Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(6), 699-705
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.86094

Global Dynamics of a Staged Progression Model for Infectious Diseases

Dandan Hou

Department of Mathematics, Chang'an University, Xi'an Shaanxi
Email: 1447389487@qq.com

Received: Nov. 3rd, 2018; accepted: Nov. 20th, 2018; published: Nov. 27th, 2018

Abstract

We analyze a mathematical model for infectious diseases that progress through distinct stages within infected hosts. An example of such a disease is AID, which results from HIV infection. For a general n-stage stage-progression (SP) model with bilinear incidences, we prove that the global dynamics are completely determined by the basic reproduction number R_0: If $R_0 \le 1$, then the disease-free equilibrium P_0 is globally asymptotically stable and the disease always dies out. If $R_0 > 1$; P_0 is unstable, and a unique endemic equilibrium P^* is globally asymptotically stable, and the disease persists at the endemic equilibrium. The basic reproduction number for the SP model with density dependent incidence forms are also discussed.

Keywords

Basic Reproduction Number, Lyapunov Function, Disease-Free Equilibrium, Endemic Equilibrium, Global Stability

一类传染病模型阶段性感染的全局稳定性

侯丹丹

长安大学理学院，陕西 西安
Email: 1447389487@qq.com

收稿日期：2018年11月3日；录用日期：2018年11月20日；发布日期：2018年11月27日

摘 要

本文讨论了一类传染病数学模型，分析了受感染宿主在不同阶段感染的情形，如由**HIV**病毒引起的艾滋病。对于其有双线性发生率的n阶段模型(**SP**)，本文证明了此类传染病模型的全局稳定性完全由基本再生数R_0决定，若$R_0 \le 1$，则无病平衡点P_0是全局渐进稳定，并且疾病会消失；若$R_0 > 1$，P_0是不稳定的，且

文章引用: 侯丹丹. 一类传染病模型阶段性感染的全局稳定性[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 699-705.
DOI: 10.12677/pm.2018.86094

唯一的地方性平衡点P^*是渐进稳定的。

关键词

基本再生数，李雅普诺夫函数，无病平衡点，地方病平衡点，全局稳定性

1. 引言

艾滋病是一种危害性极大的传染病，由感染艾滋病病毒(HIV 病毒)引起。HIV 是一种能攻击人体免疫系统的病毒。它把人体免疫系统中最重要的 T 淋巴细胞作为主要攻击目标，大量破坏该细胞，使人体丧失免疫功能。近年来，人们易感染到此类传染病，使得人们的生活受到了极大的影响，所以研究此类传染病模型具有极其重要的意义。在本文中主要建立了 SP 模型,求出模型的基本再生数以及平衡点并根据基本再生数证明出在平衡点处全局渐进稳定性。

2. 模型的建立

在文献[1] [2]中的马尔可夫链模式阶段模型中，建立了时间传染性的多变性模型，同时分析了 SP 模型。为表示一类 SP 模型，总体可分为：易受感染者记为 S，受感染者记为 I_i，I_i 表示的是疾病进展到第 i 阶段的人，其中 $i=1,2,\cdots,n$，极限记为 A δ_i 是从第 i 到 $i+1$ 阶段的连续平均率，$i=1,2,\cdots,n-1$，δ_n 是从第 n 阶段到疾病最终阶段的连续平均率。若在最终部分由于不活跃是没有感染疾病的，至于 AIDS，有着活跃着的 AIDS 的人组成了最终部分，AIDS 病人是典型地要么变得性方面不活跃，要么与感染过程隔离，他们的传染是可以忽略的。假设疾病不会痊愈，那么唯一离开的部分是 A 死的。λ_i 为 I_i 中一个易受感染的传染系数。完整的发生率是根据 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i Sf(N)$，完全活跃人口 $N=I_1+I_2+\cdots+I_n$。这里假设发病率的密度函数 $f(N)=N^{-\alpha}$，$0\le\alpha\le1$。其中包含两类普遍的发病形式：标准发病率形式$(\alpha=1)$和双线性发病率$(\alpha=0)$。易受感染人群的平均死亡率为 α_0，I_i 的 α_i 包括由于感染死亡的，极限 A 中的是 α_A。在各部分之间的人口流动转化如图 1 所示。假设易受影响的人群是恒定的 Λ，并假设模型中的参数都为正的。

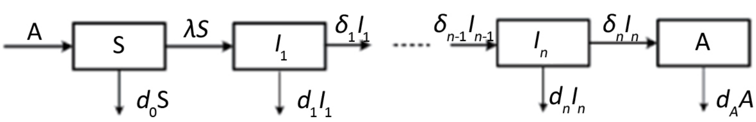

Figure 1. Population flow conversion map
图 1. 人口流动转化图

基于文中假设和转化图，n 阶 SP 模型如下:

$$\begin{cases} S'=\Lambda-\alpha_0 S-\lambda S \\ I_1'=\lambda S-(\alpha_1+\delta_1)I_1 \\ I_i'=\delta_{i-1}I_{i-1}-(\alpha_i+\delta_i)I_i \\ A'=\delta_n I_n-\alpha_n A \end{cases},\quad i=1,2,\cdots,n。\tag{1}$$

这个发病率的形式为λS，它的传染率为

$$f(N)\le 0,\quad \lambda = f(N)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i \tag{2}$$

是密度制约。

假设函数$f(N)$满足：

$$N>0,\quad f(N)>0,\quad \left|Nf'(N)\right|\le f(N) \tag{H}$$

并且$Nf(N)$是单调递增的。

若$f(N)>0$且$f'(N)\le 0$，随着人数的增加，易受影响的可能性减小，因此传染力有可能是关于N的递减函数。其余两种情况可以利用分析所需要的f，它被证实$f(N)=N^{-\alpha}$，$0\le\alpha\le 1$满足条件(H)、这个包括标准发病率($\alpha=1$)和双线性发病率($\alpha=0$)。把(1)中的方程式相加，可以得到：$N'=\Lambda-\alpha_0 S-\alpha_1 I_1-\cdots-\alpha_n I_n-\delta_n I_n\le\Lambda-\alpha N$，其中$\alpha=\min\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，令$N'=0$可以得到$\limsup\limits_{n\to\infty} N(t)\le\dfrac{\Lambda}{\alpha}$。同样的，从(1)中的第一个方程式得到$S'\le\Lambda-\alpha_0 S$，因此有$\lim\limits_{n\to\infty} S(t)\le\dfrac{\Lambda}{\alpha_0}$。对(1)而言，它的可行域为闭集。$T'=\left\{(S,I_1,\cdots,I_n)\in R_+^{n+1}:0\le S\le\dfrac{\Lambda}{\alpha_0},0\le S+I_1+\cdots+I_n\le\dfrac{\Lambda}{\alpha}\right\}$，由此可知平衡点的正性。模型(1)中的基本再生数为

$$R_0=\left[\frac{\lambda_1}{\alpha_1+\delta_1}+\frac{\lambda_2}{\alpha_1+\delta_1}\frac{\delta_1}{\alpha_2+\delta_2}+\cdots+\frac{\lambda_n}{\alpha_1+\delta_1}\frac{\delta_1}{\alpha_2+\delta_2}+\cdots+\frac{\delta_{n-1}}{\alpha_n+\delta_n}\right]\frac{\Lambda}{\alpha_0}f\left(\frac{\Lambda}{\alpha_0}\right) \tag{3}$$

3. 地方病平衡点P^*的稳定性

方程(1)中的一个平衡点总满足

$$\begin{cases}0=\Lambda-\alpha_0 S-\lambda S\\ 0=\lambda S-(\alpha_1+\delta_1)I_1\\ 0=\delta_{i-1}I_{i-1}-(\alpha_i+\delta_i)I_i,\quad i=2,\cdots,n\end{cases} \tag{4}$$

其中λ在(2)中以给出。

无病平衡点P_0中的参数值都为正的，接下来我们考虑地方病平衡点的存在。

$$P^*=\left(S^*,I_1^*,\cdots,I_n^*\right),S^*>0,I_i^*>0,i=1,2,\cdots,n$$

$$A=\begin{pmatrix}-\alpha_1-\delta_1 & & & & \\ \delta_1 & -\alpha_2-\delta_2 & & & \\ & \delta_2 & -\alpha_3-\delta_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \delta_{n-1} & -\alpha_n-\delta_n\end{pmatrix} \tag{5}$$

矩阵A成立有以下结论：

1) $-A$是一个M矩阵

2) $-A^{-1}$存在且是一个非负矩阵

3) 若存在$\alpha>0$，有$-A^{-1}x\ge\alpha x\Rightarrow x\ge 0$

因此可令

$$\beta = -\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right) A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} > 0 \tag{6}$$

令(1)的基本再生数

$$R_0 = \beta \frac{\Lambda}{\alpha_0} f\left(\frac{\Lambda}{\alpha_0}\right) \tag{7}$$

若 $R_0 \le 1$，疾病将会消失。若 $R_0 > 1$时，疾病将继续存在于可行域中并且会有一个唯一的地方病平衡点，像这种临界值参数的期望是基本再生数。传染病的平均数且是由无病平衡点在人口方面的单一感染造成的([3] [4] [5] [6])。因此将(7)中 R_0 定义为基本再生数。R_0 的引出是利用李雅普诺夫函数建立在无病平衡点 P_0 的稳定分析(见[5])。其它引出 R_0 的方法中，其中有二代模型矩阵在[3]中的方法，在[6]中被引进。这个引出建立在 P_0 的线性稳定分析下(见[4])。接下来，给出下一代模型矩阵的方法，与[6]中表示一样，是为了引出与(7)中的相同的基本再生数 R_0。

令 $y = \left(I_1, I_2, \cdots, I_n, S\right)^{\mathrm{T}}$

因此模型(1)可以写为 $y' = F(y) + V(y)$，

其中 $F(y) = \begin{pmatrix} \lambda S \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$V(y) = \begin{pmatrix} -\left(\alpha_1 + \delta_1\right) I_1 \\ \delta_1 I_1 - \left(\alpha_2 + \delta_2\right) I_2 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} I_{n-1} - \left(\alpha_n + \delta_n\right) I_n \\ \Lambda - \alpha_0 S - \lambda_0 \end{pmatrix}$。

新的无病平衡点 $\tilde{P}_0 = \left(0, 0, \cdots, 0, \frac{\Lambda}{\alpha_0}\right)$，$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\tilde{P}_0\right) = \begin{pmatrix} F_{n\times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

其中 $F_{n\times n} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & \cdots & -\lambda_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} g\left(\frac{\Lambda}{\alpha_0}\right)$，且 $g(N) = Nf(N)$。

此外 $\frac{\partial V}{\partial y}\left(\tilde{P}_0\right) = \begin{pmatrix} & V_{n\times n} & & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \\ -\lambda_1 g\left(\frac{\Lambda}{\alpha_0}\right) & \cdots & -\lambda_n g\left(\frac{\Lambda}{\alpha_0}\right) & -\alpha_n \end{pmatrix}$，

这里的 $V_{n\times n}$ 为矩阵(5)中的 A，

有 $FV^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} g\left(\frac{\Lambda}{\alpha_0}\right)$。

在文献[6]中基本再生数为 FV^{-1} 的谱半径 $\rho\left(FV^{-1}\right)$，易得

$\rho\left(FV^{-1}\right) = c_1 g\left(\frac{\Lambda}{\alpha_0}\right) = \beta \frac{\Lambda}{\alpha_0} f\left(\frac{\Lambda}{\alpha_0}\right)$ 与公式(7)给出 R_0 相同。

$$-A^{-1}=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

其中 c_{ij} 有以下表示 $c_{ii}=\dfrac{1}{\alpha_i+\delta_i},i=1,2,\cdots,n$。

$c_{kj}=\dfrac{\delta_{k-1}}{\alpha_k+\delta_k}c_{(k-i)i},i=1,2,\cdots,n;k=2,\cdots,n;k\neq i$，所以有

$$R_0=\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1+\delta_1}+\frac{\lambda_2}{\alpha_1+\delta_1}\frac{\delta_1}{\alpha_2+\delta_2}+\frac{\lambda_n}{\alpha_1+\delta_1}\frac{\delta_1}{\alpha_2+\delta_n}\cdots\frac{\delta_{n-1}}{\alpha_2+\delta_n}\right)\frac{\Lambda}{\alpha_0}f\left(\frac{\Lambda}{\alpha_0}\right) \tag{9}$$

定理 假设 $f(N)\equiv 1$ 且 $R_0>1$。则地方病平衡点是渐进稳定的。

证明 对于 $P^*=\left(S^*,I_1^*,\cdots,I_n^*\right)$，重写平衡方程为

$$\begin{cases} \Lambda=\alpha_0 S^*+\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*\right)S^* \\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^* S^*=\left(\alpha_1+\delta_1\right)I_1^* \\ \delta_{i-1}I_{i-1}^*=\left(\alpha_i+\delta_i\right)I_i^*,\quad i=2,\cdots,n \end{cases} \tag{10}$$

有：

$$S^*=\frac{\left(\alpha_1+\delta_1\right)I_1^*}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*} \tag{11}$$

$$I_i^*=\frac{\delta_{i-1}I_{i-1}^*}{\alpha_i+\delta_i},i=2,3,\cdots,n \tag{12}$$

其中 $x^*=P^*=\left(S^*,I_1^*,\cdots,I_n^*\right)$ 并且 $b_i>0$ 且

$$b_i=\frac{b_{i+1}\delta_i+\lambda_i S^*}{\alpha_i+\delta_i},i=2,3,\cdots,n-1,\quad b_n=\frac{\lambda_n s^*}{\alpha_n+\delta_n} \tag{13}$$

$W(x)\geq 0,\forall x\in P$ 在 P 的内部且 $W(x)=0$，有 $x=x^*$。

函数 W 关于 $x^*=P^*$ 是正定的，归纳(13)有

$$b_i=\frac{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k I_k^* S^*}{\left(\alpha_i+\delta_i\right)I_i^*},i=2,3,\cdots,n \tag{14}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\left(1-\frac{S^*}{S}\right)S'+\left(1-\frac{I_1^*}{I_1}\right)I_1'+\sum_{i=2}^{n}b_i\left(1-\frac{I_i^*}{I_i}\right)I_1^* \tag{15}$$

由(1)可得

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{S^*}{S}\right)S' \\
&=\Lambda-\alpha_0 S-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S-\frac{\Lambda S^*}{S}+\alpha_0 S^*+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S^* \\
&=2\alpha_0 S^*+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^* S^*-\alpha_0 S-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S-\frac{\alpha_0 S^{*2}}{S}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*\frac{S^{*2}}{S}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S^* \\
&=\left(2\alpha_0 S^*-\alpha_0 S-\frac{\alpha_0 S^{*2}}{S}\right)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S^*+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^* S^*-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*\frac{S^{*2}}{S} \\
&\le-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S^*+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^* S^*-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*\frac{S^{*2}}{S}
\end{aligned}\tag{16}$$

因为$\left(2\alpha_0 S^*-\alpha_0 S-\frac{\alpha_0 S^{*2}}{S}\right)=\alpha_0 S^*\left(2-\frac{S}{S^*}-\frac{S^*}{S}\right)\le 0$。

我们将(18)中的Λ代人到上述推导的第二步中，利用(1)，可得到

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{I_1^*}{I_1}\right)I_1'&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S-(\alpha_1+\delta_1)I_1-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S\frac{I_1^*}{I_1}+(\alpha_1+\delta_1)I_1^* \\
&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S-(\alpha_1+\delta_1)I_1-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S\frac{I_1^*}{I_1}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^* S^*
\end{aligned}\tag{17}$$

其中$i=2,3,\cdots,n$。由(1)有

$$b_i\left(1-\frac{I_1^*}{I_1}\right)I_1'=b_i\delta_{i-1}I_{i-1}-b_i(\alpha_i+\delta_i)I_i-\frac{b_i\delta_{i-1}I_{i-1}I_i^*}{I_i}+b_i(\alpha_i+\delta_i)I_1^*\tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S^*-(\alpha_1+\delta_1)I_1+\sum_{i=1}^{n}\left(b_i\delta_{i-1}I_{i-1}-b_i(\alpha_i+\delta_i)I_i\right) \\
&=\lambda_1 I_1 S^*-(\alpha_1+\delta_1)I_1+\sum_{i=2}^{n}\left(\lambda_i I_i S^*+b_i\delta_{i-1}I_{i-1}-b_i(\alpha_i+\delta_i)I_i\right) \\
&=\left(\lambda_1 S^*-(\alpha_1+\delta_1)+b_2\delta_1\right)I_1+\sum_{i=2}^{n-1}\left(\lambda_i S^*+b_{i+1}\delta_i-b_i(\alpha_i+\delta_i)\right)I_i+\left(\lambda_n S^*-b_n(\alpha_n+\delta_n)\right)I_n \\
&=0
\end{aligned}\tag{19}$$

用(13)中δ_i的归纳直接验证上述式子为0。

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 S^*-(\alpha_1+\delta_1)+b_2\delta_1 \\
&=\lambda_1 S^*+\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_k I_k^* S^*}{(\alpha_2+\delta_2)I_2^*}\delta_1-(\alpha_1+\delta_1)=\lambda_1 S^*+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k I_k^* S^*\frac{\delta_1}{\delta_1 I_1^*}-(\alpha_1+\delta_1) \\
&=\lambda_1 S^*+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k I_k^* S^*\frac{1}{I_1^*}-(\alpha_1+\delta_1)=\frac{1}{I_1^*}\left[\sum_{k=1}^{n}\lambda_k I_k^* S^*-(\alpha_1+\delta_1)I_1^*\right] \\
&=0
\end{aligned}$$

联立(16)~(19)。可简化(15)为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\le\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*\frac{S^*}{S}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i S\frac{I_1^*}{I_1}-\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i\delta_{i-1}I_{i-1}I_i^*}{I_i}\right)+\left(\sum_{i=2}^{n}b_i(\alpha_i+\delta_i)I_i^*+2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^* S^*\right)=A+B\tag{20}$$

由(12)，(14)，有

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i\delta_{i-1}I_{i-1}I_i^*}{I_i}=\sum_{i=2}^{n}\frac{\sum_{k=2}^{n}\lambda_k I_k^* S^*}{(\alpha_i+\delta_i)I_i^*}\frac{\delta_{i-1}I_{i-1}I_i^*}{I_i}=\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=i}^{n}\lambda_k I_k^* S^*\frac{\delta_{i-1}I_{i-1}}{(\alpha_i+\delta_i)I_i}$$
$$=\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=i}^{n}\lambda_k I_k^{**}\frac{I_i^* I_{i-1}}{I_{i-1}^* I_i}=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i I_i^* S^*\sum_{k=2}^{i}\frac{I_k^* I_{k-1}}{I_k I_{k-1}^*} \tag{21}$$

因此，由(20)，(21)有：

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\le\sum_{i=2}^{n}\left[(i+1)\lambda_i I_i^* s^*-\lambda_i I_i^*\frac{S^*}{S}-\lambda_i I_i S\frac{I_1^*}{I_1}-\lambda_i I_i^* S^*\sum_{k=2}^{i}\frac{I_k^* I_{k-1}}{I_k I_{k-1}^*}\right]$$
$$=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i I_i^* S^*\left[(i+1)-\frac{S^*}{S}-\frac{SI_iI_1^*}{S^*I_i^*I_1}-\sum_{k=2}^{i}\frac{I_k^* I_{k-1}}{I_k I_{k-1}^*}\right] \tag{22}$$

对于 $\forall i$，有：

$$-\frac{S^*}{S}-\frac{SI_iI_1^*}{S^*I_i^*I_1}-\sum_{k=2}^{i}\frac{I_k^* I_{k-1}}{I_k I_{k-1}^*}\le-(i+1) \tag{23}$$

因此，对于 $Int\Gamma$ 的任意点 $\left(S(t),I_1(t),I_2(t),\cdots,I_n(t)\right)$，由(23)可得 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\le 0$，当 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=0$ 时，有且只有地方病平衡点 P^*。

4. 总结

本文研究的是一类传染病模型阶段性感染的全局稳定性，主要考虑 SP 模型，得到解的正性和有界性，进而得到无病平衡点与地方病平衡点，再求出基本再生数 R_0，当 $R_0<1$ 时，无病平衡点全局稳定；当 $R_0>1$ 时，构造一个李雅普诺夫函数，对此函数求导，当导数小于等于 0 时，地方性平衡点全局稳定，其中导数等于 0，存在唯一的地方性平衡点。

参考文献

[1] Anderson, R.M., May, R.M., Medley, G.F. and Johnson, A. (1986) A Preliminary Study of the Transmission Dynamics of the Human Immunodeficiency Virus (HIV), the Causative Agent of AIDS. *Mathematical Medicine and Biology*, **3**, 229-263. https://doi.org/10.1093/imammb/3.4.229

[2] Hyman, J.M., Li, J. and Stanley, E.A. (1999) The Differential Infectivity and Staged Progression Models for the Transmission of HIV. *Mathematical Biosciences*, **155**, 77-109. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(98)10057-3

[3] Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P. and Metz, J.A.J. (1990) On the Definition and the Computation of the Basic Reproduction Ratio R0 in Models for Infectious Diseases in Heterogeneous Populations. *Journal of Mathematical Biology*, **28**, 365-382. https://doi.org/10.1007/BF00178324

[4] Hethcote, H.W. (2000) The Mathematics of Infectious Diseases. *SIAM Review*, **42**, 599-653. https://doi.org/10.1137/S0036144500371907

[5] Simon, C.P. and Jacquez, J.A. (1992) Reproduction Numbers and the Stability of Equilibria of SI Models for Heterogeneous Populations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **52**, 541-576.

[6] van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org