Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 350-359
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84047

Explore the Total Number of Topologies on an n-Element Finite Set

Yiying Lin

School of Mathematics and Science, South China Normal University, Guangzhou Guangdong
Email: 1715054465@qq.com, 15626470716@163.com

Received: Jun. 18th, 2018; accepted: Jul. 3rd, 2018; published: Jul. 10th, 2018

Abstract

In view of the topological number of n-element finite set, this paper studies two kinds of transformations: alpha transform and beta transform, and obtains various classifications; considers the closed case of intersection and union operations, and excludes the case that the topology cannot be constructed. Thus, recursion counts for various cases are carried out, and the counting formula of the corresponding situation is obtained.

Keywords

Finite Set, Topology, Recursion, Counting Formula

探究n元有限集上的拓扑总数

林毅颖

华南师范大学数学科学学院，广东 广州
Email: 1715054465@qq.com, 15626470716@163.com

收稿日期：2018年6月18日；录用日期：2018年7月3日；发布日期：2018年7月10日

摘 要

针对n元有限集的拓扑数探究，本文通过研究两种变换：α变换和β变换，得到各种分类的情况；再考虑交并运算封闭的情况，排除掉不能构成拓扑的情况；从而对各种情况进行递推计数，得到相应情况的计数公式。

文章引用：林毅颖. 探究 n 元有限集上的拓扑总数[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 350-359.
DOI: 10.12677/pm.2018.84047

关键词

有限集，拓扑，递推，计数公式

1. 引言及主要结果

拓扑是研究几何图形或空间在连续改变形状后还能保持不变的一些性质的一个学科。有了具体的拓扑定义之后，在二十世纪三十年代便有人提出有限集上的拓扑计数问题，即是探究拓扑数量与元素个数之间的关系表达式。但若采用穷举法求取一个 n 元集合 X_n 的拓扑数，其时间复杂度为 $O\left(2^{2^n}\right)$。故而，从 $(n-1)$元集合的拓扑结构性质来递推 n 元集合的拓扑结构显得事半功倍。

而在近现代对拓扑计数问题的研究成果中，国内有相关的研究：

郭志勇在 1991 和 1992 年发表了[1] [2]，定义了多种特殊的拓扑并进行相关讨论；

何昌和熊明在 1995 年发表了[3]，给出了一个有限集合上的拓扑数估计公式；

张震于 2001 年发表的[4]，主要研究了 n 元有限集上互不同胚拓扑的计数问题；

2006 年，洪彩霞在郭志勇的文章基础上对问题进行深入探讨，并发表了[5]；

岳崇山，张贺和景海斌等人在 2007 年发表的[6]，给出了一个拓扑存在性的必要条件：设 τ 为一 n 元集合上的拓扑，则满足 $2^n-n+2\le|\tau|<2^n$ 的拓扑不存在；

赵婷婷等人在 2013 年和 2014 年发表的[7] [8]，主要讨论了如何计算给定有限集合上的拓扑数的算法；

洪楠坤于 2016 年发表的[9]中，主要研究了 n 元有限集上的拓扑数 $T(n)$ 和 T_0 拓扑个数 $T_0(n)$ 的一些性质，得到 $T(n)=\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}T(i)+B(n)+C(n)$，其中，$C(n)$ 表示所定义的拓扑在 n 元有限集上的拓扑数，$B(n)$ 表示 n 元集合上的 σ-代数的个数。

基于上述相关文献资料的基础，得到本文研究成果：

针对 n 元有限集的拓扑数探究，本文通过研究两种变换：α 变换和 β 变换，得到各种分类的情况：$\{\phi,X_{n-1},X_n\}\cup A_1$、$\{\phi,X_{n-1},X_n\}\cup A_2$、$\{\phi,X_{n-1},X_n\}\cup A_1\cup A_2$、$\{\phi,X_{n-1},X_n,\{x_n\}\}\cup A_2$、$\{\phi,X_{n-1},X_n,\{x_n\}\}\cup A_1\cup A_2$。

再考虑交并运算封闭的情况，排除掉不能构成拓扑的情况有：当 $A_1\ne\{\phi\}$ 时，

$$\{\phi,X_{n-1},X_n\}\cup A_2,$$

$$\{\phi,X_{n-1},X_n,A_1^{\circ},A_2^{\bullet}\},$$

$$\{\phi,X_{n-1},X_n,\{x_n\}\}\cup A_2,$$

$$\{\phi,X_n,X_{n-1},A_1^{\circ},A_2^{\bullet},\{A_1^{\circ}\cup x_n\},\{x_n\}\}$$

均不构成拓扑。

从而对各种情况进行递推计数，得到(表 1)。其中，未知量 Q_1，Q_2 等代替无法直接求取出计数结果的拓扑情况(所有符号定义见表 2)。

Table 1. Counting formulas
表 1. 计数公式

变换 α 的总计数公式	$2^n-4+2P_{n-1}+2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}+Q_1$
变换 β 的总计数公式	$P_{n-1}+3\sum_{k=1}^{n-2}C_{n-1}^kP_k+3\cdot2^{n-1}-5+2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}+Q_2$
总的计数公式	$2^n-4+2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}+Q_1+P_{n-1}+3\sum_{k=1}^{n-2}C_{n-1}^kP_k+3\cdot2^{n-1}$ $-5+2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}+Q_2$

2. 预备知识

本节先给出需要用到的相关定义与符号概念：

定义 2.1 设 X 是一个非空集合，τ 为集合 X 上的一族子集，称 τ 为 X 上的一个拓扑，当且仅当：

1) X 和空集 ϕ 在 τ 中；

2) τ 中任意个元素的并集仍在 τ 中；

3) τ 中有限个元素的交集仍在 τ 中。

于是称，集合 X 和它的拓扑 τ 共同构成了一个拓扑空间，记为(X，τ)；称 τ 中的元素为这个空间的开集[10]。

定义 2.2 称一个拓扑空间(X，τ)满足 T_0 公理，若对于任何不同两个点 $x,y\in X$，存在 τ 中的开集包含其中一个，而不包含另一个，此时称 τ 为 X 上的 T_0 拓扑。本文用 $T_0(n)$ 表示 n 元有限集合上的 T_0 拓扑个数，其中 $n\ge2$。

定义 2.3 设 X 是一个非空集合，Ω 是 X 的一族子集，我们称 Ω 是 X 上的一个 σ 代数，当且仅当：

1) $\phi\in\Omega$；

2) 若 $A\in\Omega$，则 A 的补集 $X\setminus A\in\Omega$；

3) Ω 中任意个元素的并仍属于 X。

定义 2.4 集合 S 上的一个分割是指 S 的一族两两互不相交的非空子集，它们的并是 S，且排除掉分割情况为 $\{\phi,S\}$；n 元有限集合 X_n 的分割数是指 X_n 上所有可能的分割的个数，记为 X_n。即，X_n 表示 n 元有限集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的分割成各个子集 $C_{a_1},C_{a_2},\cdots,C_{a_k}$ （$k\ge2$），使得 $\bigcap_{s=1}^{k}C_{a_s}=\phi$ 且 $\bigcup_{s=1}^{k}C_{a_s}=X_{n-1}$，同时 $C_{a_s}\ne\phi$ 成立的情况种数。

利用贝尔数 B_n (Bell Number)直接求得：$X_n^*=B_n-1=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}B_k=\sum_{k=2}^{n}S(n,k)$，其中，$S(n,k)$ 是第二类 Stirling 数，其值为把基数为 n 的集划分为正好 k 个非空集的方法的数目。

另外，相关符号概念整理如表 2 所示。

3. 变换描述

当 n = 1 时，拓扑数为 1。当 $n\ge2$ 时，记 $n-1$ 元有限集的拓扑个数为 P_{n-1}，设其形为 $\{\phi,X_{n-1}\}\cup A_1$，其中 $X_{n-1}=\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}$，$A_1\subseteq2^{X_{n-1}}$，这里 $\{\phi,X_{n-1}\}\cup A_1$ 包含了 $\{\phi,X_{n-1}\}$ 的情况，但 $X_{n-1}\notin A_1$。

记 $X_n=X_{n-1}\cup\{x_n\}$，设 A_2 是将 A_1 中的所有元素分别加入 x_n 之后所成的集合。

针对 n 元有限集的拓扑数探究，将 $n-1$ 元素拓扑情况递推到 n 元素拓扑情况，考虑并运算封闭，可进行两种变换，把 n 元有限集的拓扑情况分类成 α 变换和 β 变换的结果(表 3)。

Table 2. Implications of correlation symbols
表 2. 相关符号含义

符号	表示含义	相关表达式
A_1	作为 $n-1$ 元集的幂集的子集， 形为 $\{\phi, X_{n-1}\}\cup A_1$ 为 $n-1$ 元有限集的拓扑	$A_1 \subseteq 2^{X_{n-1}}$，其中 $X_{n-1}=\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}$； 这里 $\{\phi, X_{n-1}\}\cup A_1$ 包含了 $\{\phi, X_{n-1}\}$ 的情况， 但 $X_{n-1}\notin A_1$
A_2	将 A_1 中的所有元素分别加入 x_n 之后所成的集合	\
X_n^*	n 元有限集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的分割成各个子集 $C_{a_1},C_{a_2},\cdots,C_{a_k}$ ($k\ge 2$)， 使得 $\bigcap_{s=1}^{k} C_{a_s}=\phi$ 且 $\bigcup_{s=1}^{k} C_{a_s}=X_{n-1}$，同时 $C_{a_s}\ne\phi$ 成立的情况种数	$X_n^*=\sum_{k=2}^{n} S(n,k)$
C_j	A_1 中的元素	\
B_i	A_2 中的元素	$B_i=C_i\cup\{x_n\}$
A_1°	A_1 中只有单个子集的情况	$A_1^{\circ}\subseteq X_{n-1}$， 且 $A_1^{\circ}\ne\phi, A_1^{\circ}\ne X_{n-1}$
$A_1^{\bullet}$	\	$A_1^{\bullet}=X_{n-1}\setminus A_1^{\circ}$
$A_2^{\bullet}$	\	$A_2^{\bullet}=X_n\setminus A_1^{\circ}$
$C_{j_p}^{\oplus}$	将“ A_1 中的元素为：若为有 p 个元素的集合”，归为一类，记为 $C_{j_p}^{\oplus}$	$C_{j_{k+1}}^{\oplus}$ 比 $C_{j_k}^{\oplus}$ 的元素个数多 1
$B_{i_q}^{\oplus}$	将“ A_2 中的元素为：若为有 q 个元素的集合”，归为一类，记为 $B_{i_q}^{\oplus}$	$B_{i_{k+1}}^{\oplus}$ 比 $B_{i_k}^{\oplus}$ 的元素个数多 1

Table 3. Transform classification
表 3. 变换分类

变换 α	α-1 $\{\phi, X_{n-1}, X_n\}\cup A_1$ α-2 $\{\phi, X_{n-1}, X_n\}\cup A_2$ α-3 $\{\phi, X_{n-1}, X_n\}\cup A_1\cup A_2$ α-4 $\{\phi, X_{n-1}, X_n, \{x_n\}\}\cup A_2$ α-5 $\{\phi, X_{n-1}, X_n, \{x_n\}\}\cup A_1\cup A_2$
变换 β	β-1 $\{\phi, X_n\}\cup A_1$ β-2 $\{\phi, X_n\}\cup A_2$ β-3 $\{\phi, X_n, \{x_n\}\}\cup A_2$ β-4 $\{\phi, X_n\}\cup A_1\cup A_2$ β-5 $\{\phi, X_n, \{x_n\}\}\cup A_1\cup A_2$

4. 几个重要引理及性质

通过变换 α 和变换 β 可知，在具体的拓扑情况中有以下几个重要引理：

引理 4.1 考虑交运算封闭，当 $A_1\ne\{\phi\}$ 时，α-2 情况不构成拓扑。

证明： 记 $A_1=\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$， $A_2=\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$，其中 $B_i=C_i\cup\{x_n\}$，则

$$\left(B_i\cap X_{n-1}\right)\notin\{\phi, X_{n-1}, X_n\}\cup A_2$$

故而，当 $A_1 \neq \{\phi\}$ 时，$\{\phi, X_{n-1}, X_n\} \cup A_2$ 的类型不构成拓扑。

引理 4.2 记 A_1 中的元素分别为 $C_1, C_2, \cdots, C_k$；A_2 中的元素分别为 $B_1, B_2, \cdots, B_k$；其中 $B_i = C_i \cup \{x_n\}$，则对于 $\{\phi, X_{n-1}, X_n, C_1, C_2, \cdots, C_k, B_1, B_2, \cdots, B_k\}$，当 $A_1 = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\} \in X_{n-1}^*$ 时，只有 A_2 为单元素时才能构成拓扑，其中 X_{n-1}^* 表示 $n-1$ 元有限集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$ 的分割成各个子集 $C_{a_1}, C_{a_2}, \cdots, C_{a_k}$ $(k \geq 2)$，使得 $\bigcap_{s=1}^{k} C_{a_s} = \phi$ 且 $\bigcup_{s=1}^{k} C_{a_s} = X_{n-1}$，同时 $C_{a_s} \neq \phi$ 成立的情况种数。

证明：若 $k \geq 2$，则当 $A_1 = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\} \in X_{n-1}^*$ 时，有

$$B_a \cap B_b = \{x_n\} \notin \{\phi, X_{n-1}, X_n\} \cup A_1 \cup A_2,\quad \forall a, b \in \{1, 2, \cdots, k\}$$

故而，当 $A_1 = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\} \in X_{n-1}^*$ 时，只有 A_2 为单元素时才能构成拓扑。

引理 4.3 A_1 中只有单个子集设为 A_1°，$A_1^\circ \subseteq X_{n-1}$，且 $A_1^\circ \neq \phi$，$A_1^\circ \neq \phi$；

记 $A_2^\bullet = X_n \setminus A_1^\circ$，比如当 $n = 3$ 时，$A_1^\circ = \{x_1\}$，那么 $A_2^\bullet = \{x_2, x_3\}$；

此时，$\{\phi, X_{n-1}, X_n, A_1^\circ, A_2^\bullet\}$ 的类型不构成拓扑。

证明：因 $A_1^\circ \neq \phi$，$A_1^\circ \neq X_{n-1}$；$A_2^\bullet = X_n \setminus A_1^\circ$，所以有 $(A_2^\bullet \cap X_{n-1}) \notin \{\phi, X_{n-1}, X_n, A_1^\circ, A_2^\bullet\}$，故而此时，$\{\phi, X_{n-1}, X_n, A_1^\circ, A_2^\bullet\}$ 的类型不构成拓扑。

引理 4.4 形如 $\{\phi, X_{n-1}, X_n, \{x_n\}\} \cup A_2$ 的类型，当 $A_1 \neq \{\phi\}$ 时，不构成拓扑情况。

证明：记 $A_1 = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$，$A_2 = \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$，其中 $B_i = C_i \cup \{x_n\}$，则

$$(B_i \cap X_{n-1}) \notin \{\phi, X_{n-1}, X_n, \{x_n\}\} \cup A_2$$

故而，当 $A_1 \neq \{\phi\}$ 时，$\{\phi, X_{n-1}, X_n, \{x_n\}\} \cup A_2$ 的类型不构成拓扑。

引理 4.5 形如 $\{\phi, X_n, X_{n-1}, A_1^\circ, A_2^\bullet, \{A_1^\circ \cup x_n\}, \{x_n\}\}$ 的类型，当 $A_1 \neq \{\phi\}$ 时，不构成拓扑情况；其中，$A_1^\circ \neq X_{n-1}$ 且 $A_1^\circ \neq \phi$，A_1° 为 X_{n-1} 的单个子集，而 $A_2^\bullet = X_n \setminus A_1^\circ$。

证明：因 $A_1^\circ \neq X_{n-1}$ 且 $A_1^\circ \neq \phi$，A_1° 为 X_{n-1} 的单个子集，而 $A_2^\bullet = X_n \setminus A_1^\circ$，则

$$(A_2^\bullet \cap X_{n-1}) \notin \{\phi, X_{n-1}, X_n, A_1^\circ, A_2^\bullet, \{A_1^\circ \cup x_n\}, \{x_n\}\}$$

故而，$\{\phi, X_n, X_{n-1}, A_1^\circ, A_2^\bullet, \{A_1^\circ \cup x_n\}, \{x_n\}\}$ 的类型不构成拓扑。

引理 4.6 考虑交运算封闭，当 $A_1 \neq \{\phi\}$ 时，(β-2)情况只能是 $k = 1$，总共有 $(2^{n-1} - 2)$ 种。

证明：记 $A_1 = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\} \in X_{n-1}^*$，$A_2 = \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$，其中 $B_i = C_i \cup \{x_n\}$，X_{n-1}^* 同上述，若 $k \geq 2$，则 $B_a \cap B_b = \{x_n\} \notin \{\phi, X_n\} \cup A_2$，$\forall a, b \in \{1, 2, \cdots, k\}$。

故而，当 $A_1 \neq \{\phi\}$ 时，(β-2)的类型只能是 $k = 1$，总共有 $(2^{n-1} - 2)$ 种。

在具体情况中探究拓扑个数(比如以下两种情况)，也得到一些相关结论：

情况一：将 A_1 中的元素分类为 $C_{j_1}^\oplus, C_{j_2}^\oplus, \cdots, C_{j_p}^\oplus$；$A_2$ 中的元素分类为 $B_{i_1}^\oplus, B_{i_2}^\oplus, \cdots, B_{i_q}^\oplus$；其中 $B_i = C_i \cup \{x_n\}$，且 $p \neq q$，同时满足 $C_{j_1}^\oplus \subseteq C_{j_2}^\oplus \subseteq \cdots \subseteq C_{j_p}^\oplus$，$B_{i_1}^\oplus \subseteq B_{i_2}^\oplus \subseteq \cdots \subseteq B_{i_q}^\oplus$；而且在这里假定 $C_{j_{k+1}}^\oplus$ 比 $C_{j_k}^\oplus$ 的元素个数多 1，则也有 $B_{i_{k+1}}^\oplus$ 比 $B_{i_k}^\oplus$ 的元素个数多 1。

引理 4.7 当选定好了 $\{B_{i_1}^\oplus, B_{i_2}^\oplus, \cdots, B_{i_q}^\oplus\}$ $(1 < 2 < \cdots < q)$时，有 $C_{i_1}^\oplus \in \{C_{j_1}^\oplus, C_{j_2}^\oplus, \cdots, C_{j_p}^\oplus\}$；同理，当选定好了 $\{C_{j_1}^\oplus, C_{j_2}^\oplus, \cdots, C_{j_p}^\oplus\}$ $(1 < 2 < \cdots < p)$时，有 $B_{j_p}^\oplus \in \{B_{i_1}^\oplus, B_{i_2}^\oplus, \cdots, B_{i_q}^\oplus\}$。

引理 4.8 $\{C_{j_1}^\oplus\}$ 有 C_{n-1}^1 种情况，$\{C_{j_p}^\oplus\}$ 有 C_{n-1}^p 种情况，

$C_{j_{k_1}}^{\oplus} \subseteq C_{j_p}^{\oplus}$ 形式的情况有：$\sum_{k_1=1}^{p-1} C_{n-1}^{p} C_{p}^{k_1}$ 种；

$C_{j_{k_1}}^{\oplus} \subseteq C_{j_{k_2}}^{\oplus} \subseteq C_{j_p}^{\oplus}$ 形式的情况有：$\sum_{k_1=1}^{k_2-1} \sum_{k_2=2}^{p-1} C_{n-1}^{p} C_{p}^{k_2} C_{k_2}^{k_1}$ 种；

…

$C_{j_{k_1}}^{\oplus} \subseteq C_{j_{k_2}}^{\oplus} \subseteq \cdots \subseteq C_{j_{k_{p-1}}}^{\oplus} \subseteq C_{j_p}^{\oplus}$ 形式，即为 $C_{j_1}^{\oplus} \subseteq C_{j_2}^{\oplus} \subseteq \cdots \subseteq C_{j_{p-1}}^{\oplus} \subseteq C_{j_p}^{\oplus}$ 形式的情况有：$C_{n-1}^{p} C_{p}^{p-1} C_{p-1}^{p-2} \cdots C_{2}^{1}$ 种。

性质 4.1 当 $a \ge b$ 时，有 $C_{j_a}^{\oplus} \cap B_{i_b}^{\oplus} = C_{j_b}^{\oplus}$；$C_{j_a}^{\oplus} \cup B_{i_b}^{\oplus} = B_{i_a}^{\oplus}$；即是 $C_{j_a}^{\oplus} \cap B_{i_b}^{\oplus} = C_{j_u}^{\oplus}$；$C_{j_a}^{\oplus} \cup B_{i_b}^{\oplus} = B_{i_v}^{\oplus}$，其中，$u = \min\{a,b\}$，$v = \max\{a,b\}$。

情况二：针对 $\{\phi, X_{n-1}, X_n\} \cup A_1 \cup A_2$ 的拓扑类型，设 A_1 中的元素分别为 $C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots, C_{r_m}, C_{j_p}^{\oplus}$；$A_2$ 中的元素分别为 $B_{z_1}, B_{z_2}, \cdots, B_{z_q}$；

假定 $C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots, C_{r_m}, C_{j_p}^{\oplus}$ 等各自所含元素个数均不相同，且 $\{C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots, C_{r_m}\} \subseteq \{C_{j_1}^{\oplus}, C_{j_2}^{\oplus}, \cdots, C_{j_{p-1}}^{\oplus}\}$；$B_{z_1}, B_{z_2}, \cdots, B_{z_q}$ 等各自所含元素个数也均不相同。

性质 4.2 对于选定的 $\{C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots, C_{r_m}, C_{j_p}^{\oplus}\}$，$\{B_{z_1}, B_{z_2}, \cdots, B_{z_x}\}$ 可选择

$$\{B_{r_1}^{\oplus}, B_{r_2}^{\oplus}, \cdots, B_{r_m}^{\oplus}, B_{z_{x+1}}, B_{z_{x+2}}, \cdots, B_{z_k}\}$$

$$\text{或}\{B_{r_2}^{\oplus}, B_{r_3}^{\oplus}, \cdots, B_{r_m}^{\oplus}, B_{z_{x+1}}, B_{z_{x+2}}, \cdots, B_{z_k}\}$$

$$\text{或}\{B_{r_3}^{\oplus}, B_{r_4}^{\oplus}, \cdots, B_{r_m}^{\oplus}, B_{z_{x+1}}, B_{z_{x+2}}, \cdots, B_{z_k}\}$$

$$\cdots$$

$$\text{或}\{B_{r_m}^{\oplus}, B_{z_{x+1}}, B_{z_{x+2}}, \cdots, B_{z_k}\}$$

证明：可由**性质** 4.1 可证。

引理 4.9 对于 $C_{j_p}^{\oplus}$ 的取定，有 C_{n-1}^{p} 种情况；若取定了 $C_{j_p}^{\oplus}$，将 $\{C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots, C_{r_m}, C_{j_p}^{\oplus}\}$ 的取法记为

$$T_{1,n-2} = \sum_{p=1}^{n-2} \left(\sum_{k_1=0}^{k_2-1} \sum_{k_2=0}^{k_3-1} \cdots \sum_{k_{p-1}=0}^{p-1} C_{n-1}^{p} C_{p}^{k_{p-1}} C_{k_{p-1}}^{k_{p-2}} \cdots C_{k_2}^{k_1} \right),$$

则，$\{C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots, C_{r_m}, C_{j_p}^{\oplus}\}$ 的取法总共有 $(C_{n-1}^{p} T_{1,n-2})$ 种。

证明：可由**引理** 4.8 证得。

引理 4.10 对于取定了的 $\{C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots, C_{r_m}, C_{j_p}^{\oplus}\}$，构造拓扑情况：

$$\{\phi, X_{n-1}, X_n, C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots, C_{r_m}, C_{j_p}^{\oplus}, B_{j_p}^{\oplus}, B_{k_1}, B_{k_2}, \cdots, B_{k_s}\}$$

其中，$\{B_{k_1}, B_{k_2}, \cdots, B_{k_s}\} \subseteq \{B_{i_{p+1}}^{\oplus}, B_{i_{p+2}}^{\oplus}, \cdots, B_{i_{n-2}}^{\oplus}\}$，且 $B_{z_1}, B_{z_2}, \cdots, B_{z_q}$ 等各自所含元素个数也均不相同，$k_1 < k_2 < \cdots < k_s$。

令 $p+1 \le t \le n-2$，若 t 存在，则 $\{B_{j_p}^{\oplus}, B_{k_1}, \cdots, B_{k_s}\}$ 的情况个数为

$$U_{p+1}^{n-2} + 1 = \sum_{t=p+1}^{n-2} \left(\sum_{k_1=0}^{k_2-1} \sum_{k_2=0}^{k_3-1} \cdots \sum_{k_{t-1}=0}^{t-p-1} C_{n-1-p}^{t-p} C_{t-p}^{k_{t-1}} C_{k_{t-1}}^{k_{t-2}} \cdots C_{k_2}^{k_1} \right) + 1$$

若 t 不存在，则 $U_{p+1}^{n-2}=0$；则，这种类型的拓扑数有 $C_{n-1}^{p}T_{1,n-2}\left(U_{p+1}^{n-2}+1\right)$ 种。

注：结论的“+1”是考虑到 $\left\{\phi,X_{n-1},X_n,C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m},C_{j_p}^{\oplus},B_{j_p}^{\oplus}\right\}$ 这种情况。

引理 4.11 若 $p\ge 2$，$\left\{B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_k}\right\}$ 的取法为：

$B_{z_1}\in\left\{B_{r_1}^{\oplus},B_{r_2}^{\oplus},\cdots,B_{r_m}^{\oplus}\right\}$，$B_{z_k}\in\left\{B_{j_p}^{\oplus},B_{i_{p+1}}^{\oplus},\cdots,B_{i_{n-2}}^{\oplus}\right\}$，且 B_{z_1} 与 B_{z_k} 均要非空；

则，设 $\left\{B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_x}\right\}\subseteq\left\{B_{r_1}^{\oplus},B_{r_2}^{\oplus},\cdots,B_{r_m}^{\oplus}\right\}$，其中 $z_x<j_p$，$z_{x+1}\ge j_p$；那么，$\left\{B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_x}\right\}$ 的种数即为 $\left\{C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m}\right\}\subseteq\left\{C_{j_1}^{\oplus},C_{j_2}^{\oplus},\cdots,C_{j_{p-1}}^{\oplus}\right\}$，且 $C_{r_1}\subseteq C_{r_2}\subseteq\cdots\subseteq C_{r_m}$ 的种数(当 $p\ge 2$ 时存在这类情况)。

证明：由于 $\left\{B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_x}\right\}$ 的种数可分为以下情况：

当 A_1 中的情况为 $C_{j_{k_1}}^{\oplus}\subseteq C_{j_p}^{\oplus}$ 时，(此时 $B_{z_1}=B_{j_{k_1}}^{\oplus}$，$x=1$)，其种数再加上当 $C_{j_{k_1}}^{\oplus}\subseteq C_{j_{k_2}}^{\oplus}\subseteq C_{j_p}^{\oplus}$ 时的种数(此时 $B_{z_1}=B_{j_{k_1}}^{\oplus}$，$B_{z_2}=B_{j_{k_2}}^{\oplus}$，$x=2$)，再加上当 $C_{j_{k_1}}^{\oplus}\subseteq C_{j_{k_2}}^{\oplus}\subseteq C_{j_{k_3}}^{\oplus}\subseteq C_{j_p}^{\oplus}$ 时的种数(此时 $B_{z_1}=B_{j_{k_1}}^{\oplus}$，$B_{z_2}=B_{j_{k_2}}^{\oplus}$，$B_{z_3}=B_{j_{k_3}}^{\oplus}$，$x=3$)，…(如此递推下去)…，再加上当 $C_{j_{k_1}}^{\oplus}\subseteq C_{j_{k_2}}^{\oplus}\subseteq\cdots\subseteq C_{j_{k_{p-1}}}^{\oplus}\subseteq C_{j_p}^{\oplus}$ 时的种数(此时 $B_{z_\alpha}=B_{j_{k_\alpha}}^{\oplus}$，$(\alpha=1,2,\cdots,p-1)$，$x=p-1$)。

引理 4.12 对于 $\left\{B_{z_{x+1}},B_{z_{x+2}},\cdots,B_{z_k}\right\}\subseteq\left\{B_{j_p}^{\oplus},B_{i_{p+1}}^{\oplus},\cdots,B_{i_{n-2}}^{\oplus}\right\}$，其中 $z_x<j_p$，$z_{x+1}\ge j_p$，若 $z_{x+1}=j_p$ 则 $\left\{B_{z_{x+1}},B_{z_{x+2}},\cdots,B_{z_k}\right\}$ 的种数为 $\left(U_{p+1}^{n-2}+1\right)$；若 $z_{x+1}\ne j_p$ 则 $\left\{B_{z_{x+1}},B_{z_{x+2}},\cdots,B_{z_k}\right\}$ 的种数为 U_{p+1}^{n-2}。

证明：可由**引理** 4.10 证得。

5. 主要结论

首先讨论变换 α 的情况：

当 $A_1=\{\phi\}$ 时，**(α-1)** = 1；**(α-2)** = $\left\{\phi,X_{n-1},X_n,\{x_n\}\right\}$ = 1；**(α-3)**，**(α-4)**与**(α-5)**均重复了**(α-2)**情况，这里计数均为 0；共 2 种情况。

当 $A_1\ne\{\phi\}$ 时，**(α-1)** = $P_{n-1}-1$；由**引理** 4.1 可知，**(α-2)** = 0；

(α-3) $\{\phi,X_{n-1},X_n\}\cup A_1\cup A_2$ 分 3 种情况讨论：

(α-3-1)：$\left\{\phi,X_{n-1},X_n,C_1,C_2,\cdots,C_k,B_1,B_2,\cdots,B_k\right\}$

注：由**引理** 4.2 可知，当 $A_1=\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}\in X_{n-1}^{*}$ 时，只有 A_2 为单元素时才能构成拓扑。所以**(α-3-1)**情况只能是 $k=1$，总共有 $\left(2^{n-1}-2\right)$ 种。

(α-3-2)：由**引理** 4.3 可知，$\left\{\phi,X_{n-1},X_n,A_1^{\circ},A_2^{\bullet}\right\}$ 不是拓扑；故而可构造，$\left\{\phi,X_{n-1},X_n,A_1^{\circ},A_1^{\bullet},A_2^{\bullet}\right\}$，其中 $A_1^{\bullet}=X_{n-1}\setminus A_1^{\circ}$，是一个拓扑，这类拓扑是集合 X_n 上的一个 **σ 代数**，共有 $\left(2^{n-1}-2\right)$ 种情况。

(α-3-3)：设 A_1 中的元素分别为 $C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m},C_{j_p}^{\oplus}$；$A_2$ 中的元素分别为 $B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_q}$；对于 $\left\{C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m},C_{j_p}^{\oplus}\right\}$ 的取法，可分为两种情况：

(α-3-3-1) $C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m},C_{j_p}^{\oplus}$ 等各自所含元素个数均**不**相同，且 $\left\{C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m}\right\}\subseteq\left\{C_{j_1}^{\oplus},C_{j_2}^{\oplus},\cdots,C_{j_{p-1}}^{\oplus}\right\}$；$B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_q}$ 等各自所含元素个数也均**不**相同。

(α-3-3-2) $C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m},C_{j_p}^{\oplus}$ 等各自所含元素个数有相同的情况；或者 $B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_q}$ 等各自所含元素个数有相同的情况。

下面，先讨论**(α-3-3-1)**：

由**引理 4.9** 可知，$\left\{C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m},C_{j_p}^{\oplus}\right\}$ 的取法共有 $\left(C_{n-1}^{p}T_{1,n-2}\right)$ 种。故而，**(α-3-3-1)**又可以分成三种情况讨论：

(α-3-3-1-1)对于取定了的$\left\{C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m},C_{j_p}^{\oplus}\right\}$，有

$$\left\{\phi,X_{n-1},X_n,C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m},C_{j_p}^{\oplus},B_{j_p}^{\oplus},B_{k_1},B_{k_2},\cdots,B_{k_s}\right\}$$

其中，$\left\{B_{k_1},B_{k_2},\cdots,B_{k_s}\right\}\subseteq\left\{B_{i_{p+1}}^{\oplus},B_{i_{p+2}}^{\oplus},\cdots,B_{i_{n-2}}^{\oplus}\right\}$，且$B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_q}$等各自所含元素个数也均不相同，$k_1<k_2<\cdots<k_s$。

注：由**引理 4.10** 知，这类情况的拓扑数共有$C_{n-1}^{p}T_{1,n-2}\left(U_{p+1}^{n-2}+1\right)$种。

(α-3-3-1-2)：$B_{z_1}\in\left\{B_{r_1}^{\oplus},B_{r_2}^{\oplus},\cdots,B_{r_m}^{\oplus}\right\}$，$B_{z_k}\in\left\{B_{j_p}^{\oplus},B_{i_{p+1}}^{\oplus},\cdots,B_{i_{n-2}}^{\oplus}\right\}$，且$B_{z_1}$与$B_{z_k}$均要非空；则设$\left\{B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_x}\right\}\subseteq\left\{B_{r_1}^{\oplus},B_{r_2}^{\oplus},\cdots,B_{r_m}^{\oplus}\right\}$，其中$z_x<j_p$，$z_{x+1}\ge j_p$。

注：对于取定了的$C_{j_p}^{\oplus}$，有C_{n-1}^{p}种情况；对于$\left\{B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_k}\right\}$的取法，这里不强调$k=q$，因为先不考虑会与前面重复的情况；则

又因B_{z_1}非空，由**引理 4.11**、**引理 4.12**、**性质 4.2** 知，此类情况共有

$$\begin{aligned}W_{1,n-2}=\sum_{p=1}^{n-2}C_{n-1}^{p}\cdot\Bigg[&\left(\sum_{k_1=1}^{p-1}C_{p}^{k_1}\right)\cdot 1+\left(\sum_{k_1=1}^{k_2-1}\sum_{k_2=2}^{p-1}C_{p}^{k_2}C_{k_2}^{k_1}\right)\cdot 2+\left(\sum_{k_1=1}^{k_2-1}\sum_{k_2=2}^{k_3-1}\sum_{k_3=3}^{p-1}C_{p}^{k_3}C_{k_3}^{k_2}C_{k_2}^{k_1}\right)\cdot 3+\cdots\\&+\left(\sum_{k_1=1}^{k_2-1}\sum_{k_2=2}^{k_3-1}\cdots\sum_{k_{p-1}=p-1}^{p-1}C_{p}^{k_{p-1}}C_{k_{p-1}}^{k_{p-2}}\cdots C_{k_2}^{k_1}\right)\cdot(p-1)\Bigg]\cdot\left(U_{p+1}^{n-2}+1+U_{p+1}^{n-2}\right)\end{aligned}\text{种；}$$

(α-3-3-1-3)：$\left\{B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_k}\right\}\subseteq\left\{B_{i_{p+1}}^{\oplus},B_{i_{p+2}}^{\oplus},\cdots,B_{i_{n-2}}^{\oplus}\right\}$，且$B_{z_1}$非空。

注：针对此类情况，由**引理 4.10** 知，

$$U_{p+1}^{n-2}=\sum_{t=p+1}^{n-2}\left(\sum_{k_1=0}^{k_2-1}\sum_{k_2=0}^{k_3-1}\cdots\sum_{k_{t-1}=0}^{t-p-1}C_{n-1-p}^{t-p}C_{t-p}^{k_{t-1}}C_{k_{t-1}}^{k_{t-2}}\cdots C_{k_2}^{k_1}\right)$$

故而这类情况共有$\left(T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}\right)$种。

若先不考虑重复情况，**(α-3-3-1-1)+(α-3-3-1-2)+(α-3-3-1-3)**情况总共有

$$\left(T_{1,n-2}\left(U_{p+1}^{n-2}+1\right)+W_{1,n-2}+T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}\right)\text{种;}$$

从而考虑排除重复情况后，**(α-3-3-1)**情况总共有

$$\left(T_{1,n-2}\left(U_{p+1}^{n-2}+1\right)+W_{1,n-2}+T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}-T_{1,n-2}=2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}\right)\text{种,}$$

其中“$-T_{1,n-2}$”表示去掉与**(α-3-1)**中的包含情况重复的部分。

接下来，对于**(α-3-3-2)**的情况，假设其拓扑数为Q_1。

综上，由加法原则得**(α-3)**情况共有

$$\left(\left(2^{n-1}-2\right)+\left(2^{n-1}-2\right)+2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}+Q_1=2^n-4+2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}+Q_1\right)\text{种.}$$

由**引理 4.4** 可知，**(α-4)** = 0；

(α-5)可分为两种情况讨论：

(α-5-1)：$\left\{\phi,X_n,X_{n-1},C_1,C_2,\cdots,C_k,B_1,B_2,\cdots,B_k,\left\{x_n\right\}\right\}$

这类情况有$\left(P_{n-1}-1\right)$种。

(α-5-2)：$\left\{\phi,X_n,X_{n-1},A_1^{\circ},A_2^{\bullet},\left\{A_1^{\circ}\cup x_n\right\},\left\{x_n\right\}\right\}$

其中$A_1^{\circ}\ne X_{n-1}$且$A_1^{\circ}\ne\phi$，A_1°为X_{n-1}的单个子集，而$A_2^{\bullet}=X_n\setminus A_1^{\circ}$，

由**引理 4.5** 知，这类情况不构成拓扑。

所以，**(α-5)** = $\left(P_{n-1}-1\right)$。

综上所述，得到

定理 5.1 对于**变换** α 的各个情况，其拓扑数为

$$\begin{aligned}&2+\left(P_{n-1}-1\right)+0+\left[2^n-4+2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}+Q_1\right]+0+\left(P_{n-1}-1\right)\\&=2^n-4+2P_{n-1}+2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}+Q_1\end{aligned}$$

(具体符号见表 2)。

接下来，讨论变换 β 的情况：

当 $A_1=\{\phi\}$ 时，**(β-1)** = 1；**(β-2)** = $\{\phi,X_n,\{x_n\}\}$ = 1；**(β-3)**，**(β-4)**与**(β-5)**均重复了**(β-2)**情况，这里计数均为 0；共 2 种情况。

当 $A_1\neq\{\phi\}$ 时，设 $A_1=\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$，则**(β-1)**要排除 $\bigcup_{s=1}^{k}C_s=X_{n-1}$ 的情况，即**(β-1)** = $\sum_{k=1}^{n-2}C_{n-1}^kP_k$。由**引理 4.6** 可知，**(β-2)** = $2^{n-1}-2$；**(β-3)** = $P_{n-1}-1$；

(β-4)：$\{\phi,X_n\}\cup A_1\cup A_2$，要避免 $\bigcup_{s=1}^{k}C_s=X_{n-1}$ 的情况，在**(β-1)**的基础上有，

(β-4-1)：$\{\phi,X_n,C_1,C_2,\cdots,C_k,B_1,B_2,\cdots,B_k\}$，其中 $B_i=C_i\cup\{x_n\}$，

这类情况的计数以不出现元素 X_{n-1} 为计数依据，有 $\left(\sum_{k=1}^{n-2}C_{n-1}^kP_k\right)$ 种。

(β-4-2): $\{\phi,X_n,A_1^\circ,A_2^\bullet\}$，其中 $A_1^\circ\subseteq X_{n-1}$ 为单个子集，但 $A_1^\circ\neq X_{n-1}$ 且 $A_1^\circ\neq\phi$，而 $A_2^\bullet=X_n\setminus A_1^\circ$，有 $\left(2^{n-1}-2\right)$ 个。

(β-4-3): 将 A_1 中的元素分类为 $C_{j_1}^\oplus,C_{j_2}^\oplus,\cdots,C_{j_p}^\oplus$；$A_2$ 中的元素分类为 $B_{i_1}^\oplus,B_{i_2}^\oplus,\cdots,B_{i_q}^\oplus$；其中 $B_i=C_i\cup\{x_n\}$，且 $p\neq q$，同时满足 $C_{j_1}^\oplus\subseteq C_{j_2}^\oplus\subseteq\cdots\subseteq C_{j_p}^\oplus$，$B_{i_1}^\oplus\subseteq B_{i_2}^\oplus\subseteq\cdots\subseteq B_{i_q}^\oplus$；

而且在这里假定：$C_{j_{k+1}}^\oplus$ 比 $C_{j_k}^\oplus$ 的元素个数多 1，则也有 $B_{i_{k+1}}^\oplus$ 比 $B_{i_k}^\oplus$ 的元素个数多 1；

这个分类不会出现 $\bigcup_{s=1}^{k}C_s=X_{n-1}$ 的情况，故而可分为两种情况讨论：

(β-4-3-1) $C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m},C_{j_p}^\oplus$ 等各自所含元素个数均不相同，且 $\{C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m}\}\subseteq\{C_{j_1}^\oplus,C_{j_2}^\oplus,\cdots,C_{j_{p-1}}^\oplus\}$；$B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_q}$ 等各自所含元素个数也均不相同。

注：对于**(β-4-3-1)**，可直接应用前面对 **α-3-3-1** 情况的论述，可知这类情况共有

$$\left(T_{1,n-2}\left(U_{p+1}^{n-2}+1\right)+W_{1,n-2}+T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}-T_{1,n-2}=2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}\right)\text{种，}$$

其中“$-T_{1,n-2}$”表示去掉与**(β-4-1)**中的包含情况重复的部分。

故而，此类情况共有 $\left(2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}\right)$ 种。

(β-4-3-2) $C_{r_1},C_{r_2},\cdots,C_{r_m},C_{j_p}^\oplus$ 等各自所含元素个数有相同的情况；

或者 $B_{z_1},B_{z_2},\cdots,B_{z_q}$ 等各自所含元素个数有相同的情况。

注：对于**(β-4-3-2)**的情况，假设其拓扑数为 Q_2。

综上所述，由加法原则得**(β-4-3)**情况共有 $\left(2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}+Q_2\right)$ 种。

故而，**(β-4)**情况共有 $\left(\sum_{k=1}^{n-2}C_{n-1}^kP_k+\left(2^{n-1}-2\right)+2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}+Q_2\right)$ 种。

(β-5)可分为两种情况讨论：

(β-5-1)：$\{\phi, X_n, C_1, C_2, \cdots, C_k, B_1, B_2, \cdots, B_k, \{x_n\}\}$，这类情况有$\left(\sum_{k=1}^{n-2} C_{n-1}^k P_k\right)$种；

(β-5-2)：$\{\phi, X_n, A_1^\circ, A_2^\circ, \{A_1^\circ \cup x_n\}, \{x_n\}\}$，其中 $A_1^\circ \neq X_{n-1}$ 且 $A_1^\circ \neq \phi$，A_1° 为 X_{n-1} 的单个子集，而 $A_2^\bullet = X_n \setminus A_1^\circ$，这类情况有$\left(2^{n-1}-2\right)$种。

所以，**(β-5)** = $\left(\sum_{k=1}^{n-2} C_{n-1}^k P_k\right) + \left(2^{n-1}-2\right)$。

综上所述，得到

定理 5.2 对于**变换 *β*** 的各个情况，其拓扑数为

$$
\begin{aligned}
&2+\left[\sum_{k=1}^{n-2} C_{n-1}^k P_k\right]+\left[2^{n-1}-2\right]+\left(P_{n-1}-1\right)\\
&+\left[\sum_{k=1}^{n-2} C_{n-1}^k P_k+2^{n-1}-2+2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}+Q_2\right]+\left[\sum_{k=1}^{n-2} C_{n-1}^k P_k+2^{n-1}-2\right]。\\
&=P_{n-1}+3\sum_{k=1}^{n-2} C_{n-1}^k P_k+3\cdot 2^{n-1}-5+2T_{1,n-2}U_{p+1}^{n-2}+W_{1,n-2}+Q_2
\end{aligned}
$$

(具体符号见表 2)。

6. 待研究问题

对于 n 元有限集上的拓扑数，还有无法直接求取出的计数结果：

1) 对于 α 变换中的**(α-3-3-2)**情况，若 $C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots, C_{r_m}, C_{j_p}^{\oplus}$ 等各自所含元素个数有相同的情况，或 $B_{z_1}, B_{z_2}, \cdots, B_{z_q}$ 等各自所含元素个数有相同的情况；

也即未知量 Q_1 的求取。

2) 对于 β 变换中的**(β-4-3-2)**情况，若 $C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots, C_{r_m}, C_{j_p}^{\oplus}$ 等各自所含元素个数有相同的情况，或 $B_{z_1}, B_{z_2}, \cdots, B_{z_q}$ 等各自所含元素个数有相同的情况；

也即未知量 Q_2 的求取。

致　谢

作者衷心感谢华南师范大学数学科学学院的赵浩老师，给予我细心的指导与帮助！

参考文献

[1] 郭志勇. 有限集上几种拓扑概念及性质[J]. 云南师范大学学报,1991, 11(4): 42-45.
[2] 郭志勇. 有限集上的拓扑结构[J]. 云南师范大学学报, 1992, 12(4): 19-22.
[3] 何昌, 熊明. 有限集上的拓扑数的探讨[J]. 大理师专学报, 1995(1): 8-10.
[4] 张震. 有限拓扑中的计数问题[D]: [硕士学位论文]. 北京: 首都师范大学, 2001.
[5] 洪彩霞. 有限集上两极拓扑个数的探讨[J]. 师德师范学院学报, 2006, 18(3): 16-19.
[6] 岳崇山, 张贺, 景海斌. 关于有限集上的拓扑的几个结果[J]. 河北北方学院学报, 2007, 23(27): 5-7.
[7] 赵婷婷, 梁立, 高云. 基于拟拓扑的有限集上拓扑构建递推算法[J]. 云南大学学报, 2013, 35(6): 744-749.
[8] 赵婷婷. 有限集上拓扑构建算法研究[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2014.
[9] 洪楠坤. 有限集合上的拓扑数[D]: [硕士学位论文]. 苏州: 苏州大学, 2016.
[10] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2011.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org