Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 431-435
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84057

Epigroups Which Are Locally in the Classes with Kernels Being Bands

Jingguo Liu*, Kai Gao

School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: *liujingguo@lyu.edu.cn

Received: Jun. 28th, 2018; accepted: Jul. 12th, 2018; published: Jul. 19th, 2018

Abstract

A semigroup is called an epigroup if some power of each element lies in a subgroup. In this paper we give some descriptions of epigroups which are locally in the classes of epigroups with kernels being bands in terms of identities, in terms of forbidden epidivisors. For special cases, epigroups which are locally in the classes of epigroups with kernels being left regular bands and semilattices are also characterized.

Keywords

Epigroup, Epidivisor, Identity

局部半群的核为带的完全π-正则半群

刘靖国*，高 凯

临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
Email: *liujingguo@lyu.edu.cn

收稿日期：2018年6月28日；录用日期：2018年7月12日；发布日期：2018年7月19日

摘 要

完全π-正则半群是其所含任意元的某个方幂属于其最大子群的半群。论文利用禁止因子和等式等方法刻画局部半群的核为带的完全π-正则半群。并讨论局部半群的核为左正则带和半格的完全π-正则半群等特殊情形。

*通讯作者。

文章引用: 刘靖国, 高凯. 局部半群的核为带的完全 π-正则半群[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 431-435.
DOI: 10.12677/pm.2018.84057

关键词

完全π-正则半群，因子，等式

1. 引言与预备知识

若一个半群中任意元的某个方幂是属于该半群的最大子群中的群元，则该型半群称为完全π-正则半群。对所给完全π-正则半群 S 中的任意元 x，群元 x^n (n 为正整数)属于的最大子群记作 G_x，其单位元记作 x^ω，易知 $xx^\omega = x^\omega x \in G_x$。若记 $x^\omega x$ 在 G_x 中的群逆元为 $\bar{x}$，则映射 $x \to \bar{x}$ 称作是 S 上的伪逆运算。这样完全π-正则半群可以看作是拥有一元伪逆运算和二元半群乘法运算的一元半群，此类半群记为 $\mathbf{E}$。完全π-正则半群的某一子类，简称完全π-正则半群类。如完全正则半群就是完全π-正则半群类，该类半群的任意元都为群元。

令 S 为完全π-正则半群。对 $e \in S$，若 $e^2 = e$，称 e 是 S 中的幂等元。易证明 eSe 为 S 的含幺完全π-正则子半群，称为 S 的局部半群。对子集 $X \subseteq S$，$\langle X \rangle$ 表示由 X 生成的 S 的完全π-正则子半群。S 的幂等元集合记为 E_S，其生成(完全π-正则)子半群 $\langle E_S \rangle$ 称为 S 的核。注意 $\langle X \rangle$ 的一元半群项带有乘法和取伪逆两种运算。因而在用等式来刻画完全π-正则半群类时，等式中运算除了半群乘法运算，也常带有取伪逆诱导的运算 $x \to x^\omega$ (这儿 $x^\omega = x\bar{x}$)。利用等式来刻画完全π-正则半群类是常用研究方法。另外，在研究完全π-正则半群的子半群的同态象(称为因子)时，可以通过排除一些具体的熟知半群来刻画该类半群，而这些排除的半群可以用一些结构和性质都很清晰的特殊完全π-正则半群来表示，这样的半群就称作该类半群的禁止因子。利用等式和禁止因子刻画完全π-正则半群类的研究在文献[1] [2] (或[3])中都有论述。

对于完全π-正则半群类 $\mathbf{V}$，令

$$C(\mathbf{V}) = \{S \in \mathbf{E} \mid \langle E_S \rangle \in \mathbf{V}\}$$
$$L(\mathbf{V}) = \{S \in \mathbf{E} \mid eSe \in \mathbf{V}, \forall e \in E_S\}$$

可见 $C(\mathbf{V})$ 恰由核属于 $\mathbf{V}$ 的完全π-正则半群组成，而 $L(\mathbf{V})$ 恰由局部半群属于 $\mathbf{V}$ 的完全π-正则半群组成。这样就可以利用这两种运算来构造一些新的完全π-正则半群类。这也是研究完全π-正则半群类的一种常用方法。如文献[4]研究了局部半群为 E-析取的完全π-正则半群，[5]研究了局部半群为完全正则半群的完全π-正则半群。而文献[6]则考察了核为完全正则半群的完全π-正则半群。文献[7]则涉及两种运算的复合，给出了局部半群的核为完全正则半群的完全π-正则半群的刻画。该论文是对文献[7]相关结论的进一步研究，主要是对([7]，命题 3.1，3.2)两个命题的进一步推广，讨论局部半群的核为带、左正则带和半格的完全π-正则半群类。

论文所用记号和术语详见参考文献[8] [9] [10]，需要的预备知识详见文献[7]。关于完全π-正则半群的相关理论参考文献[1] [2] (也见[3])。

若半群 S 不含幺元，则为 S 添加新符号 1，得到的幺半群记为 S^1；若半群 S 含幺元，定义 $S^1 = S$。关系 $\mathcal{J}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{D}$ 和 $\mathcal{H}$ 表示半群 S 上的 Green 关系。在完全π-正则半群中，等式 $\mathcal{J} = \mathcal{D}$ 成立。

半群 L_2, R_2 分别表示二元左零半群和二元右零半群，其他特殊半群列举如下：

$$V=\left\langle e,f\mid e^2=e,f^2=f,fe=0\right\rangle;$$

$$M_n=\left\langle e,f\mid e^2=(efe)^n=e,f^2=(fef)^n=f\right\rangle,$$

其中半群 M_n 同构于 Rees 矩阵半群 $\mathcal{M}\left[2,C_{1,n},2;\begin{pmatrix}\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & \gamma\end{pmatrix}\right]$，$C_{1,n}$ 为循环群，ε 为其单位元，γ 为该循环群的生成元。

2. 主要结论

若所给半群中任一元都是幂等元，这样的半群称作带，记作 **B**。乘积可交换的带称作半格，记作 **S**。下述结论给出了利用等式和禁止因子来刻画局部半群的核为带的完全 π-正则半群。

定理 2.1 完全 π-正则半群 S 上的下列条件等价：

(1) $S\in LC(\mathbf{B})$；

(2) S 满足等式 $\left((exe)^{\omega}(eye)^{\omega}\right)^{\omega}=(exe)^{\omega}(eye)^{\omega}$；

(3) S 不含因子 V^1 和 M_p^1，p 为任意素数。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。若(1)成立，则对幂等元 $e\in E_S$，局部半群 eSe 的核为带，从而对任意 $x,y\in S$，$(exe)^{\omega}(eye)^{\omega}$ 为幂等元，即 $\left((exe)^{\omega}(eye)^{\omega}\right)^{\omega}=(exe)^{\omega}(eye)^{\omega}$。这样证得(2)成立。

(2) $\Rightarrow$ (3)。对幂等元 $e\in S$，考察局部半群 eSe。若(2)成立，则 $\langle E_{eSe}\rangle=E_{eSe}$ 是带，从而 $\langle E_{eSe}\rangle$ 为完全正则半群，即 $S\in LC(\mathbf{CR})$。由([7]，定理 2.2)，S 不含因子 V^1。若 S 含因子 M_p^1，其中 $p\ge 2$ 为某一素数。此时对 $e,f\in M_p^1\setminus\{1\}$，必有 $(ef)^2\ne ef$。另一方面，因为 M_p^1 是 S 的因子，则存在 S 的完全 π-正则子半群 T 和满同态 $\varphi:T\to M_p^1$。由([8]，推论 1.4.9)，有 $1_T,e',f'\in E_T$ 使得 $e'\varphi=e,f'\varphi=f,1_T\varphi=1$。作为 S 的完全 π-正则子半群，局部半群 1_TT1_T 亦满足(2)中等式，这样

$$ef=1e1f1=(1_Te'1_T)^{\omega}\varphi(1_Tf'1_T)^{\omega}\varphi=\left((1_Te'1_T)^{\omega}(1_Tf'1_T)^{\omega}\right)\varphi=\left((1_Te'1_T)^{\omega}(1_Tf'1_T)^{\omega}\right)^{\omega}\varphi=(ef)^{\omega},$$

这说明 ef 为幂等元，此与前述事实 $(ef)^2\ne ef$ 矛盾。由此证得 S 不含因子 M_p^1，p 为任意素数。

(3) $\Rightarrow$ (1)。若(3)成立，则由([7]，定理 2.2)，首先有 $S\in LC(\mathbf{CR})$，即对任意 $e\in E_S$，$\langle E_{eSe}\rangle$ 为完全正则半群。另一方面，S 不含因子 M_p^1 (p 为任意素数)，类似于([2]，引理 9)，S 不含因子 M_n^1 ($n>1$ 为任意正整数或为无穷大)。从而 $\langle E_{eSe}\rangle$ 亦不含因子 M_n，否则 M_n^1 必定为 $\langle E_{eSe}\rangle$ 的因子(注意到 $\langle E_{eSe}\rangle$ 含幺元 e)。由([10]，推论 III.5.5) $\langle E_{eSe}\rangle$ 的幂等元集合为子半群，从而 $\langle E_{eSe}\rangle=E_{eSe}$，即 $S\in LC(\mathbf{B})$。□

下述结论是对([7]，命题 3.2)的推广，给出了局部半群的核为半格的完全 π-正则半群类的刻画。

定理 2.2 完全 π-正则半群 S 上的下列条件等价：

(1) $S\in LC(\mathbf{S})$；

(2) S 满足等式 $(exe)^{\omega}(eye)^{\omega}=(eye)^{\omega}(exe)^{\omega}$；

(3) S 不含因子 V^1,L_2^1,R_2^1。

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2)。对任意 $x,y\in S$，以及 $e\in E_S$，

$$\begin{aligned}S\in LC(\mathbf{S})&\Leftrightarrow eSe\in C(\mathbf{S})\\&\Leftrightarrow \langle E_{eSe}\rangle\in\mathbf{S}\Leftrightarrow E_{eSe}\in\mathbf{S}\\&\Leftrightarrow (exe)^{\omega}(eye)^{\omega}=(eye)^{\omega}(exe)^{\omega}\end{aligned}$$

(2) $\Leftrightarrow$ (3)。容易验证半群 V^1,L_2^1,R_2^1 都不满足(2)中等式，从而蕴含“(2) $\Rightarrow$ (3)”成立。

反正，若(3)成立，因为 S 不含禁止因子 V^1，则由([7]，定理 2.2)，$S \in LC(\mathbf{CR})$，即对任意幂等元 $e \in S$，$\langle E_{eSe} \rangle \in \mathbf{CR}$。余下证明采用反证法。假若 S 不满足(2)中等式。则存在 $e \in E_S, a, b \in S$，使得

$$(eae)^\omega (ebe)^\omega \neq (ebe)^\omega (eae)^\omega . \tag{1}$$

既然如前所述 $(eae)^\omega (ebe)^\omega$，$(ebe)^\omega (eae)^\omega \in \langle E_{eSe} \rangle \in \mathbf{CR}$，由([1]，引理 5)，可得

$$(eae)^\omega (ebe)^\omega \,\mathcal{H}\left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega \mathcal{D}\left((ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega \mathcal{H}(ebe)^\omega (eae)^\omega .$$

此时，必有 $\left(\left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega, \left((ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega\right) \notin \mathcal{H}$。否则，若 $\left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega \mathcal{H}\left((ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega$，则由([5]，引理 2.4)，

$$\begin{aligned}
(eae)^\omega (ebe)^\omega &= \left((ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega \cdot (eae)^\omega (ebe)^\omega \\
&= \left((ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega (ebe)^\omega = (ebe)^\omega \left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega \\
&= (ebe)^\omega (eae)^\omega \cdot \left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega \\
&= (ebe)^\omega (eae)^\omega
\end{aligned}$$

此结果与(1)矛盾。从而

$$\left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega \neq \left((ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega .$$

现在可以断言 $e, \left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega$ 和 $\left((ebe)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega$ 各不相同。既然 $\left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega \mathcal{D}\left((ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega$，我们考虑如下可能情形：

(a) $\left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega \mathcal{L}\left((ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega$：此种情形下，显然有 $\left\langle e, \left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega, \left((ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega \right\rangle \cong L_2^1$，此与(3)中条件 S 无因子 L_2^1 相矛盾；

(b) $\left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega \mathcal{R}\left((ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega$：此种情形下，显有 $\left\langle e, \left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega, \left((eae)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega \right\rangle \cong R_2^1$，此与(3)中条件 S 无因子 R_2^1 相矛盾；

(c) $\left(\left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega, \left((ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega\right) \notin \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$：此种情形下，易见 $\left((eae)^\omega (ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega \neq \left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega$。否则，$\left(\left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega, \left((ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega\right) \in \mathcal{L}$。现在

$$\left\langle e, \left((eae)^\omega (ebe)^\omega (eae)^\omega\right)^\omega, \left((eae)^\omega (ebe)^\omega\right)^\omega \right\rangle \cong R_2^1,$$

此与(3)中条件 S 无因子 R_2^1 相矛盾。□

带 S 称作左(右)正则带，若其满足等式 $xy = xyx$ （$xy = yxy$），该类半群记作 **LRB** (**RRB**)。在论文结束时我们给出关于集合包含序下，介于 $LC(\mathbf{B})$ 与 $LC(\mathbf{S})$ 的一类完全 π-正则半群。其证明可以参考定理 2.2 的证明，此处从略。

定理 2.3 完全 π-正则半群 S 上的下列条件等价：

(1) $S \in LC(\mathbf{LRB})$；

(2) S 满足等式 $(exe)^{\omega}(eye)^{\omega}=(exe)^{\omega}(eye)^{\omega}(exe)^{\omega}=\left((exe)^{\omega}(eye)^{\omega}\right)^{\omega}$；

(3) S 不含因子 V^1, R_2^1。

基金项目

第二作者得到临沂大学大学生创新创业训练计划项目资助(项目编号 201710452003)。

参考文献

[1] Shevrin, L.N. (1995) On the Theory of Epigroups, I. *Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics*, **82**, 485-512. https://doi.org/10.1070/SM1995v082n02ABEH003577

[2] Shevrin, L.N. (1995) On the Theory of Epigroups, II. *Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics*, **83**, 133-154. https://doi.org/10.1070/SM1995v083n01ABEH003584

[3] Shevrin, L.N. (2005) Epigroups. In: Kudravtsev, V.B. and Rosenberg, I.G., Eds., *Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra*, Springer, Berlin, 331-380. https://doi.org/10.1007/1-4020-3817-8_12

[4] Liu, J.G. (2018) Locally *E*-Solid Epigroups. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 1-16. https://doi.org/10.1007/s41980-018-0107-9

[5] Liu, J.G., Chen, Q.Q. and Han, C.M. (2016) Locally Completely Regular Epigroups. *Communications in Algebra*, **44**, 4546-4563. https://doi.org/10.1080/00927872.2015.1094485

[6] Liu, J.G. (2015) Epigroups in Which the Idempotent-Generated Subsemigroups Are Completely Regular. *Journal of Mathematical Research with Applications* (*China*), **35**, 529-542.

[7] 高凯, 刘靖国. 关于完全 π-正则半群类的禁止因子的注记[J]. 理论数学, 2017, 7(6): 431-436.

[8] Higgins, P.M. (1992) Techniques of Semigroup Theory. Oxford University Press, Oxford.

[9] Howie, J.M. (1995) Fundamentals of Semigroup Theory. Clarendon, Oxford.

[10] Petrich, M. and Reilly, N.R. (1999) Completely Regular Semigroups. John Wiley & Sons, New York.