Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(6), 730-736
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.86098

Hans汉斯

On the Minor Minimal Super 5-Connected Graphs

Chengfu Qin, Fenmei Mo*

Department of Mathematics and Statistics, Guangxi Teachers Education University, Nanning Guangxi
Email: *1024035430@qq.com

Received: Nov. 10th, 2018; accepted: Nov. 23rd, 2018; published: Nov. 30th, 2018

Abstract

A graph H is called a minor of a graph G if H can be formed from G by deleting edges and vertices and by contracting edges. Let G be a k-connected graph such that G contains no other k-connected graph as its minor, then we call G a minor minimal k-connected graph. M. Kriesell showed that every minor hyper-5 connected graph has at most 12 vertices. In this paper, we show that every minor super-5 connected graph has at most 12 vertices.

Keywords

Super 5-Connected, Minor, Minimal, Characterization

子式极小的Super-5连通图

覃城阜，莫芬梅*

广西师范学院，数学与统计科学学院，广西 南宁
Email: *1024035430@qq.com

收稿日期：2018年11月10日；录用日期：2018年11月23日；发布日期：2018年11月30日

摘 要

如果图G可以经过去边，或者去点，或者收缩子图得到子图H，则称H是G的子式。若G是k-连通图且G中不包含另外一个k-连通图作为子式，则称G是子式极小的k-连通图。M. Krisesell证明了子式极小的hyper-5连通图的顶点数至多是12。本文将这个结论推广到Super-5连通图。

*通讯作者。

文章引用: 覃城阜, 莫芬梅. 子式极小的 Super-5 连通图[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 730-736.
DOI: 10.12677/pm.2018.86098

关键词

Super-5连通图，子式，极小，刻画

1. 引言

在本文中我们考虑的都是有限阶，无向的简单图，未经说明的术语和记号我们参考[1]。设 $G=(V(G),E(G))$，其中 $V(G)$ 是 G 的顶点集，$E(G)$ 是 G 的边集。记 $|G|=|V(G)|$。若图 G 的任意顶点 x 与 y 都有连接 x 与 y 的路，则称 G 是连通图，否则 G 是不连通图，用 $\kappa(G)$ 表示 G 的连通度。对于连通图 G，$T\subseteq V(G)$ 且 $G-T$ 至少有两个分支，则称 T 是 G 的一个点割。若 T 是 G 的点割并且 $|T|=\kappa(G)$，则称 T 是 G 的最小点割。设 G 是连通图，$T\subseteq V(G)$ 是 G 的最小点割。若 A 是 $G-T$ 若干个分支的并且 $G-T-A\neq\phi$，则称 T 是 A 的断片。

在图 G 中与顶点 x 相邻的顶点称为 x 的邻点，x 的所有邻点组成的集合称为 x 邻域，记为 $N(x)$。设 $A\subseteq V(G)$，记 $N(A)=\bigcup_{x\in A}N(x)-A$。我们用 $d(x)=|N(x)|$ 表示点 x 的度数，用 $V_k(G)$ 表示图 G 中所有度数为 k 的顶点的集合。用 $\Delta(G)$ 表示图 G 中的最大度，$\delta(G)$ 表示图 G 中的最小度。$S\subseteq V(G)$，我们用 $G[S]$ 表示集合 S 的诱导子图。

设 $e=xy$ 是图 G 的一条边，引进一个新的顶点 v_e 使其与 x 和 y 的所有邻点都相邻，最后将 x 和 y 的去掉所得到的图称为是由图 G 收缩边 e 所得到的图，记为 G/xy。设 G 是 k-连通图，$e=xy$ 是图 G 的一条边。若 G/xy 还是 k-连通图，则称 e 是 G 的 k-可收缩边。若 G 是 k-连通图且 G 的任意一条边 e 都有 G/e 不是 k-连通图则称 G 是收缩临界 k-连通图。若 A 是一个断片使得 $N(A)$ 中包含 $e\in F\subseteq E(G)$，则称 A 是相对于 F 的断片。特别地，当 $F=\{e\}$ 则称 A 是相对于 e 的断片.

由定义我们可知 G 是收缩临界 k-连通图当且仅当对于任意 $e\in E(G)$ 都有 e 包含在一个最小点割内。

T 是连通图 G 的最小点割，我们称 T 是一个 shredder 如果 $G-T$ 至少有 3 个分支。用 $\zeta(G)$ 表示所有图 G 中的集 shredder 合。设 $S\in\zeta(G)$，设 $G-S$ 有 k 个分支 $H_1,\cdots,H_k$。不失一般性，$|H_1|\le\cdots\le|H_k|$。记 $K(S)=\{H_k\},L(S)=\{H_1,\cdots,H_{k-1}\}$。

一个 k-连通图 G 如果满足：对于任意的最小点割 T，$G-T$ 有一个分支是孤立点，则称 G 是 Super-k 连通图，简称 G 是 Super 的。若 G 是 Super 的且 G 中没有 shredder，则称 G 是的 hyper-k 连通图。

我们可以将收缩边的概念作如下推广：对于 k-连通图 G 的子图 H，收缩 H 使指将 H 的每一个连通分支的边逐一收缩成一点，所得到的图记为 G/H。若 G/H 仍是 k-连通图，我们称 H 是 G 的 k-可收缩子图。

对于图 G 和 H，如果 G 可以经过如下一系列运算得到 H：1) 去边；2) 去点；3)收缩子图，则称 H 是的子式 G。若 G 是 k-连通图且 G 不能通过上述的三种运算得到另一个 k-连通图，则称 G 是子式极小的 k-连通图。由定义可知，G 是子式极小的 k-连通图，则 G 一定是极小的 k-连通图且也是收缩临界 k-连通图。M. Kriesell 证明了如下结论。

定理 1.1 [2]：设 G 是子式极小的 5-连通图，若 G 是 hyper5-连通图，则 G 最多有个 12 个顶点。

本文我们对收缩临界 5-连通图的最小点割结构进行了研究，推广了 M. Kriesell 的结论，证明了如下结论。

定理 1.2：设 G 是子式极小的 5-连通图，若 G 是 Super 5-连通图，则 G 最多有个 12 个顶点。

2. 定义与引理

我们知道子式极小的 3-连通图是 K_4，子式极小的 4-连通图是 C_6^2 和 K_5，而子式极小的 5-连通图有哪些目前还尚不清楚，而且要确定这些图也是比较困难。

引理 2.1 [3]：设 G 是收缩临界 5-连通图，$x \in V(G)$，$d(x) \ge 6$。若 $\{x_1, x_2\} \in N(x) \cap V_5(G)$ 且 $x_1x_2 \in E(G)$，则 $|N(x) \cap V_5(G)| \ge 3$。

引理 2.2 [3]：设 G 是收缩临界 5-连通图，$x \in V(G)$，A 是 G 中的断片且 $x \in N(A)$。

若 $|A| \ge 3$，$|\overline{A}| \ge 2$ 并且 $N(x) \cap A = \{y\}$，则有 $N(A)$ 存在一个 5 度点 z 与 x 相邻，而且满足 $N(x) \cap A \subseteq N(z) \cap A$ 且 $|N(z) \cap A| \ge 2$。特别地，当 $d(y) \ge 6$ 时，则有 $|d(z) \cap \overline{A}| = 1$。

引理 2.3：设 G 是收缩临界 5-连通图，$A = \{x, y\}$ 是 G 的一个断片。令 B 是相对于 xz 断片，这里 $z \in N(A) \cap N(x)$。如果 $N(A) - \{z\} \subseteq N(y)$，则有 $A \subseteq N(B)$。

引理 2.4 [4]：设 G 是收缩临界 5-连通图，A 是 G 的一个断片，使得 $|A| = 2$ 且有一个 6 度点，则 $N(A)$ 至少有三个 5 度点。

引理 2.5 [4]：设 G 是收缩临界 5-连通图，$x \in V_6(G)$，令 $\xi_x = \{\{x, y\} | y \in N(x)\}$。若 A 为 ξ_x-原子，则 $|A| \le 2$。

引理 2.6 [4]：设 G 是收缩临界 5-连通图且 $|G| \ge 10$，$A = \{u, y\}$ 是 G 的断片，$N(A) = \{x, w_1, w_2, w_3, w_4\}$。若 $d(u) = d(w_i) = 5, (i = 1,2,3,4)$，$xu \notin E(G)$，则 $H_0 = G[\{w_1, w_2, w_3, w_4\}] \cong 2K_2$。

引理 2.7 [4]：设 G 是收缩临界 5-连通图，$S \in \zeta(G)$，若 $L(S)$ 有一个元素的阶至少为 2，则 $L(S)$ 的每个元的阶至少为 4。

引理 2.8 [5]：设 G 是收缩临界 5-连通图，$V_5(G)$ 表示 G 中的 5 度顶点的集合。设 T 是 G 的最小点割，A 是 T-断片且 $|A| \ge 2$。如果 T 中存在 $t_1 \ne t_2$，使得 $|N(t_1) \cap A| = |N(t_2) \cap A| = 1$，则 T 中存在一点 $t \in V_5 \cap (T - \{t_1, t_2\})$，使得 t_1 或者 t_2 与 t 相邻且 $A \subseteq N(t)$。

引理 2.9 [4]：设 G 是子式极小 5-连通图且 $|V(G)| \ge 10$，则 $V_{\ge 6}(G)$ 无边导出子图。

引理 2.10 [4]：设 G 是收缩临界 5-连通图，设 A 为 G 的断片，$x \in N(A)$ 且 $N(x) \cap N(A) \ne \phi$。若 $|\overline{A}| \ge 2$，则 $A \cup T_A$ 中包含 x 的一个 5 度点邻域。

引理 2.11 [4]：设 G 是收缩临界 k-连通图，R 是 shredder，令 $C_1, C_2 \in L(R)$，使得 $|C_1| = |C_2| = 1$。设 $C_1 = \{x\}$，$C_2 = \{y\}$，则 $G + xy$ 仍是收缩临界 k-连通图。

在本文的证明中，我们会反复用到下面断片的结论：

引理 2.12 [6]：若 A，B 为 G 的两个不同的断片，$T_A = N(A)$，$T_B = N(B)$，那么：

1) 若 $A \cap B \ne \phi$，则 $|A \cap T_B| \ge |T_A \cap \overline{B}|$，$|T_A \cap B| \ge |\overline{A} \cap T_B|$；

2) 若 $A \cap B \ne \phi \ne \overline{A} \cap \overline{B}$，则 $A \cap B$ 和 $\overline{A} \cap \overline{B}$ 都是 G 的断片，且 $N(A \cap B) = (T_A \cap B) \cup (T_A \cap T_B) \cup (A \cap T \cap B)$；$N(\overline{A} \cap \overline{B}) = (T_A \cap \overline{B}) \cup (T_A \cap T_B) \cup (\overline{A} \cap T_B)$；

3) 若 $A \cap B \ne \phi$，且 $A \cap B$ 不是断片，则有 $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$，且 $|A \cap T_B| > |T_A \cap \overline{B}|$，$|T_A \cap B| > |\overline{A} \cap T_B|$。

引理 2.13 [4]：设 A 为 G 的断片，$T_A = N(A), S \subseteq N(A)$。若 $|N(S) \cap A| < |S|$，则 $A = N(S)$。

3. 主要结果证明

引理 3.1：设 G 是收缩临界 5-连通图，$|V(G)| \ge 10$，$A = \{x, y\}$ 是 G 的断片，$N(A) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$，$\{x, y\} \cap V_5(G) = \phi$。令 $H = G[N(A) \cap V_5(G)]$，则

1) $|H| \ge 4$；

2) $e(H)\geq 2$， $H\supseteq 2K_2$；

3) H 中没有长为 3 的路；

若 $e(H)\geq 3$，则 $N(A)\subseteq V_5(G)$， $G[N(A)]\cong P_1\cup P_2$。

证明： 1) 由引理 2.4，知 $N(A)$ 中至少有三个 5 度点。不妨设 $\{x_1,x_2,x_3\}\subseteq V_5(G)$。若 $\{x_4,x_5\}\cap V_5(G)=\phi$，我们将导出矛盾。

断言 1： $N(x_4)\cap\{x_1,x_2,x_3\}\neq\phi$， $N(x_5)\cap\{x_1,x_2,x_3\}\neq\varphi$。

我们只证明 $N(x_4)\cap\{x_1,x_2,x_3\}\neq\varphi$。对于 x_5 也可以类似证明。

如若不然，设 x_4 不与 $N(A)$ 中的 5 度点相邻。设 B_1 是相对于 xx_4 的断片。由引理 2.3，我们有 $A\subseteq N(B_1)$。又由假设，我们有 $|B_1\cap N(A)|=|\overline{B}_1\cap N(A)|=2$。不失一般性，设 $B_1\cap N(A)=\{x_1,x_5\}$。于是 x_1 在 $N(A)$ 中不与 5 度点相邻。令 B_2 是相对于 xx_1 的断片，同样由引理 2.3，知 $A\subseteq N(B_2)$。类似地，我们有 $|B_2\cap N(A)|=|\overline{B}_2\cap N(A)|=2$。不失一般性，设 $x_4\in B_2\cap N(A)$。

若 $x_5\in B_2\cap N(A)$，考察 B_1,B_2，我们有 $\{x,y\}\in N(B_1)\cap N(B_2)$， $x_5\in B_1\cap B_2$， $\{x_2,x_3\}\subseteq\overline{B}_1\cap\overline{B}_2$ 且 $x_1\in B_1\cap N(B_2)$， $x_4\in B_2\cap N(B_1)$。由引理 2.12 可知 $B_1\cap B_2$ 和 $\overline{B}_1\cap\overline{B}_2$ 都是 G 的断片。所以 $N(\{x,y\})\cap(B_1\cap B_2)=\{x_5\}$，由引理 2.3， $B_1\cap B_2=\{x_5\}$。于是 $d(x_5)=5$，矛盾。

若 $x_5\in\overline{B}_2\cap N(A)$，不失一般性设 $x_2\in B_2\cap N(A)$。此时考察 B_1,B_2，我们同样可得 $d(x_5)=5$，矛盾。所以断言 1 成立。

不妨设 $x_4x_1\in E(G)$。若 $x_5x_1\in E(G)$，则 $|N(x_1)\cap\overline{A}|=1$ 且 $N(x_1)\cap N(A)=\{x_4,x_5\}$。注意到 $|\overline{A}|\geq 3$，由引理 2.2， $d(x_4)=5$ 或 $d(x_5)=5$，矛盾。所以 $x_5x_1\notin E(G)$，不妨设 $x_5x_2\in E(G)$。

断言 2： $x_3x_1\notin E(G)$ 且 $x_3x_2\notin E(G)$。

不妨设 $x_3x_1\in E(G)$，则 $|N(x_1)\cap\overline{A}|=1$， $N(x_1)\cap N(A)=\{x_4,x_3\}$。由引理 2.2，知 $|N(x_3)\cap\overline{A}|=2$， $N(x_3)N(A)=\{x_1\}$ 且 $N(x_1)\cap\overline{A}\subseteq N(x_3)\cap\overline{A}$。令 B_4 是相对于 xx_2 的断片，显然有 $A\subseteq N(B_4)$。注意到 $N(x_1)\cap N(A)=\{x_4,x_3\}$， $N(x_3)\cap N(A)=\{x_1\}$，我们有 $N(x_2)\cap V_5(G)\cap N(A)=\phi$。于是 $|B_2\cap N(A)|=|\overline{B}_2\cap N(A)|=2$。这与 $x_3x_1x_4$ 是长为 2 的路，矛盾。所以 $x_3x_1\notin E(G)$，类似地 $x_3x_2\notin E(G)$。

由引理 2.10，有 $x_1x_2\in E(G)$。于是 $|N(x_1)\cap\overline{A}|=1$， $|N(x_2)\cap\overline{A}|=1$ 且 $N(x_1)\cap N(A)=\{x_2,x_4\}$， $N(x_2)\cap N(A)=\{x_1,x_5\}$，由引理 2.2 可以导出矛盾。于是 1)成立。

类似于引理 2.6 的证明，我们有 2)的成立。由 1)不妨设 $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\subseteq V_5(G)$。

下面我们来证明 3)。反证法，不妨设 $x_1x_2x_3x_4$ 是 H 中长为 3 的路，则 $|N(x_1)\cap\overline{A}|=1$， $|N(x_3)\cap\overline{A}|=1$。此时我们主要到 $N(x_1)\cap N(A)=\{x_2,x_3\}$， $N(x_3)\cap N(A)=\{x_1,x_4\}$。由引理 2.2，我们知 $|N(x_1)\cap\overline{A}|=2$， $|N(x_4)\cap\overline{A}|=2$。此时显然 x_5 在 $N(A)$ 中没有邻点。

令 B_5 是相对于 xx_5 的断片，易见 $A\subseteq N(B_5)$。由于 x_5 在 $N(A)$ 中没有邻点，有 $|B_2\cap N(A)|=|\overline{B}_2\cap N(A)|=2$。这与 $x_1x_2x_3x_4$ 是 H 中长为 3 的路，矛盾。所以 3)成立。

由 2)，我们设 x_1x_2 和 x_3x_4 是 H 的两条边。由 3)， $\{x_1,x_2\}$ 与 $\{x_3,x_4\}$ 之间没有边。即 $G[\{x_1,x_2,x_3,x_4\}]\cong 2K_2$。所以当 $e(H)\geq 3$ 时我们有 $N(A)\subseteq V_5(G)$ 且 $G[N(A)]\cong P_1\cup P_2$，故 4)成立。于是引理 3.1 成立。

故对 G 收缩临界 5-连通图， $|V(G)|\geq 10$， $A=\{x,y\}$ 是 G 的断片， $N(A)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$， $\{x,y\}\cap V_5(G)=\phi$，则由引理 3.1，不妨设 $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\subseteq V_5(G)$ 且 $x_1x_2\in E(G)$， $x_3x_4\in E(G)$。此时易见 $\{x_1,x_2\}$ 与 $\{x_3,x_4\}$ 之间没有边。

若 $G[N(A)]$ 是连通图，则由引理 3.1，我们有 $d(x_5)\geq 6$， $G[N(A)]$ 是路且易见 x_5 是 $G[N(A)]$ 的中心。

若 $G[N(A)]$ 有两个分支，不妨设 x_1x_2 是其中一个分支，则另一个分支也是一条路。

由上面的结论，我们取 H 中的一条边，不妨设为 $\{x_1,x_2\}$，使得 x_5 与 $\{x_1,x_2\}$ 之间的边尽可能的少。于是若 x_5 与 $\{x_1,x_2\}$ 之间有边，则其与 $\{x_3,x_4\}$ 之间也有边。

引理 3.2： 令 $G_3=G/\{xx_1,yx_2\}$，则 G_3 是 5-连通图。

证明： 令 x_1',x_2' 是 G 分别收缩 XX_1,YX_2 后得到的新顶点。

断言 1 $\delta(G_3)\ge 5$。

若 x_5 与 $\{x_1,x_2\}$ 之间没有边，则易见 $\delta(G_3)\ge 5$。

若 x_5 与 $\{x_1,x_2\}$ 之间有边，则由 $\{x_1,x_2\}$ 的选择，我们不妨设 $x_2x_5\in E(G)$，$x_3x_5\in E(G)$。此时 $G[N(A)]\cong P$，这里 $P=x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$ 是一条路。同样可得 $\delta(G_3)\ge 5$。

断言 2： $k(G_3)\ge 4$ 且 $k(G_3)=4$ 时，$\{x_1',x_2'\}$ 包含在 G_3 的每一个最小点割内。

若 $k(G_3)\le 4$，令 T' 是阶为 3 的最小断片。由 $k(G)=5$，我们有 $\{x_1',x_2'\}\subseteq T'$。令 B' 是 G_3 的 T'-断片。由 $\delta(G_3)\ge 5$，我们有 $|B'|\ge 3$，$|\overline{B'}|\ge 3$。令 T 是将 T' 恢复后所得到的集合。显然，$|T|=5$，$\{x,x_1,y,x_2\}\subseteq T$。另外易见 $B=B',\overline{B}=\overline{B'}$ 是 G 中的 T'-断片。所以 $|N(x)\cap T|\ge 3$。于是由 $d(x)=6$ 可知 $|N(x)\cap B|=1$ 或 $|N(x)\cap \overline{B}|=1$。不妨设 $|N(x)\cap B|=1$。此时由 $N(x)-\{y\}=N(y)-\{x\}$，我们有 $|N(y)\cap B|=1$，$N(y)\cap B=N(x)\cap B$。则由引理 2.1，$|B|=1$，矛盾。所以 $k(G_3)\ge 4$。

若 $k(G_3)=4$，令 T' 是 G_3 的最小点割，B' 是 G_3 的 T'-断片。由于 $\delta(G_3)\ge 5$，$|B'|\ge 2$，$|\overline{B'}|\ge 2$。令 T 是将 T' 恢复后所对应的集合。显然由 $k(G)=5$ 我们有 $\{x_1',x_2'\}\cap T'\ne\phi$。若 $\{x_1',x_2'\}\not\subset T'$，不妨设 $x_2'\in T',x_1'\in B'$。

令 B 是将 B' 恢复后所对应的集合。显然可得，$|T|=5$，$\{y,y_2\}\subseteq T$，$\{x,x_2\}\subseteq B$。由 $N(x)-\{y\}=N(y)-\{x\}$，我们有 $N(y)\cap\overline{B}=\phi$，矛盾。所以断言 2 成立。

下面我们来证 $k(G_3)=5$。如若不然，令 T' 是 G_3 的最小点割，B' 是 G_3 的 T'-断片。则由 $\delta(G_3)\ge 5$，我们有 $|B'|\ge 2$，$|\overline{B'}|\ge 2$。令 T 是将 T' 恢复后所对应的集合。由断言 2，$\{x_1',x_2'\}\subseteq T'$。于是 $|T|=6$，$\{y,x,x_1,x_2\}\subseteq T$。记 $B=B'$ 是 $G-T$ 的一部分。这里为方便讨论，我们仍然记 $\overline{B}=G-T-B$。由 $N(x)-\{y\}=N(y)-\{x\}$，我们有 $N(x)\cap B\ne\phi$，$N(x)\cap\overline{B}\ne\phi$。由对称性，设 $x_3\in B,x_5\in\overline{B}$。下面分两种情况讨论。

情况 1： $G[\{x_3,x_4,x_5\}]$ 不连通。由 $x_3\in B,x_5\in\overline{B}$，则 $x_4x_5\in E(G)$，$x_4\in T$。此时有 $d(x_4)=5$ 以及 $|N(x_4)\cap T|=2$，$|N(x_4)\cap B|\le 1$，或者 $|N(x_4)\cap\overline{B}|\le 1$。不妨设 $|N(x_4)\cap B|\le 1$，则 $N(x_4)\cap B=\{x_3\}$。于是 $(T-\{x,y,x_4\})\cup\{x_3\}$ 是 G 阶为 4 的点割，矛盾。

情况 2： $G[\{x_3,x_4,x_5\}]$ 不连通。

则由 $\{x_1,x_2\}$ 的选择，x_5 在 $N(A)$ 中没有邻点。

若 $|B|=2$，则 $B=\{x_3,t\}$。由 $\{x_1,x_2\}$ 与 $\{x_3,x_4\}$ 之间没有边，有 $t\ne x_4$。于是 $x_4\in T$。

由 x_5 在 $N(A)$ 中没有邻点，有 $|\overline{B}|\ge 3$，显然 $d(t)=5$ 且 $tx_4\in E(G)$。令 $B_1=\overline{B}-\{x_5\}$，则 $N(B_1)=\{x_5\}\cup(T-\{x,y\})$，$|N(B_1)|=5$，$x_4\in N(B_1)$。又由于 $N(x_4)\cap\overline{B_1}=\{x_3,t,x,y\}$，我们有 $N(x_4)\cap N(\overline{B_1})=\phi$，$|N(x_4)\cap B_1|=1$，$|\overline{B_1}|\ge 3$。若 $|B_1|\ge 3$，由引理 2.2 可得到矛盾。

所以设 $|B_1|=2$。注意到 $t\in N(x_1)\cap N(x_2)$，则 $|N(x_1)\cap B_1|=1$，$|N(x_2)\cap B_1|=1$。$\{x_1,x_2\}$ 与 $N(B_1)-\{x_1,x_2\}$ 之间没有边。若 $N(x_1)\cap B_1=N(x_2)\cap B_1$，由引理 2.2 得，$|B_1|=1$，矛盾。

若 $N(x_1)\cap B_1\ne N(x_2)\cap B_1$，则由引理 2.8 得，$N(B_1)-\{x_1,x_2\}$ 与 $\{x_1,x_2\}$ 之间没有边，矛盾。

所以设 $|B|\ge 3$。若 $|\overline{B}|=2$，令 $\overline{B}=\{x_5,h\}$。由 $T-\{x_1,x_2\}\subseteq N(x_5)$，以及 x_5 在 $N(A)$ 中没有邻点，我们有 $x_4\in N(B)$。令 $T=\{x_1,x_2,x,y,z,w\}$，显然易见 $N(h)=\{x_1,x_2,x_5,z,w\}$，$N(x_5)=\{x,y,h,z,w\}$。

令 C 是 G 的相对于 xx_5 的断片，显然 $A\subseteq N(C)$。又由 x_5 在 $N(A)$ 中没有邻点，

$\left|C\cap N(A)\right|=\left|\bar{C}\cap N(A)\right|=2$。不妨设 $C\cap N(A)=\{x_1,x_2\}$，$\bar{C}\cap N(A)=\{x_3,x_4\}$。由 G 是 5-连通图我们有，$C\cap\bar{A}=\phi$，$\bar{C}\cap\bar{A}=\phi$。故 $C\cap\bar{A}$，$\bar{C}\cap\bar{A}$ 都是 G 的断片。所以 $N(x_5)\cap C\cap\bar{A}\neq\phi$。此时易见 $h\in N(C)\cap\bar{A}$。我们不妨设 $N(x_5)\cap\bar{C}\cap\bar{A}=\{z\}$，$N(x_5)\cap C\cap\bar{A}=\{w\}$。由 $\{x_1,x_2\}\subseteq N(h)$，$N(h)\cap C\cap\bar{A}=\{w\}$。于是 $N(\{x_5,h\})\cap\bar{C}=\{w\}$。由引理 2.1，$\bar{C}=\{w\}$，$\{x_1,x_2\}\subseteq N(w)$。故 $N(x_1)\cap B=\phi$，$N(x_2)\cap B=\phi$。因此是 $T-\{x_1,x_2\}$ 是 G 的 4-点割，矛盾。

所以我们设 $\left|\bar{B}\right|\geq 3$，$\left|B\right|\geq 3$。

注意到 $N(x)\cap\bar{B}=\{x_5\}=N(y)\cap\bar{B}$。当 $N(x_1)\cap B=\phi$，则 $T\cup\{x_3\}-\{x,y,x_1\}$ 是 G 的 4-点割，矛盾。所以 $N(x_1)\cap B\neq\phi$，类似的有 $N(x_2)\cap B\neq\phi$。于是 $\left|N(x_1)\cap B\right|\leq 1$，$\left|N(x_2)\cap B\right|\leq 1$。若 $\left|N(x_1)\cap B\right|=0$，则 B 是 G 的断片，$N(B)=T-\{x_1\}$。则有 $\left|N(x_2)\cap B\right|=1$，$N(x_2)\cap N(B)=\{x,y\}$。此时对 x_2 和 B 应用引理 2.2 可导矛盾。所以 $\left|N(x_1)\cap B\right|=1$，类似地有 $\left|N(x_1)\cap B\right|=1$。于是 $\left|N(x_1)\cap\bar{B}\right|=1$，$\left|N(x_2)\cap\bar{B}\right|=1$。令 $B_3=\bar{B}-\{x_5\}$，则 $\left|N(B_3)\right|=5$，$N(x_1)\cap N(B_3)=\{x_2\}$，$N(x_2)\cap N(B_3)=\{x_1\}$。由 $\left|B_3\right|\geq 2$ 以及引理 2.1，我们有 $N(x_1)\cap N(B_3)\neq N(x_2)\cap N(B_3)$。若 $\left|B_3\right|=2$，则由引理 2.8，$N(B_3)-\{x_1,x_2\}$ 中存在一个点与 x_1 或 x_2 相邻，矛盾。若 $\left|B_3\right|\geq 3$，对 x_2 和 B_3 应用引理 2.2 可导出矛盾。

引理 3.3 设 G 是子式极小 5-连通图，且 $S\in\Gamma$ 是 5-shredder，则 $S=N(x)$，这里 $x\in V_5(G)$。

证明：显然，G 收缩临界极小 5-连通图。令 A,B,C 是 $G-S$ 的三个分支。若 A，B 或 C 中有一个阶为 1，则结论成立。于是设 $\left|A\right|\geq 2$，$\left|B\right|\geq 2$，$\left|C\right|\geq 2$。由推论 2.7，$G-S$ 的每一个分的阶至少为 4。记 $S=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$。令 $G_1=G/A$，我们将证明 G_1 是 5-连通图。这与 G 是子式极小，矛盾。

断言 1： $S\cap V_5(G)=\phi$。

否则 $d(x_1)=5$。由于 $G-S$ 有至少三个断片，于是 $G-S$ 至少有一个断片只含 x_1 的一个邻点。不妨设 $\left|N(x_1)\cap A\right|=1$，则由引理 2.2，$N(A)$ 中存在一个 5 度点，设为 x_2，使得 $x_1x_2\subseteq E(G)$ 且 $\left|N(x_2)\cap A\right|\geq 2$。由 $d(x_2)=5$，我们有 $\left|N(x_2)\cap B\right|=1$，$\left|N(x_2)\cap C\right|=1$，$\left|N(x_2)\cap S\right|=\{x_1\}$。同样由引理 2.2，$\left|N(x_1)\cap B\right|\geq 2$，$\left|N(x_1)\cap C\right|\geq 2$。于是 $d(x_1)\geq 1+1+2+2=6$，矛盾。所以断言 1 成立。

由引理 2.9 以及断言 1，我们有 $E(G[S])=0$。

断言 2： $x_i,i=1,2,3,4,5$ 在 $G-S$ 的每个分支内至少有两个邻点。

否则不妨设 $\left|N(x_1)\cap A\right|=1$，则由引理 2.2 可知 $N(A)$ 中存在一个 5 度点，矛盾。

由断言 1 以及断言 2，我们有 $\delta(G_1)\geq 5$ 且 $E(G_1[S])=0$。令 a 将 A 收缩后得到的点。

下面我们来证明 $\kappa(G_1)=5$。否则，设 T' 是 G_1 中阶为 4 的点割，D 是 G_1 的 T'-断片。由 $\delta(G_1)\geq 5$，我们有 $\left|D\right|\geq 2$。

显然 $a\in T'$。我们设 $T'=\{x,y,z,a\}$。于是有 $\left|N(a)\cap D\right|\geq 2$，$\left|N(a)\cap\bar{D}\right|\geq 2$ (否则，不妨设 $\left|N(a)\cap D\right|\leq 1$，则 $D'=D-N(a)$ 是 G_1 的一个断片且 $a\notin N(D')$，此时易见 $N(D')$ 是 G 的 4 点割，矛盾)。不妨设 $\{x_1,x_2\}\subseteq D$，$\{x_3,x_4\}\subseteq\bar{D}$。由 B,C 是 $G-S$ 的连通分支，我们有 $C\cup S$ 和 $B\cup S$ 都有路连接 x_i 和 $x_j,i\neq j$ 且 $i,j\in\{1,2,3,4,5\}$。故 $\{x,y,z\}\cap C\neq\phi$。

于是我们有 $\left|\{x,y,z\}\cap B\right|=1$ 或 $\left|\{x,y,z\}\cap C\right|=1$。不妨设 $\left|\{x,y,z\}\cap B\right|=1$ 且 $x\in B$。此时由断言 2，我们有 $B-\{x\}$ 可以分成两子图 B_1 和 B_2，使得 $N(x_i)\cap N(B_2)=\phi,i=1,2$，$N(x_i)\cap B_1=\phi,i=3,4$。于是我们有 $S\cup\{x\}-\{x_3,x_4\}$ 是 G 的一个 4 点割，矛盾。

推论 3.1：设 G 是子式极小的 5-连通图且有 $\left|V(G)\right|\geq 10$。则对任意最小点割 T，则 $G-T$ 恰好有两个分支。特别的，若 G 还是 Super5-连通，则 G 一定是 hyper5-连通。

证明：由定义，G 是收缩临界的极小 5-连通图。若 $G-T$ 有至少 3 个分支。令 A，B 和 C 是 $G-T$ 的 3 个分支。由引理 2.7 和引理 3.3 我们有 $G-T$ 恰好有 3 个分支且有两个分支只有一个点。不妨设 $\left|B\right|=\left|C\right|=1$，

$B=\{x\}$，$C=\{y\}$。由引理 2.10，$G+xy$ 仍然是收缩临界 5-连通图。于是在 $G+xy$ 中，$D=\{x,y\}$ 是 $G+xy$ 的一个断片，且 x 和 y 在 $G+xy$ 中的度为 6。设 $N(A)=\{x_1,\cdots,x_5\}$，我们如引理 3.2 选取 x_1,x_2。则由引理 3.2，$G+xy/\{xx_1,yx_2\}$ 是 5-连通图。又 $x_1x_2\subseteq E(G)$，我们有 $G+xy/\{xx_1,yx_2\}$ $G/\{xx_1,yx_2\}$，这与 G 是子式极小，矛盾。于是 $G-T$ 恰好有两个分支，当 G 还是 Super5-连通，显然可知，G 是 hyper5-连通。

由定理 1.1 以及推论 3.1，我们可知定理 1.2 成立。

基金项目

国家自然科学基金资助项目：11401119。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, S.R. (1976) Graph Theory with Alications. MacMillan.

[2] Kriesell, M. (2007) How to Contract an Essentially 6-Connected Graph to a 5-Connected Graph. *Discrete Mathematics*, **307**, 494-510. https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.09.040

[3] 覃城阜. 收缩临界 5-连通图的性质[D]: [硕士学位论文]. 桂林: 广西师范大学, 2004.

[4] 覃城阜. 5-连通图的可收缩子图及 minors [D]: [博士学位论文]. 厦门: 厦门大学, 2010.

[5] Kriesell, M. (2005) Triangle Density and Contractibility. *Combinatorics*, *Probability and Computiny*, **14**, 133-146.

[6] Kriesell, M. (2001) A Degree Sum Contio for the Existence of Contraciable Edge in k Connected Graph. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **82**, 81-101.