Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(6), 662-671
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.86089

Hans汉斯

The Limiting Direction of the Derivative of the Solution of the Differential Equation and the Existence of the Baker Wandering Domain

Mina Wu, Ling Qiu*

College of Applied Science, Beijing University of Technology, Beijing
Email: 1625087696@qq.com, *qiuling1978@bjut.edu.cn

Received: Oct. 24th, 2018; accepted: Nov. 5th, 2018; published: Nov. 16th, 2018

Abstract

This paper is devoted to studying the Limiting Direction of the Derivative of the entire Solution *f* of the Differential Equation

$$f'''+A_2(z)e^{P_2(z)}f''+A_1(z)e^{P_1(z)}f'+A_0(z)e^{P_0(z)}f=F(z)$$

and the existence of the Baker Wandering Domain of *f*, where $P_j(z)$ is polynomials of degree $n\geq 1$, $A_j(z)$ and $F(z)$ are entire functions with $\max\{\sigma(A_j),\sigma(F),j=0,1,2\}<n$.

Keywords

Julia Set, Limiting Direction, Baker Wandering Domain

微分方程整函数解的导数的径向分布和解的Baker游荡域的存在性

吴米娜，邱　玲*

北京工业大学，应用数理学院，北京
Email: 1625087696@qq.com, *qiuling1978@bjut.edu.cn

收稿日期：2018年10月24日；录用日期：2018年11月5日；发布日期：2018年11月16日

*通讯作者。

文章引用: 吴米娜, 邱玲. 微分方程整函数解的导数的径向分布和解的 Baker 游荡域的存在性[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 662-671. DOI: 10.12677/pm.2018.86089

摘 要

本文研究了一类形如：

$$f'''+A_2(z)e^{P_2(z)}f''+A_1(z)e^{P_1(z)}f'+A_0(z)e^{P_0(z)}f=F(z)$$

的非齐次线性微分方程解f的导数的Julia集的径向分布问题以及讨论了方程的解的Baker游荡域的存在性。其中$P_j(z)$是次数$n\ge 1$的多项式，$A_j(z)$，$F(z)$是级小于n的整函数。

关键词

Julia集，径向分布，Baker游荡域

1. 引言和主要结论

本文假定读者熟悉 Navanlinna 的值分布理论及其符号，详见[1] [2] [3]。另外还需要一些亚纯函数动力系统的基础知识，详见[4] [5]，设f为复平面上的一个亚纯函数，我们分别用$\sigma(f)$和$\mu(f)$来表示函数的级和下级，其定义详见[6]。

设$f:C\to\bar{C}$为超越亚纯函数，其中C是复平面，$\bar{C}=C\cup\infty$。我们用$f^n\,(n\in N)$来表示函数f的n次迭代。f的 Fatou 集$F(f)$是复平面上的一个子集，f的迭代f^n在其上是正规的。$F(f)$在复平面上的补集称为f的 Julia 集$J(f)$。易见，$F(f)$是开集，$J(f)$是非空闭集。

我们记$\Omega(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$，其中$0\le\alpha<\beta\le 2\pi$。给定$\theta\in[0,2\pi)$，对于任意的$\varepsilon>0$，如果$\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)\cap J(f)$是无界的，那么称射线$\arg z=\theta$为$J(f)$的径向分布。定义$\Delta(f)=\{\theta\in[0,2\pi):\arg z=\theta$是$J(f)$的径向分布。显然，$J(f)$是可测的闭集。我们用$mes\Delta(f)$来表示$J(f)$的线性测度。

关于超越亚纯函数 Julia 集的径向分布已经有很多重要的研究成果，详见[7]-[12]。1994 年，乔建永在[8]中证明了若超越整函数f的下级$\mu(f)<\infty$，那么$mes\Delta(f)\ge\min\{2\pi,\pi/\mu(f)\}$。2014 年，Z. G. Huang，J. Wang 在[13]中考虑了下级为无穷的超越亚纯函数，并给出了相应的径向分布的估计。

定理 A [13]假设$A_i(z),i=0,1,\cdots,n-1$是具有有限下级的整函数，其中$A_0(z)$是超越的，如果$m(r,A_i)=o(m(r,A_0))$，那么对于方程

$$f^{(n)}+A_{n-1}(z)f^{(n-1)}+\cdots+A_0(z)f=0 \tag{1.1}$$

的任意解$f\ne 0$，有$mes\Delta(f)\ge\min\{2\pi,\pi/\mu(A_0)\}$。

对于整函数及其导数，他们的局部性质的差异是惊人的，因为对于一些给定的整函数，很小的参数扰动会导致动力学性质的巨大变化[14]。因此，整函数及其导数之间的动力学性质似乎没有紧密的联系。然而，乔建永证明了下级有限的超越整函数及其导数的 Julia 集的径向分布大部分是相同的且它们的分布密度相互影响。那么对于下级为无穷的整函数，它与它的导数之间的 Julia 集的径向分布会有什么样的关系呢？根据对数导数引理，我们可以很容易得到方程(1.1)的每一个非平凡整函数解的下级是无穷的，详

细证明过程参见文献[13]。2014 年，张国威，丁杰，杨连中在[15]中研究方程(1.1)的整函数解的导数的 Julia 集的径向分布，其中其他系数为 $A_0(z)$ 的小函数，从而部分地回答了上面提到的问题。

定理 B [15]设 $A_i(z), i=0,1,\cdots,n-1$ 是下级有限的整函数且 $A_0(z)$ 是超越的，满足当 $r\to\infty$ 时，$m(r,A_i)=o(m(r,A_0))$，那么，方程(1.1)的每一个非平凡解 f 满足 $mes\left(\Delta(f)\cap\Delta\left(f^{(k)}\right)\right)\ge\min\left\{2\pi,\pi/\mu(A_0)\right\}$，其中 k 为正整数。

那么我们自然要问，当系数的级相同时，无穷下级的整函数的 $J(f)$ 的径向分布测度有什么特点。2016 年，J. Wang，Z. X. Chen 在[16]中研究了方程

$$f''+\left(A_1(z)e^{P_1(z)}+B_1(z)\right)f'+\left(A_2(z)e^{P_2(z)}+B_2(z)\right)f=0 \tag{1.2}$$

并得出了如下结论。

定理 C [16]设 $k_1+k_2\ne 0$ 且 $\max\left\{\sigma(A_j),\sigma(B_j)\right\}<k_j\ (j=1,2)$ 对所有 $k_j>0$。若 $k_j=0$，那么 A_j 和 B_j 是常数。设 f 为方程(1.2)的非平凡解，定义

$$E(f):=\bigcap_{n\in Z}\Delta f^{(n)},$$

那么

1) 若 $k_1<k_2$，那么 $\mu(f)=\infty, mesE(f)\ge\pi$；

2) 若 $k_1=k_2, a_1/a_2=b<1$，那么 $\mu(f)=\infty, mesE(f)\ge\pi$；

3) 若 $k_1=k_2, a_1/a_2=b\notin R$，那么 $(f)=\infty, mesE(f)\ge\min\left\{\arg b, 2\pi-\arg b\right\}$。

接下来，我们介绍角域内的 Nevanlinna 理论，详见[13] [16]。

定义 1 设 $0\le\alpha<\beta\le 2\pi$，引入记号：

$$\Omega(\alpha,\beta,r)=\left\{z:\alpha<\arg z<\beta,|z|<r\right\};$$

$$\bar{\Omega}(\alpha,\beta,r)=\left\{z:\alpha\le\arg z\le\beta,|z|<r\right\};$$

$$\Omega^*(\alpha,\beta,r)=\left\{z:\alpha<\arg z<\beta,|z|\ge r\right\}.$$

定义 2 假设 $f(z)$ 是角域 $\bar{\Omega}(\alpha,\beta)$ 上的亚纯函数，其中 $0<\beta-\alpha<2\pi, \omega=\pi/\beta-\alpha$，定义：

$$A_{\alpha,\beta}=\frac{\omega}{\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{t^{\omega}-t^{\omega}/r^{2\omega}}\right)\left\{\log^+\left|f\left(tr^{i\alpha}\right)\right|+\log^+\left|f\left(tr^{i\beta}\right)\right|\right\}\frac{dt}{t},$$

$$B_{\alpha,\beta}=\frac{2\omega}{\pi r^{\omega}}\int_{\alpha}^{\beta}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\sin\omega(\theta-\alpha)\,d\theta,$$

$$C_{\alpha,\beta}=2\sum_{1<|b_n|<r}\left(\frac{1}{|b_n|^{\omega}}-\frac{|b_n|^{\omega}}{r^{2\omega}}\right)\sin\omega(\beta_n-\alpha),$$

$$S_{\alpha,\beta}(r,f)=A_{\alpha,\beta}(r,f)+B_{\alpha,\beta}(r,f)+C_{\alpha,\beta}(r,f),$$

其中 $b_n=|b_n|e^{i\beta_n}$ 是 $f(z)$ 在 $\bar{\Omega}(\alpha,\beta)$ 上的极点，记其重数。$S_{\alpha,\beta}(r,f)$ 表示 $f(z)$ 在角域 $\bar{\Omega}(\alpha,\beta)$ 上的特征函数，$C_{\alpha,\beta}$ 称为 $f(z)$ 在角域 $\bar{\Omega}(\alpha,\beta)$ 上的计数函数。

定义 3 假设 $f(z)$ 是角域 $\bar{\Omega}(\alpha,\beta)$ 上的亚纯函数，定义其在角域上的级为：

$$\sigma_{\alpha,\beta}(g)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{S_{\alpha,\beta}(r,g)}{\log r}.$$

定义 4 如果 U 是 $F(f)$ 的一个分支，那么对于每个 $n>1$，都存在 $F(f)$ 的一个分支 $U_n\supseteq f^n(U)$，其

中 $f^n(n\in N)$ 表示函数 f 的 n 次迭代。如果存在整数 $n\ge 0, m>0$，使得 U_n+U_{n+m} 不等于空集，我们就说 U_n 是一个周期域。如果对于所有满足 $n,m\ge 0, n\ne m$ 的整数，有 U_n+U_m 等于空集，我们就称 U 是一个游荡域。

定理 1 设 $P_j(z)=\sum_{i=0}^{n}a_{ij}z^i\ (j=0,1,2)$ 是次数 $n\ge 1$ 的多项式，其中 a_{ij} 是复数。令 $A_j(z)$，$F(z)$ 是级小于 n 的整函数。设 $a_{n0}/a_{n1}=b, a_{n0}/a_{n2}=c$，其中复数 $a_{nj}=a_j+ib_j\ (j=0,1,2)$，满足当 $a_0b_1<0, a_2b_0<0$ 时，有 $a_0b_0>0$ 成立。若 f 为方程

$$f'''+A_2(z)e^{P_2(z)}f''+A_1(z)e^{P_1(z)}f'+A_0(z)e^{P_0(z)}f=F(z) \tag{1.3}$$

的非平凡解，定义：

$$I(f):=\bigcap_{n\in Z}\Delta f^{(n)},$$

1) 若 $b,c>1$，那么 $\mu(f)=\infty, mesI(f)\ge\pi$；

2) 若 $b,c\notin R$，那么 $\mu(f)=\infty, mesI(f)\ge\min\{\arg b,\arg c,2\pi-\arg b,\pi-\arg b/c\}$。

定理 2 若 $P_j(z),A_j(z),F(z)$ 是满足定理 1 的多项式，若 $b,c>1$ 或 $b,c\notin R$，那么 $f^n(n\in N)$ 没有 Baker 游荡域，即只有单连通 Fatou 分支。

定理 3 定义：

$$I(f):=\bigcap_{n\in Z}\Delta f^{(n)},$$

若 f 是方程

$$f^{(k)}+e^{az}f''+e^{bz}f=0, k=2,3,\cdots,n \tag{1.4}$$

的解，其中 a,b 为常数且满足 $b>a$，那么 $\mu(f)=\infty, mesI(f)=2\pi$。

2. 主要引理

引理 1 [17]设 $f(z)$ 是开平面上的超越亚纯函数。$\alpha>1$ 是给定的数，对于任何给定的 $\varepsilon>0$，

1) 存在一个常数 $B>0$ 和有有限对数测度的集合 $H_1\subset(0,\infty)$，对所有满足 $|z|=r\notin H_1$ 的 z 我们有

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right|\le B\left[\frac{T(\alpha r,f)}{r}(\log r)^{\alpha}\log T(\alpha r,f)\right]^{j-i},(0\le i<j).$$

2) 存在一个零线性测度的集合 $H_2\subset[0,2\pi)$，存在常数 $B>0$（只依靠 α），使得对于 $\theta\in[0,2\pi)\setminus H_2$，存在常数 $R_0=R_0(\theta)>1$，使得对于所有满足 $\arg z=\theta, |z|=r>R_0$ 我们有

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right|\le B\left[\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log T(\alpha r,f)\right]^{j-i},(0\le i<j).$$

引理 2 [16]设 $P(z)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i\ (a_n=\alpha+i\beta\ne 0)$ 是一个非常数的多项式且次数 $n\ge 1$，其中 a_i 是复数。$A(z)$ 是级 $\sigma(A)<n$ 的非零整函数。设定 $g(z)=A(z)e^{P(z)}$，$z=re^{i\theta}$，$\delta(P,\theta)=\delta(a_{nj}z^n,\theta)=\alpha\cos(n\theta)-\beta\sin(n\theta)$。那么对任意的 $\varepsilon>0$，存在零线性测度的集合 $E\subset[0,2\pi)$，使得若 $\theta\in[0,2\pi)\setminus(E\cup H_3)$，其中 $H_3=\{\theta\in[0,2\pi):\delta(P,\theta)=0\}$ 是一有限集，那么对充分大的 $|z|=r$，我们有

1) 若 $\delta(P,\theta)>0$，那么

$$\mathrm{e}^{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n} \le \left|g\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| \le \mathrm{e}^{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n}.$$

2) 若 $\delta(P,\theta)<0$，那么

$$\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n} \le \left|g\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| \le \mathrm{e}^{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n}.$$

注 1 对于多项式 $P(z)$，我们定义：

$$S_j(P,\theta)=\left\{\theta:-\frac{\arg(\alpha+i\beta)}{n}+(2j-1)\frac{\pi}{2n}<\theta<-\frac{\arg(\alpha+i\beta)}{n}+(2j+1)\frac{\pi}{2n}\right\}.$$

其中 $j=0,1,\cdots,2n-1$。由多项式的基本特征[18]，若 $\theta\in S_j$，当 j 为偶数时，$\delta(P,\theta)>0$，当 j 为奇数时，$\delta(P,\theta)<0$。

引理 3 [19]设 $g(z)$ 是开平面的亚纯函数且 $\sigma(g)=\sigma<\infty$。那么对任意 $\varepsilon>0$，存在有限线性测度和有限对数集合 $H_6\subset(1,\infty)$ 使得当 $|z|=r\notin[0,1]\cup H_6$，$r\to\infty$，我们有

$$|g(z)|\le \mathrm{e}^{r^{\sigma+\varepsilon}}.$$

引理 4 [16]设 $f(z)$ 是整函数且满足 $mesI(f)<2\pi, n\ge1$ 是正整数。若 $(\alpha,\beta)\not\subset I(f)$，那么我们有 $(\alpha_0,\beta_0)\subset(\alpha,\beta)$ 使得

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\le Kr^M\ (s=1,2,\cdots,n)$$

对于 $z\in\Omega(\alpha_0,\beta_0)$ 成立，可能需除去一个有限线性测度的集合，其中 M 和 K 是两个和 z 无关的量。

引理 5 [16]假设 $f(z)$ 是一个至多有有限多个极点的超越亚纯函数，且其 Julia 集 $J(f)$ 只有有界分支，那么对于任何一个复数 a，都存在一个常数 $0<d<1$ 和两个数列 $\{r_n\}$ 和 $\{R_n\}$，满足当 $r\to\infty$ 时，$r_n\to\infty$ $\frac{R_n}{r_n}\to\infty$，使得

$$M(r,a,f)\le L(r,a,f), r\in G,$$

其中 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n<r<R_n\}$ 具有无穷对数测度，$M(r,a,f)=\max\{|f(z)|:|z-a|=r\}$。

引理 6 [16]设 $p_j(x)(j=1,2,\cdots,n)$ 和 $f(z)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续的复值函数，$P_j(z)$ 和 $F(x)$ 是非负的连续函数且满足 $|p_j(x)|\le P_j(z),|f(z)|\le F(x)$。假若 $v(x)$ 和 $V(x)$ 分别为方程

$$v^{(n)}-\sum_{j=1}^{n}p_j(x)v^{(n-j)}=f(x)$$

和

$$V^{(n)}-\sum_{j=1}^{n}P_j(x)V^{(n-j)}=F(x)$$

的解，若 $V^{(k)}(a)\ge\left|v^{(k)}(a)\right|(k=0,1,\cdots,n-1)$，那么对 $x\in[a,b]$ 有 $\left|v^{(k)}(a)\right|\le\left|V^{(k)}(a)\right|$。

引理 7 [16]设 $f(z)$ 是在 $\Omega(\alpha-\varepsilon,\beta+\varepsilon)$ 上的亚纯函数，其中 $\varepsilon>0$，$0<\alpha<\beta<2\pi$。那么

$$A_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{f'}{f}\right)+B_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{f'}{f}\right)\le K\left(\log^+ S_{\alpha-\varepsilon,\beta+\varepsilon}(r,f)+\log r+1\right)$$

对于 $r>1$ 成立，至多除去一个有限线性测度的集合。

3. 定理的证明

定理 1 的证明：

1) $\frac{a_{n1}}{a_{n0}}=\frac{1}{b}<1,\frac{a_{n2}}{a_{n0}}=\frac{1}{c}<1$ 设 $\frac{1}{b}=\mu,\frac{1}{c}=\nu$，令 $d=\max\{1,\mu,\nu\}$，因此有 $\delta(P_1,\theta)\le d\delta(P_0,\theta)$，$\delta(P_2,\theta)\le d\delta(P_0,\theta)$。设 $\sigma(F)=l<n$，取 $0<\varepsilon<\min\left\{\frac{1-d}{1+d},n-l\right\}$，因此 $d(1+\varepsilon)<(1-\varepsilon)$。

由(1.1)和引理 1 知，存在一个零线性测度的集合 $H_1\subset[0,2\pi)$，存在常数 $B>0$（只依靠 α），使得对于 $\theta\in[0,2\pi)\setminus H_1$，存在常数 $R_0=R_0(\theta)>1$，使得对于所有满足 $\arg z=\theta,|z|=r>R_0$ 我们有

$$\begin{aligned}\left|A_0\mathrm{e}^{P_0}\right| &\le \left|\frac{F}{f}\right|+\left|\frac{f'''}{f}\right|+\left|A_2\mathrm{e}^{P_2}\right|\left|\frac{f''}{f}\right|+\left|A_1\mathrm{e}^{P_1}\right|\left|\frac{f'}{f}\right| \\ &\le \left(1+\left|A_2\mathrm{e}^{P_2}\right|+\left|A_1\mathrm{e}^{P_1}\right|+\left|\frac{F}{f}\right|\right)BT(2r,f)^3\end{aligned}\tag{3.1}$$

对 $A_i\mathrm{e}^{P_i},i=0,1,2$ 应用引理 2，存在零线性测度的集合 $H_2\subset[0,2\pi)$，使得若 $\theta\in S_j(P_0,\theta)\setminus(H_1\cup H_2)$，$j=0,2,\cdots,2n-2$，其中 $H_2=\{\theta\in[0,2\pi):\delta(P_0,\theta)=\delta(P_1,\theta)=\delta(P_2,\theta)=0\}$ 是一有限集，那么对充分大的 $|z|=r$，我们有

$$\mathrm{e}^{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta)r^n}\le\left|A_0\mathrm{e}^{P_0}\right|\tag{3.2}$$

$$\left|A_i\mathrm{e}^{P_i}\right|\le\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)d\delta(P_0,\theta)r^n},i=1,2\tag{3.3}$$

由级的定义及引理 3 可知，存在有限线性测度和有限对数集合 $H_3\subset(1,\infty)$ 使得当 $|z|=r\notin[0,1]\cup H_3$，$r\to\infty$，我们有

$$\left|\frac{F}{f}\right|\le|F|\le\mathrm{e}^{r^{l+\varepsilon}}\tag{3.4}$$

将(3.2) (3.3) (3.4)代入(3.1)，对所有 $\theta\in S_j(P_0,\theta)\setminus(H_1\cup H_2)$，$|z|=r\notin[0,1]\cup H_3$，$r\to\infty$，$j$ 是偶数，有

$$\mathrm{e}^{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta)r^n}\le 4B\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)d\delta(P_0,\theta)r^n}T(2r,f)^3\tag{3.5}$$

由于 $0<\varepsilon<\min\left\{\frac{1-d}{1+d},n-l\right\}$，可知 $\mu(f)=\infty$。通过注 1 可知，当 j 为偶数时，$S_j(P_0,\theta)$ 是 n 个线性测度为 $\frac{\pi}{n}$ 的开区间，接下来，我们来证明 $S_j(P_0,\theta)\subset I(f)$，否则，一定存在一个开区间 $S_{j_0}(P_0,\theta)\not\subset I(f)$，$j_0\in 0,2,\cdots,2n-2$。由引理 4 知，存在 $(\alpha_0,\beta_0)\subset(\alpha,\beta)$ 使得

$$\left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right|\le Kr^M\ (s=1,2,3)\tag{3.6}$$

对于 $z\in\Omega(\alpha_0,\beta_0)$ 成立，可能需除去一个有限线性测度的集合 E_1，其中 M 和 K 是两个和 z 无关的量。

将(3.2) (3.3) (3.4) (3.6)代入(3.1)，可得对所有 $\theta\in(\alpha_0,\beta_0)$ 和充分大的 $r\notin E_1$，我们有

$$\mathrm{e}^{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta)r^n}\le 4\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)d\delta(P_0,\theta)r^n}Kr^M\tag{3.7}$$

由于 $\delta(P,\theta)>0$，因此，矛盾。所以 $S_j(P_0,\theta)\subset I(f)$。因此 $mesI(f)\ge\pi$。

2) 若 $\frac{a_{n0}}{a_{n1}}=b\notin R,\frac{a_{n0}}{a_{n2}}=c\notin R$，设 $\frac{a_{n2}}{a_{n1}}=d=\frac{b}{c}\notin R$。

情况 1：$\arg b\in(0,\pi),\arg c\in(0,\pi),\arg d\in(0,\pi)$，由注 1 可知

$$S_j(\theta)=S_j(P_2,\theta)\cap S_{j+1}(P_0,\theta)\cap S_j(P_1,\theta),j=1,3,\cdots,2n-1\tag{3.8}$$

是n个开区间，其中每个开区间的线性测度为$\frac{\arg c}{n}$，这些区间$S_j(\theta)$满足若$\theta\in S_j(P_0,\theta)$，$j=1,3,\cdots,2n-1$，那么

$$\delta(P_0,\theta)>0,\delta(P_1,\theta)<0,\delta(P_2,\theta)<0 \tag{3.9}$$

因此，由引理2，取$0<\varepsilon<\min\left\{\frac{1-d}{1+d},n-l\right\}$，存在零线性测度的集合$E_2\subset[0,2\pi)$，使得若$\theta\in S_j(\theta)\backslash(E_2\cup H_4)$，$j=1,3,\cdots,2n-1$，其中$H_4=\{\theta\in[0,2\pi):\delta(P_0,\theta)=\delta(P_1,\theta)=\delta(P_2,\theta)=0\}$是一有限集，那么对充分大的$|z|=r$，我们有

$$e^{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta)r^n}\le\left|A_0e^{P_0}\right| \tag{3.10}$$

$$\left|A_ie^{P_i}\right|\le e^{(1+\varepsilon)d\delta(P_0,\theta)r^n},i=1,2 \tag{3.11}$$

将(3.4) (3.10) (3.11)代入(3.1)得

$$e^{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta)r^n}\le\left(2e^{r^{l+\varepsilon}}+e^{(1-\varepsilon)\delta(P_1,\theta)r^n}+e^{(1-\varepsilon)\delta(P_1,\theta)r^n}\right)BT(2r,f)^3 \tag{3.12}$$

因为$\delta(P_0,\theta)>0,\delta(P_1,\theta)<0,\delta(P_2,\theta)<0$，得$\mu(f)=\infty$。

若$S_j(\theta)\not\subset I(f)$，由引理4知，存在$(\alpha_0,\beta_0)\subseteq S_j(\theta)$，使得

$$\left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right|\le Kr^M\ (s=1,2,3) \tag{3.13}$$

对所有$z\in\Omega(\alpha_0,\beta_0)$成立，$|z|=r\notin E_3$，$mesE_3<\infty$，其中$K,M$是整数。

将(3.13)代入(3.12)得

$$e^{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta)r^n}\le\left(2e^{r^{l+\varepsilon}}+e^{(1-\varepsilon)\delta(P_1,\theta)r^n}+e^{(1-\varepsilon)\delta(P_1,\theta)r^n}\right)Kr^M \tag{3.14}$$

因为$\delta(P_0,\theta)>0,\delta(P_1,\theta)<0,\delta(P_2,\theta)<0$，$0<\varepsilon<\min\left\{\frac{1-d}{1+d},n-l\right\}$，矛盾。所以$S_j(\theta)\subset I(f)$，$j\in(1,3,\cdots,2n-1)$，因此$mesI(f)\ge\arg c$。

情况2：$\arg b\in(0,\pi),\arg c\in(0,\pi),\arg d\in(\pi,2\pi)$，现在$S_j(\theta)$在(3.8)中是由$n$个线性测度为$\frac{\arg c}{n}$的开区间组成，使用和情况1相同的方法，可得$\mu(f)=\infty$。并且可以证明$S_j(\theta)\subset I(f),j\in(1,3,\cdots,2n-1)$。因此可得$mesI(f)\ge\arg b$。

情况3：$\arg b\in(\pi,2\pi),\arg c\in(\pi,2\pi),\arg d\in(\pi,2\pi)$，现在$S_j(\theta)$在(3.8)中是由$n$个线性测度为$\frac{2\pi-\arg b}{n}$的开区间组成，使用和情况1相同的方法，可得$\mu(f)=\infty$。并且可以证明$S_j(\theta)\subset I(f),j\in(1,3,\cdots,2n-1)$。因此可得$mesI(f)\ge2\pi-\arg b$。

情况4：$\arg b\in(\pi,2\pi),\arg c\in(\pi,2\pi),\arg d\in(0,\pi)$，现在$S_j(\theta)$在(3.8)中是由$n$个线性测度为$\frac{2\pi-\arg b}{n}$的开区间组成，使用和情况1相同的方法，可得$\mu(f)=\infty$。并且可以证明$S_j(\theta)\subset I(f),j\in(1,3,\cdots,2n-1)$。因此可得$mesI(f)\ge2\pi-\arg b$。

情况5：$\arg b\in(0,\pi),\arg c\in(\pi,2\pi),\arg d\in(0,\pi)$，现在$S_j(\theta)$在(3.8)中是由$n$个线性测度为$\frac{2\pi-\arg b}{n}$的开区间组成，使用和情况1相同的方法，可得$\mu(f)=\infty$。并且可以证明$S_j(\theta)\subset I(f),j\in(1,3,\cdots,2n-1)$。因此可得$mesI(f)\ge2\pi-\arg b$。

情况 6：$\arg b\in(0,\pi),\arg c\in(\pi,2\pi),\arg d\in(\pi,2\pi)$，现在 $S_j(\theta)$ 在(3.8)中是由 n 个线性测度为 $\dfrac{2\pi-\arg b}{n}$ 的开区间组成，使用和情况 1 相同的方法，可得 $\mu(f)=\infty$。并且可以证明 $S_j(\theta)\subset I(f),j\in(1,3,\cdots,2n-1)$。因此可得 $mesI(f)\ge 2\pi-\arg b$。

情况 7：$\arg b\in(\pi,2\pi),\arg c\in(0,\pi),\arg d\in(0,\pi)$，现在 $S_j(\theta)$ 在(3.8)中是由在 n 个线性测度为 $\dfrac{\pi-\arg d}{n}=\dfrac{\pi-\arg\frac{b}{c}}{n}$ 的开区间组成，使用和情况 1 相同的方法，可得 $\mu(f)=\infty$。并且可以证明 $S_j(\theta)\subset I(f),j\in(1,3,\cdots,2n-1)$。因此可得 $mesI(f)\ge\pi-\arg\dfrac{b}{c}$。

情况 8：当 $\arg b\in(\pi,2\pi),\arg c\in(0,\pi)$，因为 $a_{nj}=a_j+ib_j\,(j=0,1,2)$，计算得：

$$\frac{a_{n0}}{a_{n1}}=\frac{(a_0a_1+b_0b_1)+(a_1b_0-a_0b_1)i}{a_1^2+b_1^2},$$

$$\frac{a_{n0}}{a_{n2}}=\frac{(a_0a_2+b_0b_2)+(a_2b_0-a_0b_2)i}{a_2^2+b_2^2},$$

$$\frac{a_{n2}}{a_{n1}}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_1^2+b_1^2},$$

因此 $a_1b_0-a_0b_1<0$，$a_2b_0-a_0b_2>0$，由于当 $a_0b_1<0,a_2b_0<0$ 时，有 $a_0b_0>0$ 成立，即 $a_1b_0<a_0b_1<0$，$a_0b_2<a_2b_0<0$。故 $a_1b_2a_0b_0>a_2b_1a_0b_0$，因为 $a_0b_0>0$。因此 $\arg d\notin(\pi,2\pi)$。所以可以归结为以上七种情况。因此得证。

定理 2 的证明：若 $b,c>1$，可知 $S_j(P_0,\theta)=S_j(P_1,\theta)=S_j(P_2,\theta)$。若 $b,c\notin R$，由定理 1 可知 $S_j(\theta)=S_j(P_2,\theta)\cap S_{j+1}(P_0,\theta)\cap S_j(P_1,\theta),j=1,3,\cdots,2n-1$ 不等于空集。由注 1 可知，存在奇数 j_1,j_2,j_3，使得开区间 $S_{j1}(P_2,\theta)\cap S_{j2}(P_0,\theta)\cap S_{j3}(P_1,\theta)$ 不等于空集。

因此，存在 θ_1,θ_2 和 M 满足 $\theta_1<\theta_2,n\le M,\dfrac{\pi}{\theta_2-\theta_1}<M$。使得若 $\theta\in(\theta_1,\theta_2)$，那么 $\delta(P_0,\theta)<0$，$\delta(P_1,\theta)<0,\delta(P_2,\theta)<0$。由 Phragmén-Lindelöf 原理，可知对任意的 $z\in\bar{\Omega}(\theta_1,\theta_2)$，

$$\left|A_0(z)e^{P_0(z)}\right|,\left|A_1(z)e^{P_1(z)}\right|,\left|A_2(z)e^{P_2(z)}\right|$$

是有界的，因此

$$\max\left\{\left|A_0(z)e^{P_0(z)}\right|,\left|A_1(z)e^{P_1(z)}\right|,\left|A_2(z)e^{P_2(z)}\right|\right\}<K \tag{3.15}$$

其中 $K>0$ 是一常数。对于情况 $n\le 0$，对于方程(1.2)，$\phi(z)=f^{(n)}(z)$ 一定满足以下方程

$$\phi^{(m)}+A_2(z)e^{P_2(z)}\phi^{(m-1)}+A_1(z)e^{P_1(z)}\phi^{(m-2)}+A_0(z)e^{P_{01}(z)}\phi^{(m-3)}=F(z) \tag{3.16}$$

其中 $m=-n+3$。设 $\varphi(r)=\phi(re^{i\theta})$，因为 $\varphi^{(k)}(r)=e^{ki\theta}\phi(re^{i\theta}),k\in N$，那么

$$\varphi^{(m)}+A_2(z)e^{P_2(z)}e^{i\theta}\varphi^{(m-1)}+A_1(z)e^{P_1(z)}e^{2i\theta}\varphi^{(m-2)}+A_0(z)e^{P_{01}(z)}e^{3i\theta}\varphi^{(m-3)}=F(z) \tag{3.17}$$

定义 $\psi(r)=e^{2Kr}$，那么 $\psi(r)$ 满足方程

$$\psi^{(m)}-\frac{2K}{3}\psi^{(m-1)}-\frac{4K^2}{3}\psi^{(m-2)}-\frac{8K^3}{3}\psi^{(m-3)}=0 \tag{3.18}$$

令 $M_0=\max\left\{1,|\phi(0)|,(2K)^{-j}\left|\phi^{(j)}(0)\right|,j=0,1,\cdots,m\right\}$，那么

$$\left|\phi(0)\right| \le M_0\psi_0, \left|\phi^{(j)}(0)\right| \le M_0\psi_0^{(j)}, j=0,1,\cdots,m \tag{3.19}$$

由引理 6 可知，

$$\left|\phi\left(re^{i\theta}\right)\right| = \left|\varphi(r)\right| \le M_0\psi_0 = M_0 e^{2Kr}$$

对所有 $\theta\in(\theta_1,\theta_2)$ 成立。因此，这意味着

$$\log^+\left|f^{(n)}\right| \le M_1 r, z\in\bar{\Omega}(\theta_1,\theta_2),$$

其中 M_1 是常数。因为 $f(z)$ 是整函数，因此对于 $n\le 0$，我们有

$$S_{\theta_1,\theta_2}\left(r, f^{(n)}\right) = O(r) \tag{3.20}$$

当 $n>0$，由(3.20)和引理 7，可知对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$S_{\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon}\left(r, f^{(n)}\right) = O(r) + O(\log r) = O(r), r\notin E_1 \tag{3.21}$$

成立，其中 E_1 是一有限线性测度的集合。

假设 $g=f^{(n)}$ 有 Baker 游荡域，在[20]中，证明了有限多个极点的超越亚纯函数 f 的 Julia 集只有有界分支当且仅当有 Baker 游荡域。因此可知 $J(g)$ 只有有界 Julia 分支。由引理 5，存在 $0<d<1$，使得

$$\left|g(z)\right| \ge M(r,g)^d, r\in G \tag{3.22}$$

其中 G 是具有无穷对数测度的集合。通过上式可得

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta}(r,g) &\ge B_{\alpha,\beta}(r,g) \ge \frac{2\omega}{\pi r^{\omega}}\int_\alpha^\beta \log^+\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|\sin\omega(\theta-\alpha)\,d\theta \\ &\ge \frac{2\omega}{\pi r^{\omega}}\int_\alpha^\beta d\log^+ M(r,g)\frac{2}{\pi}\sin\omega(\theta-\alpha)\,d\theta \\ &\ge \frac{2d}{r^{\omega}}\log M(r,g), r\in G\setminus E_1 \end{aligned} \tag{3.23}$$

其中 $\alpha=\theta_1+\varepsilon, \beta=\theta_2-\varepsilon, \omega=\dfrac{\pi}{\theta_2-\theta_1-2\varepsilon}$，对于 $n>0$，$\alpha=\theta_1, \beta=\theta_2, \omega=\dfrac{\pi}{\theta_2-\theta_1}$，对于 $n\le 0$，由(3.23)可知

$$\log M(r,g) \le \frac{r^{\omega}}{2d}S_{\alpha,\beta}(r,g) = S_{\alpha,\beta}\left(r, f^{(n)}\right) = O(1), r\in G\setminus E_1 \tag{3.24}$$

由上式可得 $\mu(g)<\infty$。又因为 $\mu(f)=\infty$，由于 f' 和 f 由相同的级和下级，因此矛盾。即证 $g=f^{(n)}$ 没有 Baker 游荡域。

定理 3 的证明： 由方程(1.4)和引理 1 可知，存在一个零线性测度的集合 $H_1\subset[0,2\pi)$，存在常数 $B>0$ (只依靠 α)，使得对于 $\theta\in[0,2\pi)\setminus H_1$，存在常数 $R_0=R_0(\theta)>1$，使得对于所有满足 $\arg z=\theta, |z|=r>R_0$ 我们有

$$e^{br} \le \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \left|e^{az}\right|\left|\frac{f'}{f}\right| \le Be^{ar}T(2r,f)^k \tag{3.25}$$

因为 $b>a$，由上式可得 $\mu(f)=\infty$。

接下来我们证明 $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)\subseteq I(f)$。否则，$(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)\not\subset I(f)$。由引理 4 可得，存在 $(\alpha,\beta)\subset(0,\pi)$ 或 $(\pi,2\pi)$，使得对于 $z\in\Omega(\alpha,\beta)$，$|z|=r\notin E$，

$$\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| \le Kr^{M} \tag{3.26}$$

成立，其中 K,M 是两个不依靠 z 的常数， $mesE<\infty$ 。

由方程(1.4)和(3.25)，(3.26)可知对所有满足 $\arg z=\theta\in[0,2\pi)\setminus H_1$ 和 $|z|=r\notin E$ ，我们有

$$\mathrm{e}^{br} \le \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \left|\mathrm{e}^{az}\right|\left|\frac{f'}{f}\right| \le Kr^{M}\mathrm{e}^{ar} \tag{3.27}$$

矛盾，因此即证 $mesI(f)=2\pi$ 。

参考文献

[1] Gol'dberg, A.A. and Ostrovakii, I.V. (2008) Value Distribution of Meromorphic Function. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/mmono/236

[2] Hayman, W. (1964) Meromorphic Function. Clarendon Press, Oxford.

[3] Laine, I. (1993) Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. Walter de Gruyter & Co, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110863147

[4] Bergweiler, W. (1993) Iteration of Meromorphic Functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **29**, 151-188. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1993-00432-4

[5] 郑建华. 亚纯函数动力系统[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[6] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[7] Baker, I.N. (1965) Sets of Non-Normality in Iteration Theory. *Journal of the London Mathematical Society*, **40**, 499-502. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-40.1.499

[8] 乔建永. 整函数迭代的稳定集[J]. 数学学报, 1994(5): 702-708.

[9] Qiao, J. (2001) On Limiting Directions of Julia Set. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica*, **26**, 391-399.

[10] Qiu, L. and Wu, S.J. (2006) Radial Distributions of Julia Sets of Meromorphic Functions. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **81**, 363-368. https://doi.org/10.1017/S1446788700014361

[11] Wang, S. (2007) On Radial Distributions of Julia Sets of Meromorphic Functions. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **11**, 1301-1313. https://doi.org/10.11650/twjm/1500404865

[12] Zheng, J.H., Wang, S. and Huang, Z.G. (2002) Some Properties of Fatou and Julia Sets of Transcendental Meromorphic Functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **66**, 1-8. https://doi.org/10.1017/S000497270002061X

[13] Huang, Z.G. and Wang, J. (2014) On Limit Direction of Julia Sets of Entire Solutions of Linear Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **409**, 478-484. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.026

[14] Qiao, J. (1994) Julia Set of Entire Functions and Their Derivatives. *Chinese Science Bulletin*, **39**, 186-188.

[15] 张国威, 丁杰, 杨连中. 复线性微分方程解的导数的 Julia 集的径向分布[J]. 中国科学, 2014(44): 693-700.

[16] Wang, J. and Chen, Z.X. (2016) Limiting Direction and Baker Wandering Domain of Entire Solutions of Differential Equations. *Acta Mathematica Scientia*, **5**, 1331-1342. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(16)30072-8

[17] Huang, W.P., Zhou, J.L., Tu, J. and Ning, J.H. (2015) On the Hyper-Order of Solutions of Two Class of Complex Linear Differential Equations. *Advances in Difference Equations*, **2015**, 234. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0571-y

[18] Markushevich, A.I. (1965) Theory of Functions of a Complex Variable. Prentice Hall, Upper Saddle River.

[19] Chen, Z.X. (2002) On the Hyper Order of Solutions of Some Second Order Liner Differential Equations. *Acta Mathematica Sinica*, **18**, 79-88.

[20] Zheng, J.H. (2002) On Uniformly Boundary of Stable Domians in Interation of Meromorphic Functions. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **132**, 531-544.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org