1 可知,

$$w_{1,r} = [q_1^T, \mathbf{0}_{n+m}^T, \mathbf{0}_{n+m}^T]^T \text{ 和 } w_{4,r} = [q_2^T, \mathbf{0}_{n+m}^T, \mathbf{0}_{n+m}^T]^T$$

是  $\Phi$  对应于零特征值的两个线性无关的右特征向量。进而,  $\Phi$  的零特征值的几何重数等于 2。类似地可以证明,

$$w_{3,l} = [\mathbf{0}_{n+m}^T, \mathbf{0}_{n+m}^T, p_1^T]^T \text{ 和 } w_{6,l} = [\mathbf{0}_{n+m}^T, \mathbf{0}_{n+m}^T, p_2^T]^T$$

是  $\Phi$  的对应于零特征值的两个线性无关的左特征向量。

注意到

$$\Phi w_{2,r} = w_{1,r}, \quad \Phi w_{3,r} = w_{2,r},$$

其中

$$w_{2,r} = [\mathbf{0}_{n+m}^T, q_1^T, \mathbf{0}_{n+m}^T]^T, \quad w_{3,r} = [\mathbf{0}_{n+m}^T, \mathbf{0}_{n+m}^T, q_1^T]^T.$$

于是,  $w_{2,r}$  和  $w_{3,r}$  是  $\Phi$  对应于零特征值的广义右特征向量。类似地可以证明,

$$w_{5,r} = [\mathbf{0}_{n+m}^T, q_2^T, \mathbf{0}_{n+m}^T]^T \text{ 和 } w_{6,r} = [\mathbf{0}_{n+m}^T, \mathbf{0}_{n+m}^T, q_2^T]^T$$

也是  $\Phi$  对应于零特征值的广义右特征向量, 而

$$w_{1,l} = [p_1^T, \mathbf{0}_{n+m}^T, \mathbf{0}_{n+m}^T]^T, \quad w_{2,l} = [\mathbf{0}_{n+m}^T, p_1^T, \mathbf{0}_{n+m}^T]^T, \quad w_{4,l} = [p_2^T, \mathbf{0}_{n+m}^T, \mathbf{0}_{n+m}^T]^T \text{ 和 } w_{5,l} = [\mathbf{0}_{n+m}^T, p_2^T, \mathbf{0}_{n+m}^T]^T$$

是  $\Phi$  对应于零特征值的广义左特征向量。

设  $J$  为  $\Phi$  的若当标准形, 则存在非退化矩阵  $P$  使得

$$\Phi = PJP^{-1} = [w_{1,r}, w_{2,r}, w_{3,r}, w_{4,r}, w_{5,r}, w_{6,r}, \dots] \begin{pmatrix} J_1 & O_{6 \times 3(n+m-2)} \\ O_{3(n+m-2) \times 6} & J_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,l}^T \\ w_{2,l}^T \\ w_{3,l}^T \\ w_{4,l}^T \\ w_{5,l}^T \\ w_{6,l}^T \\ \vdots \end{bmatrix},$$

其中

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是  $\Phi$  的零特征值对应的若当块, 而  $J_2$  是  $\Phi$  的非零特征值对应的若当块。故而

$$e^{\Phi t} = P e^{Jt} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & O_{6 \times 3(n+m-2)} \\ O_{3(n+m-2) \times 6} & e^{J_2 t} \end{pmatrix} P^{-1},$$

其中

$$e^{J_1 t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于  $\Phi$  的非零特征值都具有负实部, 因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{J_2 t} = O_{3(n+m-2) \times 3(n+m-2)}.$$

经简单的计算可知,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| e^{\Phi t} - w_{1,r} w_{1,l}^T - (t w_{1,r} + w_{2,r}) w_{2,l}^T - \left( \frac{1}{2} t^2 w_{1,r} + t w_{2,r} + w_{3,r} \right) w_{3,l}^T \right. \\ \left. - w_{4,r} w_{4,l}^T - (t w_{4,r} + w_{5,r}) w_{5,l}^T - \left( \frac{1}{2} t^2 w_{4,r} + t w_{5,r} + w_{6,r} \right) w_{6,l}^T \right\| = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

注意到

$$\begin{aligned} w_{1,r} w_{1,l}^T + (t w_{1,r} + w_{2,r}) w_{2,l}^T + \left( \frac{1}{2} t^2 w_{1,r} + t w_{2,r} + w_{3,r} \right) w_{3,l}^T + w_{4,r} w_{4,l}^T + (t w_{4,r} + w_{5,r}) w_{5,l}^T \\ + \left( \frac{1}{2} t^2 w_{4,r} + t w_{5,r} + w_{6,r} \right) w_{6,l}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{1} p_{11}^T & \mathbf{1} p_{12}^T & t \mathbf{1} p_{11}^T & t \mathbf{1} p_{12}^T & \frac{1}{2} t^2 \mathbf{1} p_{11}^T & \frac{1}{2} t^2 \mathbf{1} p_{12}^T \\ \mathbf{1} p_{21}^T & \mathbf{1} p_{22}^T & t \mathbf{1} p_{21}^T & t \mathbf{1} p_{22}^T & \frac{1}{2} t^2 \mathbf{1} p_{21}^T & \frac{1}{2} t^2 \mathbf{1} p_{22}^T \\ O & O & \mathbf{1} p_{11}^T & \mathbf{1} p_{12}^T & t \mathbf{1} p_{11}^T & t \mathbf{1} p_{12}^T \\ O & O & \mathbf{1} p_{21}^T & \mathbf{1} p_{22}^T & t \mathbf{1} p_{21}^T & t \mathbf{1} p_{22}^T \\ O & O & O & O & \mathbf{1} p_{11}^T & \mathbf{1} p_{12}^T \\ O & O & O & O & \mathbf{1} p_{21}^T & \mathbf{1} p_{22}^T \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \zeta(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = e^{\Phi t} \begin{bmatrix} \xi(0) \\ \zeta(0) \\ \eta(0) \end{bmatrix},$$

由(8)可知, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 有

$$\begin{aligned} & \left\| \xi^1(t) - \mathbf{1}p_{11}^T \xi^1(0) - \mathbf{1}p_{12}^T \xi^2(0) - t\mathbf{1}p_{11}^T \zeta^1(0) - t\mathbf{1}p_{12}^T \zeta^2(0) - \frac{1}{2}t^2 \mathbf{1}p_{11}^T \eta^1(0) - \frac{1}{2}t^2 \mathbf{1}p_{12}^T \eta^2(0) \right\| \rightarrow 0, \\ & \left\| \xi^2(t) - \mathbf{1}p_{21}^T \xi^1(0) - \mathbf{1}p_{22}^T \xi^2(0) - t\mathbf{1}p_{21}^T \zeta^1(0) - t\mathbf{1}p_{22}^T \zeta^2(0) - \frac{1}{2}t^2 \mathbf{1}p_{21}^T \eta^1(0) - \frac{1}{2}t^2 \mathbf{1}p_{22}^T \eta^2(0) \right\| \rightarrow 0, \\ & \left\| \zeta^1(t) - \mathbf{1}p_{11}^T \zeta^1(0) - \mathbf{1}p_{12}^T \zeta^2(0) - t\mathbf{1}p_{11}^T \eta^1(0) - t\mathbf{1}p_{12}^T \eta^2(0) \right\| \rightarrow 0, \\ & \left\| \zeta^2(t) - \mathbf{1}p_{21}^T \zeta^1(0) - \mathbf{1}p_{22}^T \zeta^2(0) - t\mathbf{1}p_{21}^T \eta^1(0) - t\mathbf{1}p_{22}^T \eta^2(0) \right\| \rightarrow 0, \\ & \left\| \eta^1(t) - \mathbf{1}p_{11}^T \eta^1(0) - \mathbf{1}p_{12}^T \eta^2(0) \right\| \rightarrow 0, \\ & \left\| \eta^2(t) - \mathbf{1}p_{21}^T \eta^1(0) - \mathbf{1}p_{22}^T \eta^2(0) \right\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

充分性得证。

**(必要性)** 根据引理 2.1,  $L$  的零特征值的代数重数至少为 2。结合(4),  $\Phi$  的零特征值的代数重数至少为 6。设

$$J = \begin{pmatrix} \bar{J}_1 & O \\ O & \bar{J}_2 \end{pmatrix}$$

是  $\Phi$  的若当标准形, 则

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\bar{J}_1 t} & O \\ O & e^{\bar{J}_2 t} \end{pmatrix},$$

其中  $\bar{J}_1$  是  $\Phi$  的零特征值对应的阶数至少为 6 的若当块, 而  $\bar{J}_2$  是  $\Phi$  的非零特征值对应的若当块。当  $\Phi$  存在一个具有非负实部的非零特征值时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\bar{J}_2 t} \neq O. \tag{9}$$

若  $\Phi$  的零特征值的代数重数大于 6 或存在一个具有非负实部的非零特征值, 则  $e^{\bar{J}_1 t}$  的秩大于 6 或(9)成立。从而, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e^{Jt}$  的秩大于 6。进而, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e^{\Phi t}$  的秩也大于 6。另一方面, 若在一致性算法(2)作用下, 多智能体系统(1)可渐近实现分组一致性, 则当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e^{\Phi t}$  的秩等于 6。由此推出矛盾, 必要性得证。

**定理 3.2:** 在一致性算法(2)的作用下, 当且仅当  $L$  有一个代数重数为 2 的零特征值且其非零特征值都具有正实部, 同时控制参数满足下列条件:

$$\begin{cases} \beta\gamma^2 \operatorname{Re} \mu_i |\mu_i|^2 > \alpha\gamma \operatorname{Re}^2 \mu_i + \beta^2 \operatorname{Im}^2 \mu_i, \\ \left( \beta\gamma^2 \operatorname{Re} \mu_i |\mu_i|^2 - \alpha\gamma \operatorname{Re}^2 \mu_i - \beta^2 \operatorname{Im}^2 \mu_i \right) \left( \beta\gamma |\mu_i|^2 - \alpha \operatorname{Re} \mu_i \right) > \alpha\beta^2 \operatorname{Re} \mu_i \operatorname{Im}^2 \mu_i, \end{cases} \tag{10}$$

时, 多智能体系统(1)可渐近实现分组一致性, 其中  $\mu_i (i=3, 4, \dots, n+m)$  是  $L$  的非零特征值。

**证明:** 由(4)可知,  $\Phi$  的零特征值的代数重数为 6, 当且仅当  $L$  的零特征值的代数重数等于 2。进一步,  $\Phi$  的非零特征值必是方程

$$\lambda^3 + (\gamma\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha)\mu_i = 0 \tag{11}$$

的根, 其中  $\mu_i (i=3,4,\dots,n+m)$  是  $L$  的非零特征值。根据引理 2.2, 经简单计算可知, 方程(11)的根全部都具有负实部的充要条件是(10)成立。根据定理 3.1, 本定理得证。

### 4. 数值模拟

本节利用数值模拟验证理论结果的有效性。考虑由 5 个智能体组成的三阶多智能体系统, 各智能体之间的有向通讯拓扑如图 1 所示, 其中智能体 1、2 和 3 属于一个子系统, 而智能体 4 和 5 属于另一个子系统。系统通讯拓扑的拉普拉斯矩阵为

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

经计算可得  $L$  的特征值为  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 、 $\mu_3 = 2$ 、 $\mu_4 = 1.5 + 0.866j$  和  $\mu_5 = 1.5 - 0.866j$ 。选取满足定理

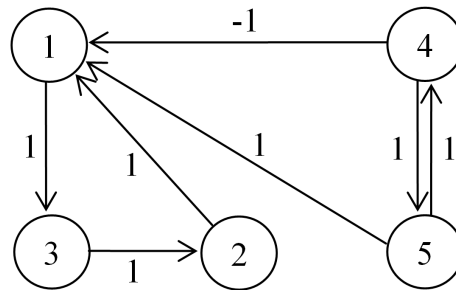


Figure 1. The digraph of communication with five agents  
图 1. 智能体 1~5 间的信息交流图

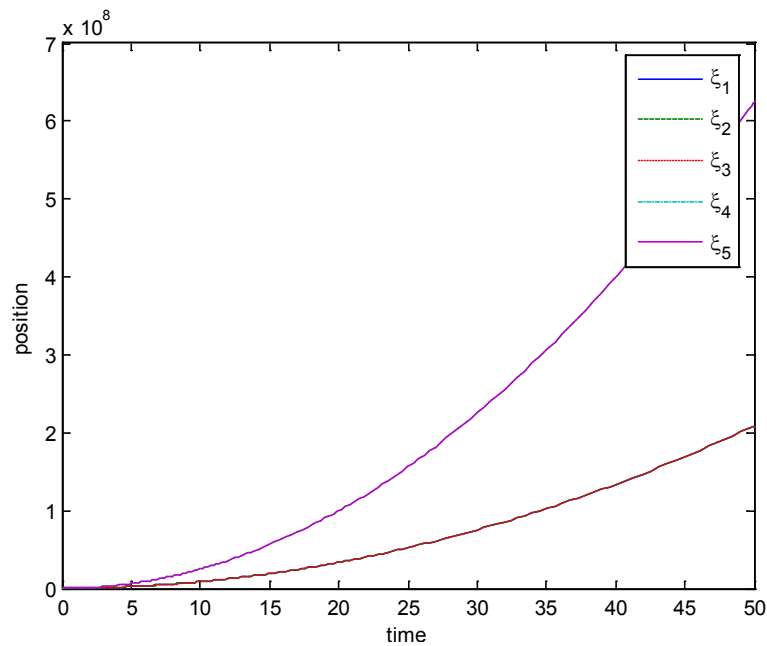


Figure 2. The state trajectories of position  
图 2. 位置的状态轨迹



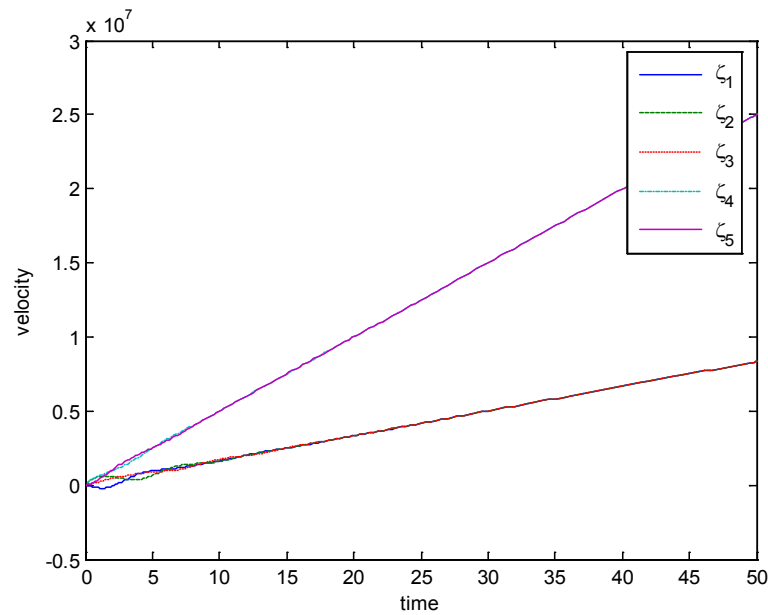


Figure 3. The state trajectories of velocity  
图 3. 速度的状态轨迹

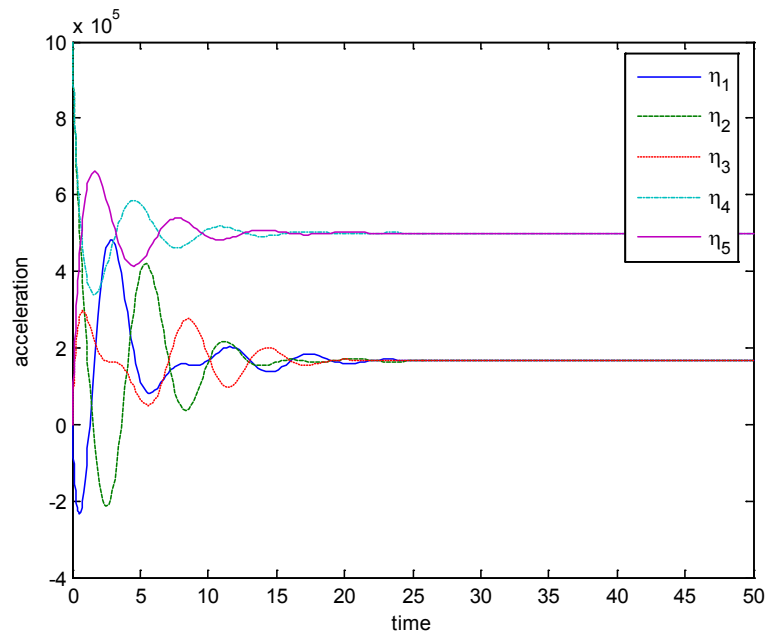


Figure 4. The state trajectories of acceleration  
图 4. 加速度的状态轨迹

3.2 条件的控制参数  $\alpha = 1$ 、 $\beta = 1$  和  $\gamma = 1.2$ , 在一致性算法(2)的作用下, 当初始条件为  $\xi(0) = [10^5, 2, 3, 4, 5]^T$ 、 $\zeta(0) = [10^5, 7, 8, 9, 10]^T$  和  $\eta(0) = [11, 10^5, 13, 14, 15]^T$  时, 智能体的位置、速度和加速度的状态轨迹模拟结果如图 2~图 4 所示。由图 2 可知,  $\xi_1$ 、 $\xi_2$  和  $\xi_3$  渐进趋于同一个时变状态, 而  $\xi_4$  和  $\xi_5$  渐进趋于另一个时变状态。由图 3 可知,  $\zeta_1$ 、 $\zeta_2$  和  $\zeta_3$  渐进趋于同一个时变状态, 而  $\zeta_4$  和  $\zeta_5$  渐进趋于另一个时变状态。由图 4 可知,  $\eta_1$ 、 $\eta_2$  和  $\eta_3$  渐进趋于同一个常值状态, 而  $\eta_4$  和  $\eta_5$  渐进趋于另一个常值状态。这些结果与定理 3.2 的结论是一致的。

## 基金项目

本文得到国家自然科学基金项目(11271110)和河南省教育厅科技攻关项目(15A120009)的支持。

## 参考文献

- [1] Jababaie, A., Lin, J. and Morse, A.S. (2003) Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agent Using Nearest Neighbor Rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **48**, 988-1001. <https://doi.org/10.1109/TAC.2003.812781>
- [2] Olfati-Saber, R. and Murray, R.M. (2004) Consensus Problems in Network of Agents with Switching Topology and Time-Delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49**, 1520-1533. <https://doi.org/10.1109/TAC.2004.834113>
- [3] Ren, W. and Beard R.W. (2005) Consensus Seeking in Multi-Agent Systems under Dynamically Changing Interaction Topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**, 655-661. <https://doi.org/10.1109/TAC.2005.846556>
- [4] Ren, W. (2008) On Consensus Algorithms for Double-Integrator Dynamics. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **53**, 1503-1509. <https://doi.org/10.1109/TAC.2008.924961>
- [5] Yu, W.W., Chen, G.R. and Cao, M. (2010) Some Necessary and Sufficient Conditions for Second Order Consensus in Multi-Agent Dynamical Systems. *Automatica*, **46**, 1089-1095. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.03.006>
- [6] Ren, W., Moore, K. and Chen, Y.Q. (2007) High-Order and Model Reference Consensus Algorithms in Cooperative Control of Multi-Vehicle Systems. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, **129**, 678-688. <https://doi.org/10.1115/1.2764508>
- [7] Miao, G., Xu, S. and Zou, Y. (2013) Consentability for High-Order Multi-Agent Systems under Noise Environment and Time Delays. *Journal of the Franklin Institute*, **350**, 244-257. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2012.10.015>
- [8] Cao, Y.F. and Sun, Y.G. (2016) Consensus of Discrete-Time Third-Order Multi-Agent Systems in Directed Network. *Neurocomputing*, **177**, 394-400. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.11.039>
- [9] Yu, J.Y. and Wang, L. (2009) Group Consensus of Multi-Agent Systems with Undirected Communication Graphs. *7th Asian Control Conference*, **43**, 105-110.
- [10] Xie, D.M., Liu, Q.L., Lv, L.F. and Li, S.Y. (2014) Necessary and Sufficient Condition for the Group Consensus of Multi-Agent Systems. *Applied Mathematics and Computation*, **243**, 870-878. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.06.069>
- [11] Feng, Y.Z., Xu, S.Y. and Zhang, B.Y. (2014) Group Consensus Control for Double Integrator Dynamic Multi-Agent Systems with Fixed Communication Topology. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **24**, 532-547. <https://doi.org/10.1002/rnc.2904>
- [12] Zhao, H.Y. and Ju, H.P. (2014) Group Consensus of Discrete-Time Multi-Agent Systems with Fixed and Stochastic Switching Topologies. *Nonlinear Dynamics*, **77**, 1297-1307. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1379-0>
- [13] 范弘毅. 复常系数线性系统稳定性的新判据[J]. 沈阳建筑工程学院学报, 1997(13): 96-100.

### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2160-7583, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [pm@hanspub.org](mailto:pm@hanspub.org)