Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(1), 1-10
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.91001

Hans汉斯

Curvature and Potential Function of Ricci Solitons

Jinnan Li, Xiang Gao*

School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao Shandong
Email: 18363995873@163.com, *gaoxiangshuli@126.com

Received: Dec. 4th, 2018; accepted: Dec. 22nd, 2018; published: Dec. 29th, 2018

Abstract

In the last decades, there has been an increasing interest in the study of Riemannian manifolds endowed with metrics satisfying special structural equation. One of the most important examples is represented by Ricci flow and Ricci solitons that has become the subject of rapidly increasing investigation since the appearance of the seminal works. It plays a key role in Hamilton and Perelman's proof of the Poincaré conjecture, and has been widely used to study the topology, geometry and complex structure of manifolds. The Ricci flow equation is of own interest as a geometric partial differential equation. It gives a canonical way of a critical metric. There are two important aspects of Ricci solitons. One looks at the influence on the topology by the Ricci soliton structure of the Riemannian manifold, and the other looks at its influence in its geometry. In this paper, we are interested in summarizing some new results about the curvature and potential function estimates of Ricci solitons.

Keywords

Ricci Solitons, Curvature, Potential Function

Ricci孤立子的曲率及势函数

李金楠，高　翔*

中国海洋大学，数学科学学院，山东 青岛
Email: 18363995873@163.com, *gaoxiangshuli@126.com

收稿日期：2018年12月4日；录用日期：2018年12月22日；发布日期：2018年12月29日

摘　要

过去几十年中，人们越来越关注满足特殊结构方程度量的黎曼流形的研究。其中一个最重要的例子是

*通讯作者。

文章引用: 李金楠, 高翔. Ricci 孤立子的曲率及势函数[J]. 理论数学, 2019, 9(1): 1-10.
DOI: 10.12677/pm.2019.91001

Ricci流和Ricci孤立子。Ricci流是研究黎曼流形最有力的工具之一，它在Hamilton和Perelman证明Poincaré猜想过程中起着关键作用，并且广泛用于研究流形的拓扑结构、几何性质和其它复杂结构。Ricci流方程本身作为偏微分方程的研究也十分重要，它给出了关键度量的规范方法。关于Ricci孤立子有两个重要的研究方向，一是研究黎曼流形的Ricci孤立子结构对拓扑结构的影响，另一个是研究它在几何学中的影响。本文，我们将归纳总结Ricci孤立子曲率及势函数的估计结果。

关键词

Ricci孤立子，曲率，势函数

1. 引言

20 世纪 80 年代，Hamilton [1]提出了 Ricci 流的概念，实际上 Ricci 流最初的引进是为了解决 3 维流形著名的 Poincaré 猜想。Ricci 孤立子是 Ricci 流的自相似解[2]且经常出现在 Ricci 流方程的奇异点经伸缩变换后的极限中[3] [4] [5] [6]。一方面，Ricci 孤立子的研究有助于更好的理解 Ricci 流的奇异结构，从而结合几何手术的方法可以得到一些重要的几何和拓扑结构。另一方面，Ricci 孤立子是爱因斯坦度量的自然推广，也被称为 quasi-Einetein 度量，在规范场论与超弦理论中有重要的应用，因此 Ricci 孤立子的几何性质及几何不变量对于数学及物理发展均具有重要的研究意义。

1.1. Ricci 孤立子介绍

对于黎曼度量 g_{ij}，若其 Ricci 张量满足 $R_{ij}=\rho g_{ij}$ （ρ 为常数)，则称 g_{ij} 为爱因斯坦度量。一个光滑流形 M^n 带有爱因斯坦度量，则称该流形为爱因斯坦流形，Ricci 孤立子是爱因斯坦度量的自然推广。

光滑流形上的一个完备度量 g_{ij} 称为 Ricci 孤立子，若存在光滑的向量场 $V=\left(V^i\right)$ 使得其 Ricci 张量满足

$$R_{ij}+\frac{1}{2}\left(\nabla_i V_j+\nabla_j V_i\right)=\rho g_{ij},$$

ρ 为常数。此外，若 V 为一个梯度向量场，对光滑函数 f 满足

$$R_{ij}+\nabla_i\nabla_j f=\rho g_{ij},$$

则称 g_{ij} 为梯度 Ricci 孤立子。光滑函数 f 称为 Ricci 孤立子的势函数。当 $\rho=0$ 时称为稳定 Ricci 孤立子，$\rho>0$ 为收缩 Ricci 孤立子， $\rho<0$ 时称为扩张 Ricci 孤立子。

由于 $\nabla_i V_j+\nabla_j V_i$ 为度量 g_{ij} 在方向 V 上的 Lie 导数，故上述 Ricci 方程分别可以写作 $Ric+\frac{1}{2}L_v g=\rho g$ 和 $Ric+\nabla^2 f=\rho g$。注意到 $V=0$ (即 f 为常函数)的情况即 g 为爱因斯坦度量，因此 Ricci 孤立子为爱因斯坦度量的自然推广，且经过适当的伸缩变换可标准化令 $\rho=0$， $+\frac{1}{2}$， $-\frac{1}{2}$。

1.2. 典型的 Ricci 孤立子

众所周知， $n\geq 4$ 时存在非平凡的紧致梯度收缩孤立子。同样的，也存在非爱因斯坦度量的完备非紧

致的 Ricci 孤立子(稳定，收缩或扩张)，下面给出一些完备非紧致 Ricci 孤立子的典型的例子[7]。

例 1.1：(cigar 孤立子) 2 维流形上，Hamilton 引进了第一个完备非紧致的稳定孤立子，称为 cigar 孤立子，其度量为 $ds^2=\dfrac{dx^2+dy^2}{1+x^2+y^2}$，势函数为 $f=-\log\left(1+x^2+y^2\right)$。特别地，cigar 孤立子有正高斯曲率及线性的体积增长。

例 1.2：(Bryant 孤立子)黎曼流形 $R^n\left(n\geq 3\right)$ 的情况下，高维完备非紧致的梯度稳定孤立子由 Bryant 引进，Bryant 孤立子为旋转对称的且具有正截面曲率且以 r 为半径的测地球 $B_r\left(o\right)$ 体积增长率为 $r^{\frac{(n+1)}{2}}$。

例 1.3：(Warped 积)应用两倍及多倍 warped 乘积，Ivey 对 Bryant 孤立子进行推广，并构造了完备非紧致的稳定孤立子。同时，Gastel-Kronz 构造了 $R^{m+1}\times N$ 上梯度扩张 Ricci 孤立子的乘积度量，其中 $N^n\left(n\geq 2\right)$ 为带有正数量曲率的爱因斯坦流形。

例 1.4：(Gaussian 孤立子)具有平坦欧几里得度量的 $\left(R^n,g_0\right)$ 也可以包含收缩及扩张 Ricci 孤立子，称为 Gaussian 收缩孤立子或扩张孤立子。

1) $\left(R^n,g_0,\dfrac{|x|^2}{4}\right)$ 为带有势函数 $f=\dfrac{|x|^2}{4}$ 的梯度收缩 Ricci 孤立子，$Ric+\nabla^2 f=\dfrac{1}{2}g_0$。

2) $\left(R^n,g_0,-\dfrac{|x|^2}{4}\right)$ 为势函数是 $f=-\dfrac{|x|^2}{4}$ 的梯度扩张 Ricci 孤立子，$Ric+\nabla^2 f=-\dfrac{1}{2}g_0$。

2. 数量曲率，Ricci 曲率及曲率算子的估计

梯度 Ricci 孤立子为 Hamilton-Ricci 流的自相似解且对应于奇异模型，因而对于研究 Ricci 流至关重要。由 Hamilton 及 Perelman 的证明可知，任意紧致的 Ricci 孤立子必为梯度孤立子且任意紧致的稳定或扩张 Ricci 孤立子必为爱因斯坦的。因此，梯度 Ricci 孤立子对于研究流形的几何性质也非常重要，本文我们将重点研究梯度 Ricci 孤立子的几何量。在研究微分流形及 Ricci 孤立子的几何性质时，自然会想到研究极其重要的几何不变量：曲率及势函数的估计。

梯度 Ricci 孤立子的曲率对于理解并最终对 Ricci 孤立子进行分类十分重要。Ricci 孤立子的很多分类都是在控制曲率条件下进行的，而且 Ricci 曲率控制曲率张量，曲率算子也是高维孤立子的分类最有利工具之一，逐点的曲率影响着整体的微分结构。因此我们将分别研究 Ricci 孤立子的数量曲率、Ricci 曲率及曲率算子的估计。

数量曲率作为 Ricci 曲率的迹是最简单的曲率之一，也是最简单的几何不变量之一。若能得到较好的数量条件将极大简化关于孤立子的研究，首先我们将给出数量曲率的估计结果。数量曲率在无穷远处消失这一特点对于研究奇数维梯度孤立子极为重要。

定理 2.1 (Chu [8])：设 $\left(M^3,g_{ij},f\right)$ 为具有正截面曲率的梯度 Ricci 孤立子，且其数量曲率在原点 O 处能达到最大值，则数量曲率在无穷远处趋于 0。

定理 2.2 (Chen [9])：令 $g_{ij}\left(t\right)$ 为非紧致流形上 Ricci 流的完备古典解，则 $g_{ij}\left(t\right)$ 的数量曲率对任意 t 均非负。

同时，他证明了完备收缩 Ricci 孤立子有非负数量曲率 $R\geq 0$。作为对[9]中推论 2.3 的推广，Zhang [10] 也有一些关于 Ricci 流及其解的数量曲率的下界估计：

推论 2.3： 设 $\left(M^n,g\left(t\right)\right)$，$t\in\left[\alpha,\beta\right]$ 为 Ricci 流的一个完备解，则在 $M\times\left[\alpha,\beta\right]$ 上有：

$$R\geq -\frac{n}{2\left(t-\alpha\right)}.$$

通过对时间 t 做推广，设 $\left(M^n, g(t)\right)$，$t\in[-\infty,0]$ 为 Ricci 流的一个完备解，则在 $M\times[-\infty,0]$ 上有：$R\geq 0$。

梯度收缩 Ricci 孤立子曲率满足一定条件时数量曲率也可以为常数，Naber [11]证明了满足 $0\leq Ric\leq \rho g$ 的梯度收缩 Ricci 孤立子数量曲率为常数。在此基础上，Petersen-Wylie [12]证明了具有非负(或非正) Ricci 曲率的梯度 Ricci 孤立子有常数量曲率当且仅当 $Ric(\nabla f,\nabla f)=0$。

推论 2.4 (Löpez-Río [13])：令 $\left(M^n, g_{ij}, f\right)$ 为一个 n 维完备梯度收缩 Ricci 孤立子，则：

1) $\left(M^n, g_{ij}\right)$ 有常数量曲率当且仅当 $2|Ric|^2\leq R+c\dfrac{|\nabla R|^2}{R+1}$，常数 $c\geq 0$。

2) $\left(M^n, g_{ij}\right)$ 等距于 R^n 当且仅当 $2|Ric|^2\leq(1-\varepsilon)R+c\dfrac{|\nabla R|^2}{R+1}$，常数 $c\geq 0$ 且 $\varepsilon>0$。

定理 2.5 ([9])：令为一个完备非紧致的梯度 Ricci 孤立子，则：

1) 若梯度孤立子为稳定或收缩的，则 $R\geq 0$。

2) 若该梯度孤立子为扩张的，则存在仅取决于维数的正常数 $C(n)$ 使得 $R\geq -C(n)\rho$。

同理，Petersen-Wylie [12]还证明了具有常数量曲率的梯度收缩(扩张)孤立子满足 $0\leq R\leq n\rho$（$n\rho\leq R\leq 0$）。作为推广，Naber [11]证明了若其数量曲率有界，则 $0\leq \inf_M R\leq n\rho$。此外，若 $n\rho\leq R$，则 M 为爱因斯坦流形。

推论 2.6 (Chow-Lu-Yang [14])：令 $\left(M^n, g_{ij}, f\right)$ 为完备的梯度稳定 Ricci 孤立子，假设 $R_{ij}=-\nabla_i\nabla_j f$ 且 $R+|\nabla f|^2=1$。若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ 且 $f\leq 0$，则

$$R\geq \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}+2}}e^f.$$

推论 2.7 (Munteanu-Wang [15])：令 $\left(M^4, g_{ij}, f\right)$ 为一个具有有界数量曲率的 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子，则存在常数 $C>0$ 使得在 M 上有：

$$|\nabla \ln R|^2\leq C\ln(f+2).$$

推论 2.8 ([10])：令 $\left(M^n, g_{ij}, f\right)$ 为一个完备非紧致的梯度 Ricci 孤立子，则：

1) 若 $\left(M^n, g_{ij}, f\right)$ 为稳定或收缩孤立子，则 $R\geq 0$；

2) 若 $\left(M^n, g_{ij}, f\right)$ 为扩张 Ricci 孤立子，则 $R\geq -\dfrac{n\rho}{2}$。此外，若其数量曲率在某点处达到最小值 $-\dfrac{n\rho}{2}$，则 $\left(M^n, g_{ij}\right)$ 为爱因斯坦流形。

对于完备梯度扩张 Ricci 孤立子，则有 $R\geq -\dfrac{n}{2}$。此外，若存在点 $x_0\in M^n$ 使得 $R(x_0)=-\dfrac{n}{2}$，则 $\left(M^n, g_{ij}\right)$ 为爱因斯坦流形；Löpez-Río [13]中证明了具有非负 Ricci 张量的完备梯度扩张 Ricci 孤立子，若 $R^*=\sup_M R\leq 0$，则数量曲率满足 $-\dfrac{n}{2}\leq R\leq -\dfrac{1}{2}$。对于稳定 Ricci 孤立子，Löpez-Río [13]还证明了完备的梯度稳定 Ricci 孤立子满足 $R_*=\inf_M R=0$。

定理 2.9 (Ni [16])：令 $\left(M^n, g_{ij}, f\right)$ 为一个完备稳定梯度 Ricci 孤立子，设其 Ricci 曲率满足 $R_{ij}\geq \varepsilon R g_{ij}$，$\varepsilon>0$ 且数量曲率 $R(x)>0$，则存在常数 $C>0$，$a>0$ 使得

$$R(x)\leq C\exp\left(-a\left(r(x)+1\right)\right),$$

其中 $r(x)$ 为到定点 $x_0\in M$ 的距离函数。

推论 2.10 ([9])：令 $\left(M^n, g_{ij}, f\right)$ 为一个完备梯度收缩 Ricci 孤立子，设其满足 $R_{ij}+\nabla_i\nabla_j f=\dfrac{1}{2}g_{ij}$ 及

$R+|\nabla f|^2-f=0$，则：

$$R(x)\le\frac{1}{4}\left(r(x)+2\sqrt{f(x_0)}\right)^2.$$

其中 $r(x)=d(x_0,x)$ 为到定点 $x_0\in M$ 的距离函数。

最近，根据维数及势函数[14]中给出了梯度稳定 Ricci 孤立子的数量曲率的一个下界，但是由于稳定孤立子的势函数估计暂时没有很好的估计结果，因此该估计结果不能直接用距离函数表示。然而由距离函数，López-Río [17]证明了如下结果：

定理 2.11： 令 (M^n,g_{ij},f) 为一个完备稳定 Ricci 孤立子，且 $|Rc|^2\le\frac{R^2}{2}$，则：

$$R(x)\ge k\operatorname{sech}^2\frac{r(x)}{2}$$

其中 $r(x)$ 为到点 $O\in M$ 的距离函数，且 $k\le1$ 为仅取决于 O 及 $R(O)$ 的常数。

推论 2.12： 令 (M^n,g_{ij},f) 为一个具有非负 Ricci 曲率的完备稳定梯度 Ricci 孤立子，则：

$$R(x)\ge k\operatorname{sech}^2 r(x)$$

其中 $r(x)$ 为到点 $O\in M$ 的距离函数，且 $k\le1$ 为仅取决于 O 及 $R(O)$ 的常数。

Ricci 曲率条件是研究 Ricci 孤立子分类的最有力工具之一，通过对 Ricci 曲率条件的控制可以得到诸多关于孤立子的分类，因此对研究流形的几何性质及拓扑性质都至关重要。另一方面 Ricci 曲率与黎曼曲率及数量曲率紧密相关，研究 Ricci 曲率对于研究整体微分流形也有极其重要的意义。

定理 2.13 (Zhang [18])： 任意 Weyl 张量为零的梯度收缩 Ricci 孤立子(不必具有有界曲率)满足 $Ric\ge0$ 及 $|R_{ijkl}|\le\exp\left(a\left(d(p,x)^2+1\right)\right)$，常数 $a>0$。

推论 2.14 ([15])： 令 (M^4,g_{ij},f) 为一个具有有界数量曲率 $S\le A$ 的 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子，则：常数 $C>0$ 且仅取决于 A 及 $\sup_{D(r_0)}|Rm|$。

曲率算子相比于数量曲率及 Ricci 曲率较为复杂，其估计需要满足其他的条件。对于曲率算子，考虑 Weyl 张量为零时，Zhang [18]证明了任意 Weyl 张量为零的梯度收缩孤立子(不需要具有有界曲率)必有非负曲率算子。

推论 2.15 (Cai [19])： 令 (M^n,g_{ij},f) 为一个完备稳定梯度 Ricci 孤立子，使得 $n=3$ 或 $n\ge4$ 时 (M^n,g_{ij},f) 均为局部共形平坦的，则对常数 $C>0$，(M^n,g_{ij}) 具有有界非负的曲率算子

$$0\le Rm\le C.$$

Munteanu-Wang [20]证明了任意具有有界 Ricci 曲率的梯度收缩 Ricci 孤立子其黎曼曲率张量增长至多为距离函数的多项式形式即对常数 $a>0$ 满足：

$$|Rm|(x)\le C\left(r(x)+1\right)^a,$$

维数为 3 时，曲率算子有界且非负。当维数为 4 维时，曲率算子不再具有固定的符号，Munteanu-Wang [15]证明该结果同样成立。特别地，这表明曲率算子必有界。

定理 2.16： 令 (M^4,g_{ij},f) 为一个具有有界数量曲率的 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子，则存在常数 $c>0$ 使得在流形 M 上有：

$$|Rm|\le cS.$$

作为 Hamilton 在 3 维情况下曲率逐点估计结果的延伸，他们还得到了具有有界数量曲率的 4 维梯度

收缩 Ricci 孤立子其曲率算子满足 $Rm \ge -\left(\frac{c}{\ln r}\right)^{\frac{1}{4}}$，其中 r 为到 M 上定点的距离函数。

定理 2.17：令 $\left(M^4, g_{ij}, f\right)$ 为一个 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子，则对任意常数 $c>0$，在 $M/D\left(r_0\right)$ 上曲率算子满足：

$$|Rm| \le c\left(\frac{|\nabla Ric|}{\sqrt{f}} + \frac{|Ric|^2+1}{f} + |Ric|\right).$$

对于稳定 Ricci 孤立子使用类似的方法，由 $|\nabla f|^2$ 替换 f 得同样的结果：完备非紧致的 4 维梯度稳定 Ricci 孤立子，存在常数 $c>0$ 使得

$$|Rm| \le c\left(\frac{|\nabla Ric|}{|\nabla f|} + \frac{|Ric|^2}{|\nabla f|^2} + |Ric|\right).$$

推论 2.18 ([17])：令 $\left(M^4, g_{ij}, f\right)$ 为一个完备非紧致的 4 维梯度稳定 Ricci 孤立子，具有正 Ricci 曲率且数量曲率 R 能达到最大值，则存在常数 $C>0$ 使得曲率算子满足：

$$|Rm| \le C\left(|\nabla Ric| + |Ric|^2 + |Ric|\right).$$

Munteeanu-Wang [15]又证明了具有有界数量曲率的 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子的曲率算子也有上界。

定理 2.19：令 $\left(M^4, g_{ij}, f\right)$ 为一个 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子，其数量曲率有界即满足 $S \le A$。则其黎曼曲率张量及协变导数模的形式也有界，即存在仅取决于 A 和 $\sup_{D(r_0)}|Rm|$ 的常数 $C>0$ 使得：

$$\sup_M\left(|Rm| + |\nabla Rm|\right) \le C.$$

作为推论，他们还证明了 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子若其数量曲率有界满足 $S \le A$，则存在仅取决于 A 和 $\sup_{D(r_0)}|Rm|$ 的常数 $C>0$ 使得 $\sup_M \frac{|Rm|^2}{S} \le C$ 且 $\sup_M \frac{|Rm|}{S} \le C$。

对曲率算子的协变导数也有类似的估计结果：

推论 2.20：令 $\left(M^4, g_{ij}, f\right)$ 为一个具有有界数量曲率的 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子，则存在常数 $C>0$ 使得：

$$\sup_M \frac{|\nabla Rm|^2}{S} \le C.$$

对于梯度稳定 Ricci 孤立子，Cao-Cui [21]得到了一些类似的结果。

推论 2.21：令 $\left(M^4, g_{ij}, f\right)$ 为一个完备非紧致的 4 维梯度稳定 Ricci 孤立子，设其具有正 Ricci 曲率 $Ric>0$ 且数量曲率在 R 点 $x_0 \in M$ 处达到最大值，则 $\left(M^4, g_{ij}\right)$ 有有界黎曼曲率张量，即存在常数 $C>0$，满足：

$$\sup_{x\in M}|Rm| \le C.$$

推论 2.22 ([17])：令 $\left(M^4, g_{ij}, f\right)$ 为一个非 Ricci 平坦的 4 维完备非紧致的梯度稳定 Ricci 孤立子，假设 $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$，则对任意 $0<a<1$，存在常数 $C>0$ 使得：

$$|Ric|^2 \le CR^a,$$

且

$$\sup_{x\in M}|Rm|\le C.$$

进一步若数量曲率至多多项式型衰退，则对任意 $0<a<1$，存在常数 $C>0$ 使得 $|Rm|^2\le CR^a$。

对于复流形上的 Kähler-Ricci 孤立子 $g_{\alpha\bar{\beta}}$ 也会有对应的的曲率估计，很多结果有待于进一步的证明。同时，在 Ricci 孤立子上建立较弱曲率条件下一些有意义的几何估计与应用范围更广的几何不变量可以更好的分类一些重要的 Ricci 孤立子。

3. 势函数估计

爱因斯坦流形是 Ricci 孤立子的势函数为常函数时的特例，因此也称为平凡 Ricci 孤立子。势函数影响着体积估计，势函数的水平集是研究体积增长估计的重要工具，完备非紧致 Ricci 孤立子的分类问题到目前结果不是很多，其主要困难之一在于体积与直径的无限增长性，因此解决分类问题依赖于一定条件下势函数精确的上下界增长估计，从而可以将其与距离函数建立一定的等价关系，进而结合余面积公式通过研究势函数水平集的几何性质来研究 Ricci 孤立子的分类；同时利用势函数上下界的增长估计可以建立 Ricci 孤立子较弱条件下的等周不等式、平均值不等式、Sobolev 不等式以及一些重要的几何积分不等式，并通过研究等号成立条件与不等式的稳定性可以得到一些 Ricci 孤立子的刚性结果。可见势函数增长估计对于研究 Ricci 孤立子的体积估计与分类等具有十分重要的作用。典型的势函数上下界估计由距离函数 $r(x)$ 表示，故本节我们主要总结 Ricci 孤立子的势函数由距离函数表示的估计结果。

Perelman [22]证明了典型的梯度收缩 Ricci 孤立子的势函数的上下界估计结果：

定理 3.1： 令 (M^n,g_{ij},f) 为一个具有有界 Ricci 曲率的完备非紧致的梯度收缩 Ricci 孤立子，且满足 $R_{ij}+\nabla_i\nabla_j f=\frac{1}{2}g_{ij}$ 及 $R+|\nabla f|^2-f=0$。令 $r(x)=d(x_0,x)$ 表示到定点 $x_0\in M$ 的距离函数，则存在正常数 C_1,C_2,c_1 及 c_2 使得当 $r(x)$ 充分大时势函数满足：

$$|\nabla f|(x)\le C_2(r(x)+1),$$

及

$$\frac{1}{4}(r(x)-c_1)^2\le f(x)\le C_1(r(x)+c_2)^2.$$

根据该结果，数学家们拓展延伸并改变曲率条件等得到了一些更加完善的估计结果。

推论 3.2 ([23])： 令 (M^n,g_{ij},f) 为一个完备非紧致的梯度收缩 Ricci 孤立子，设其 Ricci 曲率有下界并满足 $|R_{ijkl}|(x)\le\exp(a(r(x)+1))$，常数 $a>0$，则对任意 $f(x)\ge\min\left\{\frac{\rho}{2}r(x)^2,\frac{Dr(x)}{3\rho}\right\}$，$D>0$，存在常数 $B>0$ 及 $C>0$ 使得：

$$|\nabla f|(x)\le Cr(x),$$

且有

$$f(x)\le Cr^2(x).$$

其中 $r(x)\ge B$，$r(x)$ 为距离函数。

在没有假设任何曲率有界的条件时，[24]中证明了一个更为精确的估计结果：

推论 3.3： 令 (M^n,g_{ij},f) 为一个完备非紧致的梯度收缩 Ricci 孤立子，满足 $R_{ij}+\nabla_i\nabla_j f=\frac{1}{2}g_{ij}$ 及 $R+|\nabla f|^2-f=0$，则有：

$$\left|\nabla f\right|(x)\le\frac{1}{2}r(x)+\sqrt{f(x_0)},$$

$$R(x)\le\frac{1}{4}\left(r(x)+2\sqrt{f(x_0)}\right)^2,$$

及

$$f(x)\le\frac{1}{4}\left(r(x)+2\sqrt{f(x_0)}\right)^2.$$

推论 3.4 ([25])：令 (M^n,g_{ij},f) 为一个完备非紧致的梯度收缩 Ricci 孤立子，满足 $R_{ij}+\nabla_i\nabla_j f=\frac{1}{2}g_{ij}$，则其势函数满足：

$$\frac{1}{4}\left(r(x)-c_1\right)^2\le f(x)\le\frac{1}{4}\left(r(x)+c_2\right)^2.$$

其中 $r(x)=d(x_0,x)$ 为到定点 $x_0\in M$ 的距离函数，c_1 及 c_2 为仅取决于维数 n 及单位球 $B_{x_0}(1)$ 上的度量 g_{ij} 的常数。

同时，假设 $Rc\ge 0$ 时，Ni [16]证明了 $f(x)\ge\frac{1}{8}r^2(x)-c$。此外，对于扩张 Ricci 孤立子，也有一些关于势函数的估计。

推论 3.5 ([26])：令 (M^n,g_{ij},f) 为一个完备的梯度扩张 Ricci 孤立子，则对于定点 $O\in M$，存在常数 $c>0$ 使得：

$$\left|\nabla f\right|\le c\left(1+r(x)\right),$$

且

$$f(x)\le c\left(1+r(x)^2\right).$$

推论 3.6：令 (M^n,g_{ij},f) 为一个具有非负 Ricci 曲率的完备梯度扩张 Ricci 孤立子，则存在常数 $c_1>0$ 及 $c_2>0$ 使得势函数满足：

$$\frac{1}{4}\left(r(x)-c_1\right)^2-c_2\le -f(x)\le\frac{1}{4}\left(r(x)+2\sqrt{-f(x_0)}\right)^2.$$

定理 3.7 (Chen [27])：令 (M^n,g_{ij},f) 为一个完备的梯度扩张 Ricci 孤立子，若 $\left|Ric\right|\le Cs^{-\varepsilon}$，$s\equiv dist(x_0,x)$，常数 $\varepsilon<1$，则存在点 $p\in M$ 及常数 $c_1,c_2>0$ 使得：

$$\left|Ric\right|\le c_1\cdot dist(p,x)^{-\varepsilon},$$

且势函数满足：

$$-r\left(1+\frac{c_2}{r^\varepsilon}\right)\le f'(x)\le -r\left(1-\frac{c_2}{r^\varepsilon}\right),$$

其中 $r=dist(p,x)$。从而有：

$$-\frac{1}{2}r^2\left(1+\frac{c_3}{r^\varepsilon}\right)+f(p)\le f(x)\le -\frac{1}{2}r^2\left(1-\frac{c_3}{r^\varepsilon}\right)+f(p).$$

若 (M^n,g_{ij},f) 的 Ricci 曲率非负，对梯度稳定孤立子有：

定理 3.8 ([28])：令 (M^n,g_{ij},f) 为一个具有非负 Ricci 曲率的完备梯度稳定 Ricci 孤立子，设其数量曲率 R 在点 x_0 处能达到最大值，则存在常数 $0<c_1\le\sqrt{c_0}$ 及 $c_2>0$ 使得势函数满足：

$$c_1 r(x) - c_2 \le f(x) \le \sqrt{c_0} r(x) + |f(x_0)|.$$

其中 $r(x) = d(x_0, x)$ 为到定点 $x_0 \in M$ 的距离函数，且常数 $c_0 = R_{\max}$ 满足 $R + |\nabla f|^2 = C_0$。

定理 3.9 (Munteanu [29]): 令 (M^n, g_{ij}, f) 为一个非平坦的梯度稳定 Ricci 孤立子，则存在 $\lambda > 0$ 及 $c > 0$ 使得对于任意 $r \ge 1$，有：

$$\sqrt{\lambda} - \frac{c}{\sqrt{r}} \le \frac{1}{r} \sup_{\partial B_p(r)} f(x) \le \sqrt{\lambda} + \frac{c}{r}.$$

结合方程，运用梯度估计、Morse 迭代及向量场积分的方法，在一定几何条件下可以建立完备非紧致的稳定与扩张孤立子势函数较为精确的正的上下界增长，并应用其水平集的相关性质将会得到其渐近体积比与曲率渐近估计。同时，由于 Bakry-Emery Ricci 张量 $Ric_f = Ric + Hessf$ 或其他曲率条件的引进，势函数的估计将会有许多新的证明方法及更精确的结果。

基金项目

本文由山东省自然科学基金(ZR2018MA006)及山东省研究生导师指导能力提升项目(SDYY17009)支持。

参考文献

[1] Hamilton, R.S. (1998) The Ricci Flow on Surfaces. *Contemporary Mathematics*, **71**, 237-261. https://doi.org/10.1090/conm/071/954419

[2] Hamilton, R.S. (1982) Three Manifolds with Positive Ricci Curvature. *Journal of Differential Geometry*, **17**, 255-306. https://doi.org/10.4310/jdg/1214436922

[3] Hamilton, R.S. (1993) Eternal Solutions to the Ricci Flow. *Journal of Differential Geometry*, **38**, 1-11. https://doi.org/10.4310/jdg/1214454093

[4] Chen, B.L. and Zhu, X.P. (2000) Complete Riemannian Manifolds with Point-Wise Pinched Curvature. *Inventiones Mathematicae*, **140**, 423-452. https://doi.org/10.1007/s002220000061

[5] Cao, H.D. (1996) Existence of Gradient Kähler Ricci Solitons. Elliptic and Parabolic Methods in Geometry (Minneapolis, MM, 1994), A K Peters, Wellesley, MA, 1-16.

[6] Sesum, N. (2004) Limiting Behaviour of the Ricci Flow. arXiv:0402194

[7] Cao, H.D. (2009) Recent Progress on Ricci Solitons. Mathematics, 1-38.

[8] Chu, S.C. (2003) Geometry of 3-Dimensional Gradient Ricci Solitons with Positive Curvature. *Communications in Analysis and Geometry*, **13**, 129-150. https://doi.org/10.4310/CAG.2005.v13.n1.a4

[9] Chen, B.L. (2009) Strong Uniqueness of the Ricci Flow. *Journal of Differential Geometry*, **82**, 363-382. https://doi.org/10.4310/jdg/1246888488

[10] Zhang, S.J. (2011) On a Sharp Volume Estimate for Gradient Ricci Solitons with Scalar Curvature Bounded Below. *Mathematics*, **27**, 871-882.

[11] Naber, A. (2006) Some Geometry and Analysis on Ricci Solitons. Mathematics, arXiv:0612532

[12] Petersen, P. and Wylie, W. (2012) Rigidity of Gradient Ricci Solitons. *Pacific Journal of Mathematics*, **241**, 329-345. https://doi.org/10.2140/pjm.2009.241.329

[13] Löpez, M.F. and Río, E.G. (2011) Maximum Principles and Gradient Ricci Solitons. *Journal of Differential Geometry*, **251**, 73-81. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.03.020

[14] Chow, B., Lu, P. and Yang, B. (2011) Lower Bounds for the Scalar Curvature of Noncompact Steady Gradient Ricci Solitons. *Mathematics*, **349**, 1265-1267.

[15] Munteanu, O. and Wang, J. (2015) Geometry of Shrinking Ricci Solitons. *Computational Mathematics*, **151**, 2273-2300. https://doi.org/10.1112/S0010437X15007496

[16] Ni, L. (2005) Ancient Solutions to Kähler-Ricci Flow. *Mathematical Research Letters*, **12**, 633-654. https://doi.org/10.4310/MRL.2005.v12.n5.a3

[17] Löpez, M.F. and Río, E.G. (2011) A Sharp Lower Bound for the Scalar Curvature of Certain Steady Gradient Ricci So-

litons. arXiv:1104. 1889v1

[18] Zhang, Z.H. (2008) Gradient Shrinking Solitons with Vanishing Weyl Tensor. *Pacific Journal of Mathematics*, **242**, 189-200. https://doi.org/10.2140/pjm.2009.242.189

[19] Cai, M.L. (2015) On Shrinking Gradient Ricci Solitons with Nonnegative Sectional Curvature. *Pacific Journal of Mathematics*, **277**, 61-76.

[20] Munteanu, O. and Wang, M.T. (2011) The Curvature of Gradient Ricci Solitons. *Mathematical Research Letters*, **18**, 1051-1070. https://doi.org/10.4310/MRL.2011.v18.n6.a2

[21] Cao, H.D. and Cui, X. (2014) Curvature Estimates for Four-Dimensional Gradient Steady Ricci Solitons. arXiv:1411.3631v1

[22] Perelman, G. (2003) Ricci Flow with Surgery on Three-Manifolds. arXiv:0303109

[23] Cao, X.D., Wang, B.A. and Zhang, Z. (2011) On Locally Conformally Flat Gradient Shrinking Ricci Solitons. *Communications in Contemporary Mathematics*, **13**, 269-282. https://doi.org/10.1142/S0219199711004191

[24] Cao, H.D., Chen, B.L. and Zhu, X.P. (2008) Recent Developments on Hamilton's Ricci Flow. *Surveys in Differential Geometry*, **12**, 47-112. https://doi.org/10.4310/SDG.2007.v12.n1.a3

[25] Cao, H.D. and Zhou, D. (2009) On Complete Gradient Shrinking Ricci Solitons. *Journal of Differential Geometry*, **85**, 175-186. https://doi.org/10.4310/jdg/1287580963

[26] Zhang, Z.H. (2009) On the Completeness of Gradient Ricci Solitons. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **137**, 2755-2759. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-09-09866-9

[27] Chen, C.W. (2011) Volume Estimates and the Asymptotic Behavior of Expanding Gradient Ricci Solitons. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **42**, 267-277. https://doi.org/10.1007/s10455-012-9311-7

[28] Cao, H.D. and Chen, Q. (2012) On Locally Conformally Flat Gradient Steady Ricci Solitons. *Transactions of the American Mathematical Society*, **364**, 2377-2391. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2011-05446-2

[29] Munteanu, O. and Sesum, N. (2013) On Gradient Ricci Solitons. *Journal of Geometric Analysis*, **23**, 539-561. https://doi.org/10.1007/s12220-011-9252-6