Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(1), 36-45
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.91005

A Population Model Driven by Truncated Stable Process

Yingying Yan, Jinying Tong

Department of Mathematics, Donghua University, Shanghai
Email: yyyan_zear94@163.com, jytong@dhu.edu.cn

Received: Dec. 12th, 2018; accepted: Jan. 1st, 2019; published: Jan. 8th, 2019

Abstract

In this paper, we study the population model driven by truncated α-stable process. First, we limit the jump height of the stable process, and then under some assumptions, we prove that the global positive solution of the population model with negative jump still exists. At the same time, by using Khasminskii lemma and Lyapunov function, we obtain the conditions that the model satisfies the stationary distribution and exponential ergodicity. Besides, when $a-\frac{4}{9}\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}<0$, this model will go extinct.

Keywords

Truncated α-Stable Process, Population Model, Stationary Distribution, Exponential Ergodicity, Extinction

由截尾稳定过程驱动的种群模型

燕莹莹，童金英

东华大学数学系，上海
Email: yyyan_zear94@163.com, jytong@dhu.edu.cn

收稿日期：2018年12月12日；录用日期：2019年1月1日；发布日期：2019年1月8日

摘　要

本文主要研究了由截尾α-稳定过程驱动的种群模型。在本文中我们首先限制稳定过程的跳跃高度，然后在一些假设下，证明带负跳的种群模型的全局正解仍然存在；同时我们利用Khasminskii引理及

文章引用: 燕莹莹, 童金英. 由截尾稳定过程驱动的种群模型[J]. 理论数学, 2019, 9(1): 36-45.
DOI: 10.12677/pm.2019.91005

Lyapunov函数得到了该模型满足平稳分布和指数遍历的条件。此外，我们还给出了当 $a-\frac{4}{9}\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}<0$ 时，该模型将趋于灭绝。

关键词

截尾α-稳定过程，种群模型，平稳分布，指数遍历，灭绝性

1. 引言

在生态系统中，种群是占有一定空间的一群同种个体的自然组合，一般情况下，在没有人为干扰的系统中，种群的数量可以基本保持稳定，但这种稳定却不是一直不变的。因为它总是受到各种因素的影响。而种群生态学即研究某一生态群体个体数量的变化规律。

二十世纪初，Lotka [1]和 Volterra [2]在不考虑外界环境影响的条件下提出了用一个常微分方程来研究种群的数量变化，即：

$$\mathrm{d}x(t)=x(t)\left[a-bx(t)\right]\mathrm{d}t.$$

这就是著名的 Lotka-Volterra 模型。

但随着研究的深入，学者们开始在 Lotka-Volterra 模型中考虑外界环境对种群数量 $x(t)$ 的影响。比如 Gard [3]和 Liu [4]等用布朗运动来刻画外界环境产生的噪声，从而提出随机 Lotka-Volterra 模型：

$$\mathrm{d}x(t)=x(t)\left[\left(a-bx(t)\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t)\right]. \tag{1}$$

其中，$B(t)$ 表示标准布朗运动。

然而，在现实生活中，种群的数量经常会因为一些突如其来的因素而在瞬间发生巨大的变化。比如一场自然灾害可以使得种群数量骤减，气温的变化引起种群的迁入和迁出。而研究表明这个变化是服从方差为无穷的幂律分布[5] [6] [7]。因此 Zhang [8]等提出由谱正稳定过程驱动的种群模型：

$$\mathrm{d}x(t)=x(t)\left[\left(a-bx(t)\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}Z(t)\right]. \tag{2}$$

其中我们称只有正跳的稳定过程叫做谱正稳定过程，其 Lévy 测度定义为：

$$\mu(\mathrm{d}z)=\begin{cases}\dfrac{C_{\alpha}}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z, & \text{如果} z\neq 0;\\ 0, & \text{如果} z=0.\end{cases}$$

他们证明了当随机微分方程的噪声较小时，方程具有唯一稳定分布；而当噪声较大时，方程则以概率 1 灭绝。

而本文在 Zhang [8]等的基础上研究由稳定过程驱动的带负跳的种群模型，则随机微分方程形式为：

$$\mathrm{d}x(t)=x(t)\left[\left(a-bx(t)\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}Z(t)\right],\alpha\in(0,2). \tag{3}$$

其中 $Z(t)$ 是 α-对称稳定过程，且我们给出以下几个假设**(A)**：

(A1) 给定系数 $a>0$，$b>0$，假定 $\sigma\ >1$；

(A2) 假定 z 满足 $\frac{1}{\sigma}<z<\frac{1}{\sigma},z\neq 0$。则对应的 Lévy 测度

$$\nu(\mathrm{d}z)=\begin{cases}\dfrac{C_\alpha I_{\left\{0<|z|<\frac{1}{\sigma}\right\}}}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z, & 如果0<|z|<\dfrac{1}{\sigma};\\ 0, & 如果z\neq 0.\end{cases}\tag{4}$$

则本文我们要探讨在测度(4)式下，随机模型(3)得到的结论与 Zhang [8]等人论文中的结果有什么不同。即：

1) 在满足假设**(A)**的情况下，该随机模型(3)是否仍存在唯一正解；

2) 随机噪声要满足什么条件，该随机模型(3)具有唯一平稳分布和指数遍历；

3) 在什么条件下，该随机模型(3)将以概率 1 灭绝；而当模型永远持续时，又要满足什么条件？

2. 全局正解

在给出方程(3)具有唯一平稳分布和指数遍历的条件前，我们先来说明这个随机微分方程的全局正解性。

引理 2.1：在假设**(A)**成立的条件下，对任意给定的初值 $x_0\in R_+$，随机微分方程(3)对所有的 $t\geq 0$，存在唯一的全局正解 $x(t)$，并且该解以概率 1 位于 R_+ 中，即

$$P\left\{x(t)\in R_+,\forall t\geq 0\right\}=1.$$

证明：令 τ_e 是爆炸时间，在 $t\in[0,\tau_e)$ 上，由 Zhang [8]等定理 2.1 证明可知，方程(3)的解 $x(t)$ 满足

$$x(t)=\frac{\phi^{-1}(t)}{\frac{1}{x_0}+b\int_0^t\phi^{-1}(s)\mathrm{d}s}.$$

其中，

$$\phi(t)=\exp\left\{-at+\int_0^t\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}\left(\sigma z-\ln(1+\sigma z)\right)\frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z\mathrm{d}s-\int_0^t\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}\ln(1+\sigma z)\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)\right\}.$$

显而易见，$\phi(t)>0$，则可推出 $\phi^{-1}(t)>0$。从而对任意 $x_0\in R_+$，$t\in[0,\tau_e)$，都有 $x(t)>0$。下面我们证当 $\tau_e=\infty$ 时，$x(t)>0$。

令 $k_0>0$，且足够大使得 $\frac{1}{k_0}<x_0<k_0$。对任意的整数 $k>k_0$，定义停时

$$\tau_k=\inf\left\{t\in[0,\tau_e):x(t)<\frac{1}{k}或x(t)>k\right\}.$$

设 $\inf\varnothing=\infty$，显然 τ_k 是单调递增的且 $\tau_k<\tau_e$，令 $\tau_\infty=\lim\tau_k$，有 $\tau_\infty\leq\tau_e\ a.s.$，因此如果我们能证明 $\tau_\infty=\infty\ a.s.$，那么 $\tau_e=\infty\ a.s.$，且对任意 $t\geq 0$，$x(t)\in R_+$。

定义一个非负函数

$$V_1(x)=x^\theta-\ln x-\theta^{-1}(1+1n\theta),x\in R_+.$$

其中：$\theta\in\left(0,\min\{1,\alpha\}\right)$。对 $\forall 0\leq t\leq T$，由 Itô 公式[9] [10]可知

$$V_1\left(x\left(t\wedge\tau_k\right)\right)=V_1\left(x_0\right)+\int_0^{t\wedge\tau_k}LV_1\left(x(s)\right)\mathrm{d}s+M_1\left(t\wedge\tau_k\right). \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}LV_1(x)&=\left(\theta x^{\theta-1}-x^{-1}\right)x(a-bx)+\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}\begin{Bmatrix}(x+\sigma xz)^{\theta}-\ln(x+\sigma xz)-\theta^{-1}(1+\ln\theta)-x^{\theta}\\+\ln x+\theta^{-1}(1+\ln\theta)-(\theta x^{\theta-1}-x^{-1})\sigma xz\end{Bmatrix}\frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z\\&=\left(\theta x^{\theta}-1\right)(a-bx)+\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}x^{\theta}\left((1+\sigma z)^{\theta}-1-\theta\sigma z\right)\frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z+\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}\left(\sigma z-\ln(1+\sigma z)\right)\frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z\\&=\left(\theta x^{\theta}-1\right)(a-bx)+A(x)+B(x).\end{aligned} \tag{6}$$

$M_1\left(t\wedge\tau_k\right)=\int_0^{t\wedge\tau_k}\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}\left[x^{\theta}\left((1+\sigma z)^{\theta}-1-\ln(1+\sigma z)\right)\right]\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)$ 是一个局部鞅。

我们令 $A(x)=\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}x^{\theta}\left((1+\sigma z)^{\theta}-1-\theta\sigma z\right)\frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z=\left(A_{11}+A_{12}\right)x^{\theta}$，其中 A_{11} 由变量代换 $y=\sigma z$ 得，

$$A_{11}=\int_0^{\frac{1}{\sigma}}\left((1+\sigma z)^{\theta}-1-\theta\sigma z\right)\frac{C_\alpha}{z^{\alpha+1}}\mathrm{d}z=\sigma^{\alpha}\int_0^1\left((1+y)^{\theta}-1-\theta y\right)\frac{C_\alpha}{y^{\alpha+1}}\mathrm{d}y.$$

令 $H_1(y)=\dfrac{(1+y)^{\theta}-1-\theta y}{y^2},y\in(0,1)$。可知 $H_1(y)$ 在区间(0, 1)上有界，则存在一个正数 $\bar{C}_1$，使得 $\left|H_1(y)\right|\le\bar{C}_1$，因此有

$$A_{11}=\sigma^{\alpha}\int_0^1H_1(y)\frac{C_\alpha}{y^{\alpha-1}}\mathrm{d}y\le\frac{\sigma^{\alpha}C_\alpha}{2-\alpha}\bar{C}_1. \tag{7}$$

通过泰勒展开 $(1-y)^{\theta}<1-\theta y+\dfrac{\theta(\theta-1)}{2}y^2$ 和变量代换 $y=\sigma(-z)$ 得：

$$\begin{aligned}A_{12}&=\int_{-\frac{1}{\sigma}}^0\left((1+\sigma z)^{\theta}-1-\theta\sigma z\right)\frac{C_\alpha}{(-z)^{\alpha+1}}\mathrm{d}z\\&=-\sigma^{\alpha}\int_0^1\left((1-y)^{\theta}-1+\theta y\right)\frac{C_\alpha}{y^{\alpha+1}}\mathrm{d}y\\&\le\frac{\sigma^{\alpha}C_\alpha}{2-\alpha}\frac{\theta(1-\theta)}{2}.\end{aligned} \tag{8}$$

从而存在一个正数 $\bar{C}$，使得 $\bar{C}=\bar{C}_1+\dfrac{\theta(1-\theta)}{2}$，则有

$$A(x)\le\frac{\sigma^{\alpha}C_\alpha}{2-\alpha}\bar{C}x^{\theta}. \tag{9}$$

而另一方面，

$$\begin{aligned}B(x)&=\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}\left(\sigma z-\ln(1+\sigma z)\right)\frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z\\&=\int_0^{\frac{1}{\sigma}}\left(\sigma z-\ln(1+\sigma z)\right)\frac{C_\alpha}{z^{\alpha+1}}\mathrm{d}z+\int_{-\frac{1}{\sigma}}^0\left(\sigma z-\ln(1+\sigma z)\right)\frac{C_\alpha}{(-z)^{\alpha+1}}\mathrm{d}z\\&=B_{11}+B_{12}.\end{aligned}$$

定义 $H_2(y)=\dfrac{y-\ln(1+y)}{y^2}, y\in(0,1)$。则由洛必达法则可得：$H_2(y)\le\dfrac{1}{2}$。从而有

$$B_{11}=\sigma^{\alpha}\int_0^1\left(y-\ln(1+y)\right)\frac{C_\alpha}{y^{\alpha+1}}\mathrm{d}y=\sigma^{\alpha}\int_0^1 H_2(y)\frac{C_\alpha}{y^{\alpha-1}}\mathrm{d}y\le\frac{\sigma^{\alpha}C_\alpha}{2(2-\alpha)}. \tag{10}$$

经过变量代换

$$B_{12}=\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{0}\left(\sigma z-\ln(1+\sigma z)\right)\frac{C_\alpha}{(-z)^{\alpha+1}}\mathrm{d}z=\sigma^{\alpha}\int_0^1\left(y+\ln(1-y)\right)\frac{C_\alpha}{y^{\alpha+1}}\mathrm{d}y\le 0.$$

则

$$B(x)\le\frac{\sigma^{\alpha}C_\alpha}{2(2-\alpha)}. \tag{11}$$

把(9)式和(11)式代入(6)式，得

$$\begin{aligned}LV_1(x)&=a\theta x^{\theta}+bx-b\theta x^{\theta+1}-a+\frac{\sigma^{\alpha}C_\alpha}{2-\alpha}\bar{C}x^{\theta}+\frac{\sigma^{\alpha}C_\alpha}{2(2-\alpha)}\\&=\left(a\theta+\frac{\sigma^{\alpha}C_\alpha}{2-\alpha}\bar{C}\right)x^{\theta}+bx-b\theta x^{\theta+1}-a+\frac{\sigma^{\alpha}C_\alpha}{2(2-\alpha)}.\end{aligned}$$

则这必存在一个正数 C，使得 $LV_1(x)\le C$。

对 $0\le t\le T$，结合(6)式取期望得，

$$EV_1\left(x(T\wedge\tau_k)\right)\le V_1(x_0)+CE(\tau_k\wedge T)\le V_1(x_0)+CT. \tag{12}$$

令 $\Omega_k=\{\tau_k\le T\}$，则对充分大的数 k 有，

$$x(\tau_k,\omega)\le\frac{1}{k}\text{ 或 }x(\tau_k,\omega)\ge k.$$

已知 $V_1\left(\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)=0$，且 $V_1(x)$ 在区间 $\left(0,\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)$ 递减，而在 $\left(\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}},+\infty\right)$ 递增。

于是

$$V_1\left(x(\tau_k,\omega)\right)\ge\left(k^{\theta}-\ln k-\theta^{-1}(1+\ln\theta)\right)\wedge\left(\frac{1}{k^{\theta}}+\ln k-\theta^{-1}(1+\ln\theta)\right).$$

那么从(12)式得，

$$\left(k^{\theta}-\ln k-\theta^{-1}(1+\ln\theta)\right)\wedge\left(\frac{1}{k^{\theta}}+\ln k-\theta^{-1}(1+\ln\theta)\right)P\{\tau_k\le T\}\le EV_1\left(x(\tau_k,\omega)I_{\{\tau_k\le T\}}\right)\le V_1(x_0)+CT.$$

令 $k\to\infty.$，我们得到 $\infty>V_1(x_0)+CT=\infty\ a.s.$，这是一个矛盾。则我们必有 $\tau_\infty=\infty\ a.s.$。即 $P\{\tau_\infty=\infty\}=1$。于是，$P\{x(t)\in R_+,\forall t\ge 0\}=1$ 成立，证明完成。

3. 平稳分布

引理 3.1 [11]：设 R_+ 是正则有界的(即光滑)，若存在 R_+ 中的一个有界开子集 U，使得它的闭包 $\bar{U}\subset R_+$，且满足：

(i) $\inf\limits_{x\in U}\left(\sigma^2x^2\right)>0$；

(ii) $\sup E(\tau_U)<+\infty$ 对 R_+ 的每一个紧子集 K (使得 $U\subset K$)均成立，其中令 $\inf\varnothing=\infty$，且 $\tau_U=\inf\{t\ge 0:x(t)\in U\}$。

则随机微分方程具有唯一平稳分布。

接下来，利用上面的引理来给出本节的主要结论。

定理 3.1：在假设(A)成立的条件下，如果 $a-\dfrac{\sigma^\alpha C_\alpha}{2-\alpha}>0$，则随机微分方程(3)具有唯一平稳分布。

证明：设 M 为一个充分大的正实数，

$$U=\left\{x\in R_+:\frac{1}{M}<x<M\right\}.$$

显然 $\inf\limits_{x\in U}(\sigma^2x^2)=\dfrac{\sigma^2}{M^2}>0$，满足引理 3.1 中的条件(i)。接下来，我们将验证引理 3.1 中的条件(ii)。

首先考虑函数

$$V_2(x)=x^\theta+x^{-1}-\theta^{-\frac{\theta}{\theta+1}}-\theta^{\frac{1}{\theta+1}},x\in R_+.$$

函数 $V_2(x)$ 在区间 $\left(0,\theta^{-\frac{1}{\theta+1}}\right)$ 上递减，在区间 $\left(\theta^{-\frac{1}{\theta+1}},+\infty\right)$ 上递增。则 $V_2(x)\ge V_2\left(\theta^{-\frac{1}{\theta+1}}\right)=0.$

由 Itô 公式[9] [10]得：

$$\begin{aligned}LV_2(x)&=\left(\theta x^{\theta-1}-x^{-2}\right)x(a-bx)+\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}\begin{Bmatrix}(x+\sigma xz)^\theta-x^\theta+(x+\sigma xz)^{-1}\\-x^{-1}-\sigma xz\left(\theta x^{\theta-1}-x^{-2}\right)\end{Bmatrix}\frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z\\&=\left(\theta x^{\theta-1}-x^{-2}\right)x(a-bx)+\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}x^\theta\left((1+\sigma z)^\theta-1-\theta\sigma z\right)\frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z\\&\quad+\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}x^{-1}\left((1+\sigma z)^{-1}-1+\sigma z\right)\frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z\\&=\left(\theta x^{\theta-1}-x^{-2}\right)x(a-bx)+A(x)+C(x).\end{aligned}\tag{13}$$

其中

$$C(x)=\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}x^{-1}\left((1+\sigma z)^{-1}-1+\sigma z\right)\frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z=(C_{11}+C_{12})x^{-1}.\tag{14}$$

对于积分 C_{11}，由 $y=\sigma z$，我们有

$$C_{11}=\int_0^{\frac{1}{\sigma}}\left((1+\sigma z)^{-1}-1+\sigma z\right)\frac{C_\alpha}{z^{\alpha+1}}\mathrm{d}z=\sigma^\alpha\int_0^1\left((1+y)^{-1}-1+y\right)\frac{C_\alpha}{y^{\alpha+1}}\mathrm{d}y.$$

令 $H_3(y)=\dfrac{(1+y)^{-1}-1+y}{y^2},y\in(0,1)$，则不难得到 $H_3(y)\le\lim\limits_{y\to0^+}H_3(y)=1$。从而可得：

$$C_{11}\le\frac{\sigma^\alpha C_\alpha}{2-\alpha}.\tag{15}$$

又有

$$\begin{aligned}C_{12}&=\int_{-\frac{1}{\sigma}}^0\left((1+\sigma z)^{-1}-1+\sigma z\right)\frac{C_\alpha}{(-z)^{\alpha+1}}\mathrm{d}z=-\sigma^\alpha\int_0^1\left((1-y)^{-1}-1-y\right)\frac{C_\alpha}{y^{\alpha+1}}\mathrm{d}y\\&=-\sigma^\alpha\int_0^1\frac{1}{1-y}\frac{C_\alpha}{y^{\alpha-1}}\mathrm{d}y\le0.\end{aligned}\tag{16}$$

将 C_{11},C_{12} 代入(14)式，可得

$$C(x)\le\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}x^{-1}. \tag{17}$$

联合(9)式和(17)式，则有

$$\begin{aligned}LV_2(x)&\le\left(\theta x^{\theta-1}-x^{-2}\right)x(a-bx)+\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}\bar{C}x^{\theta}+\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}x^{-1}\\&=\left(a\theta+\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}\bar{C}\right)x^{\theta}-b\theta x^{\theta+1}+b-\left(a-\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}\right)x^{-1}.\end{aligned}$$

如果满足定理中的条件 $a-\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}>0$，则存在足够大的数 M，使得

$$LV_2(x)\le-1,\forall x\in R_{+}-U.$$

而我们又知道

$$\mathrm{d}V_2(x)=LV_2(x)+\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}\left\{(x+\sigma xz)^{\theta}-x^{\theta}+(x+\sigma xz)^{-1}-x^{-1}\right\}\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z).$$

设 $\tau_U=\inf\{t\ge0:x(t)\in U\}$，从而 $0\le V_2(x_0)-E(t\wedge\tau_U),\forall t\ge0$。当 $t\to+\infty$ 时，我们得到 $E(\tau_U)\le V_2(x_0)<+\infty,\forall x\in R_{+}-U$ 。

根据引理 3.1，定理 3.1 证明完成。即方程(3)具有唯一的平稳分布。

4. 指数遍历

引理 4.1 [12]：$\{x(t)\}_{t\ge0}$ 为一个马尔可夫过程。如果存在一个 Lyapunov 函数 $V(x)$和两个正常数 ψ，K 使得

$$LV(x)\le-\psi V(x)+K,\forall x\in R_{+}.$$

其中 L 是马尔可夫过程 $\{x(t)\}_{t\ge0}$ 的无穷小生成元，则我们称 $\{x(t)\}_{t\ge0}$ 是指数遍历的。

定理 4.1：在假设**(A)**成立的条件下，如果 $a-\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}>0$，则随机微分方程(3)是指数遍历的。

证明：首先找出一个 Lyapunov 函数：

$$V_3(x)=\ln(1+x)+x^{-1},\forall x\in R_{+}.$$

则通过 Itô 公式计算得：

$$\begin{aligned}LV_3(x)&=\left(\frac{x}{1+x}-x^{-1}\right)(a-bx)+\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}x^{-1}\left\{\ln\left(\begin{array}{l}1+x+\sigma xz+(x+\sigma xz)^{-1}\\-\ln(1+x)-x^{-1}-\left(\frac{x}{1+x}-x^{-1}\right)\sigma z\end{array}\right)\right\}\frac{C_{\alpha}}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z\\&=\frac{x}{1+x}(a-bx)-ax^{-1}+b+C(x)+F(x).\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $C(x)$ 就是(14)式的定义，而

$$F(x)=\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}\left(\ln\left(1+\frac{\sigma xz}{1+x}-\frac{\sigma xz}{1+x}\right)\right)\frac{C_{\alpha}}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z.$$

由基本不等式 $\ln(1+\eta)\le\eta,\eta>0$，再通过变量代换 $\eta=\frac{\sigma xz}{1+x}$，得 $F(x)\le0$。

DOI: 10.12677/pm.2019.91005

代入(18)式有

$$LV_3(x)\le(a-bx)-ax^{-1}+b+C(x)+F(x)\le a+b-bx-\left(a-\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}\right)x^{-1}.$$

从而得到

$$LV_3(x)+\psi V_3(x)\le a+b-bx+\psi\ln(1+x)-\left(a-\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}-\psi\right)x^{-1}. \tag{19}$$

若满足条件 $a-\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}>0$，则必然存在一个正常数 ψ，使得

$$a-\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}-\psi>0.$$

于是存在一个正常数 K，对 $\forall x\in R_+$，(19)式有

$$LV_3(x)+\psi V_3(x)\le K.$$

由引理 4.1 可知，随机微分方程(3)是指数遍历的。证毕。

5. 灭绝性

在本节中，我们将讨论随机微分方程(3)的灭绝性。在证明之前，我们首先引入定义及鞅的强大数定律。

定义 5.1： 对任意初值 $x_0\in R_+$，如果模型的解 $x(t)$ 满足 $\limsup_{t\to+\infty}x(t)=0,a.s.$，也就是说 $P(x(t)=0)=1,a.s.$。则我们称模型是灭绝的。

引理 5.1：(鞅的强大数定律[13]) 令 $M(t),t\ge0$ 是一个局部鞅，定义

$$\rho_m(t)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}\langle M,M\rangle(s)}{(1+s)^2},t\ge0.$$

若有 $\lim_{t\to+\infty}\rho_m(t)<+\infty\ a.s.$，则可推出 $\lim_{t\to+\infty}\frac{M(t)}{t}=0\ a.s.$。

定理 5.1： 对任意初值 $x_0\in R_+$，在假设**(A)**成立的条件下，随机微分方程(3)的解 $x(t)$ 服从

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\ln x(t)}{t}\le a-\frac{4}{9}\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}\ a.s.$$

特别地，若满足 $a-\frac{4}{9}\frac{\sigma^{\alpha}C_{\alpha}}{2-\alpha}<0$，则 $\limsup_{t\to+\infty}x(t)=0,a.s.$。

证明： 由 Itô 公式可得

$$\ln x(t)=\ln x_0+\int_0^t(a-bx(s))\mathrm{d}s+M(t)+\int_0^t\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}\left(\ln(1+\sigma z)-\sigma z\right)\frac{C_{\alpha}}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z\mathrm{d}s. \tag{20}$$

其中，$M(t)=\int_0^t\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}\ln(1+\sigma z)\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)$ 是一个局部鞅。

我们首先讨论积分 $\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}}\left(\ln(1+\sigma z)-\sigma z\right)\frac{C_{\alpha}}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z$。

令 $H_4(y)=\ln(1+y)-y+\frac{2}{9}y^2,\forall y\in(-1,1)$。对 $H_4(y)$ 求导可得

$$H_4'(y) = \frac{-y}{1+y} + \frac{4}{9}y.$$

已知 $y \in (-1,0), H_4'(y) > 0; y \in (0,1), H_4'(y) < 0$，则可得 $H_4(y) \le H_4(0) = 0$。

因此我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}} \left(\ln(1+\sigma z) - \sigma z\right) \frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}} \mathrm{d}z \\
&= \sigma^\alpha \int_{0<|y|<1} \left(\ln(1+y) - y\right) \frac{C_\alpha}{|y|^{\alpha+1}} \mathrm{d}y \\
&\le \sigma^\alpha \int_{0<|y|<1} -\frac{2}{9} y^2 \frac{C_\alpha}{|y|^{\alpha+1}} \mathrm{d}y \\
&\le -\frac{4}{9} \sigma^\alpha \int_0^1 \frac{C_\alpha}{y^{\alpha-1}} \mathrm{d}y \\
&\le -\frac{4}{9} \sigma^\alpha \frac{C_\alpha}{2-\alpha}.
\end{aligned} \tag{21}$$

而对于 $M(t)$，由 Meyer 尖括号过程可知，

$$\begin{aligned}
\langle M, M \rangle(t) &= \int_0^t \int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}} \left(\ln(1+\sigma z)\right)^2 \frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}} \mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_0^{\frac{1}{\sigma}} \left(\ln(1+\sigma z)\right)^2 \frac{C_\alpha}{z^{\alpha+1}} \mathrm{d}z\mathrm{d}s + M_{11}.
\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \int_0^t \int_{-\frac{1}{\sigma}}^0 \left(\ln(1+\sigma z)\right)^2 \frac{C_\alpha}{(-z)^{\alpha+1}} \mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
&= -\sigma^\alpha \int_0^t \int_0^1 \left(\ln(1-y)\right)^2 \frac{C_\alpha}{y^{\alpha+1}} \mathrm{d}y\mathrm{d}s \le 0.
\end{aligned}$$

则由基本不等式 $\ln(1+t) \le t, \forall t > 0$，得

$$\begin{aligned}
\langle M, M \rangle(t) &\le \int_0^t \int_0^{\frac{1}{\sigma}} \left(\ln(1+\sigma z)\right)^2 \frac{C_\alpha}{z^{\alpha+1}} \mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
&\le \sigma^\alpha \int_0^t \int_0^1 \left(\ln(1+y)\right)^2 \frac{C_\alpha}{y^{\alpha+1}} \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\le \sigma^\alpha \int_0^t \int_0^1 \frac{C_\alpha}{y^{\alpha-1}} \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\le \frac{\sigma^\alpha C_\alpha}{2-\alpha} < +\infty.
\end{aligned}$$

于是通过上式可知，

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\mathrm{d}\langle M, M \rangle(s)}{(1+s)^2} &\le \frac{t}{1+t} \int_{0<|z|<\frac{1}{\sigma}} \left(\ln(1+\sigma z)\right)^2 \frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}} \mathrm{d}z \\
&\le \frac{\sigma^\alpha C_\alpha}{2-\alpha} < +\infty.
\end{aligned}$$

由鞅的强大数定律得

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{M(t)}{t}=0\ a.s. \tag{22}$$

再把(21)式和(22)式代入(20)式，我们有

$$\ln x(t)\le \ln x_0+\int_0^t\left(a-bx(s)-\frac{4}{9}\frac{\sigma^\alpha C_\alpha}{2-\alpha}\right)\mathrm{d}s$$

上式两端同除以 t 并令 $t\to+\infty$，可得

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\ln x(t)}{t}\le a-\frac{4}{9}\frac{\sigma^\alpha C_\alpha}{2-\alpha}.$$

此外，若有 $a-\frac{4}{9}\frac{\sigma^\alpha C_\alpha}{2-\alpha}<0$，则定理 5.1 的最后结论成立。即 $x(t)$ 以概率 1 灭绝。

参考文献

[1] Lotka, B.A.J. (1956) Elements of Physical Biology. Williams and Wilkins.

[2] Volterra, V. (1926) Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Memoire della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, **33**, 31-113.

[3] Gard, T.C. (1984) Persistence in Stochastic Food Web Models. *Bulletin of Mathematical Biology*, **46**, 357-370. https://doi.org/10.1007/BF02462011

[4] Liu, H. and Zhien, M. (1991) The Threshold of Survival for System of Two Species in a Polluted Environment. *Journal of Mathematical Biology*, **30**, 49-61. https://doi.org/10.1007/BF00168006

[5] Richardson, L. (1948) Variation of the Frequency of Fatal Quarrels with Magnitude. *Publications of the American Statistical Association*, **43**, 523-546. https://doi.org/10.1080/01621459.1948.10483278

[6] Schaefer, J.A. and Mahoney, S.P. (2003) Spatial and Temporal Scaling of Population Density and Animal Movement: A Power Law Approach. *Écoscience*, **10**, 496-501. https://doi.org/10.1080/11956860.2003.11682797

[7] Pinto, C.M.A., Lopes, A.M. and Machado, J.A.T. (2012) A Review of Power Laws in Real Life Phenomena. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, 3558-3578. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.01.013

[8] Zhang, Z., Zhang, X. and Tong, J. (2017) Exponential Ergodicity for Population Dynamics Driven by α-Stable Processes. *Statistics and Probability Letters*, **125**, 149-159. https://doi.org/10.1016/j.spl.2017.02.010

[9] Applebaum, D. (2009) Lévy Processes and Stochastic Calculus. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511809781

[10] Sato, K. (1999) Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press, Cambridge.

[11] Khasminskii, R. (1980) Stochastic Stability of Differential Equations. Sijthoff and Noordhoff. https://doi.org/10.1007/978-94-009-9121-7

[12] Meyn, S.P., Tweedie, R.L., *et al.* (1993) Stability of Markovian Processes III: Foster-Lyapunov Criteria for Continuous Time Processes. *Advances in Applied Probability*, **25**, 518-548. https://doi.org/10.2307/1427522

[13] Lipster, R. (1980) A Strong Law of Large Numbers for Local Martingales. *Stochastics*, **3**, 217-228. https://doi.org/10.1080/17442508008833146

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org