Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 417-420
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93056

Hans汉斯

Proof of No Odd Complete Number

Shanzhong Zou

Guangzhou Guangdong
Email: 75473066@qq.com

Received: Apr. 26th, 2019; accepted: May 6th, 2019; published: May 22nd, 2019

Abstract

The odd number is Q, $Q = 2N + 1$, and N is called odd element of Q. Through the analysis of N, it is proved that there is no odd complete number.

Keywords

Ontology of Odd Numbers, The Ontology of Compound Odd Numbers

证明无奇完全数

邹山中

广东 广州
Email: 75473066@qq.com

收稿日期：2019年4月26日；录用日期：2019年5月6日；发布日期：2019年5月22日

摘 要

设奇数$Q = 2N + 1$，将N称为奇数Q的奇体，通过对N的分析证明了不存在奇完全数。

关键词

奇体，奇合数体

作者简介：出生年月：1959 年 9 月，籍贯：广东省始兴县，学历：本科，职称：工程师。

文章引用: 邹山中. 证明无奇完全数[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 417-420.
DOI: 10.12677/pm.2019.93056

1. 奇合数体的表示法

设 p 是素数，Q 与 q 是奇数，使 $Q = pq$ [1]，若 $Q = 2N+1$，$p = 2s+1$，$q = 2n+1$，$n \ge 1$，$N \ge 1$，则有 $2N+1 = (2S+1)(2n+1)$，从而 $N = (2S+1)n + s, n \ge 1$。N 称为奇合数体，可得**定义 1，奇合数体的表示法，**

$$N = P_i n + S_i \tag{1}$$

2. 命题证明

用反证法，假设存在奇完全数 Q，$Q = P_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_i^{n_i} \cdots p_m^{m}$，$n_i \ge 1$，$p$ 是奇完全数 Q 的素数因子，$Q = 2N+1$，把 Q 分为两个奇数的乘积，$Q = P_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_i^{n_i} \times p_{i+1}^{n_{i+1}} \cdots p_m^{m} = Q_{i1} Q_{i2}$，根据奇完全数的定义，有 $Q = Q_{11}Q_{12} = Q_{21}Q_{22} = \cdots = Q_{i1}Q_{i2} = \cdots = Q_{t1}Q_{t2} = 1 + \sum_{i=1}^{t}(Q_{i1} + Q_{i2})$，$(i \ge 1, t \ge 1)$。

设，$Q_{i1} = 2N_{i1} + 1, Q_{i2} = 2N_{i2} + 1$，则有 $Q = 2N+1 = (2N_{i1}+1)(2N_{i2}+1)$。

即：$Q = 2N+1 = 4N_{i1}N_{i2} + 2N_{i1} + 2N_{i2} + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{t}(2N_{i1} + 1 + 2N_{i2} + 1)$

可得：

$$N = 2N_{i1}N_{i2} + N_{i1} + N_{i2} = \sum_{i=1}^{t}(N_{i1} + N_{i2} + 1) \tag{2}$$

(2)式称为奇完全数的奇体表达式。由(2)可得**推论一，N 为偶数，t 也是偶数。**

证：若 N 为奇数，则 $N_{i1} + N_{i2}$ 为奇数，而 $N_{i1} + N_{i2} + 1$ 为偶数，左右奇偶不合，故知 $N_{i1} + N_{i2}$ 必为偶数，$N_{i1} + N_{i2} + 1$ 是奇数，所以 t 必须是偶数。**证明完。**

$\because$ $N \in h$，根据**定义 1**，$N = pn_i + s$，$(s = (p-1)/2$，$n_i \ge 1)$。

在 $Q = P_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_i^{n_i} \cdots p_m^{m}$ 中，设 p_1 是 Q 中最小的素数，把 N_{i1} 及 N_{i2} 分别表为

$$N_{i1} = p_1 n_1 + k_1, N_{i2} = p_1 n_2 + k_2, (n_1 \ge 0, n_2 \ge 0, 0 \le k_1 < p_1, 0 \le k_2 < p_1)$$

N_{i1}，N_{i2} 可以依据组合 $\{p_1 n_1 + k_1, p_1 n_2 + k_2\}$ 的不同，形成不同表达式。

将各种组合代入(2)，有

$$\begin{aligned} & 2(p_1 n_1 + k_1)(p_1 n_2 + k_2) + p_1 n_1 + k_1 + p_1 n_2 + k_2 \\ & = 2p_1^2 n_1 n_2 + 2p_1 n_1 k_2 + 2p_1 n_2 k_1 + 2k_1 k_2 + p_1 n_1 + k_1 + p_1 n_2 + k_2 \end{aligned}$$

$$N = p_1 n_i + s_1 = p_1(2p_1 n_1 n_2 + 2n_2 k_1 + 2p_1 n_1 k_2 + n_1 + n_2) + 2k_1 k_2 + k_1 + k_2$$

上式简化后得：

$$N = p_1 n_j + 2k_1 k_2 + k_1 + k_2 = \sum_{i=1}^{t}(p_1 n_1 + k_1 + p_1 n_2 + k_2 + 1) \tag{3}$$

要使(3)成立，必须满足 $k_2(2k_1+1) + k_1 \equiv s_1 \bmod p_1$ [2]。

我们可以得到**推论二**，在 $k_2(2k_1+1) + k_1 = p_1 n_i + s_1$ 中，$k_1 = s_1$ 或 $k_2 = s_1$，两者必取其一。

证，$\because$ $Q = P_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_i^{n_i} \cdots p_m^{m}$，即：$Q = p_1 q_1 q_2$，其中 p_1 和 $p_1 q_1$ 可以表示为 $N_{i1} = p_1 n_1 + s_1$，$\therefore p_1 n_j + 2k_1 k_2 + k_1 + k_2 = p_1 n_u + s_1$ **证明完。**

我们讨论当 $k_1 = s_1$ 时，k_2 的取值。

把 $N_{i1} = p_1 n_1 + k_1$ 和 $N_{i2} = p_1 n_2 + k_2$ 还原为 Q，

$$Q_{i1} = 2(p_1 n_1 + s_1) + 1 = p_1 q_1,\ Q_{i2} = 2(p_1 n_2 + k_2) + 1 = 2p_1 n_2 + 2k_2 + 1,$$

$Q_{i2} = (2k_2+1)(2p_1 n_2/(2k_2+1) + 1)$，$\because Q_{i2}$ 是奇数，$\therefore 2p_1 n_2/(2k_2+1)$ 应该是偶数，要使 $2p_1 n_2/(2k_2+1)$

是偶数，必须满足以下条件：1) $k_2=s_1$，有 $p_1/(2k_2+1)=1$， 2) $k_2=0$ 有 $2k_2+1=1$，3) $n_2=(2k_2+1)n$ 有 $n_2/(2k_2+1)=n$：

1) $k_2=s_1$，

$$\because k_1=s_1 \quad \therefore N=p_1n_i+s_1=2p_1n_j+p_1s_1+s_1=\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2+s_1+s_1+1)$$

$$\frac{N}{p_1}=2n_j+s_1+(s_1/p_1)=\sum_{i=1}^{t}(n_1+n_2+1)$$

$\because s_1/p_1$ 不是整数，$\therefore$ 当 $k_1=s_1$ 时，$k_2\neq s_1$。

因此我们可以得到**推论三**，在 $Q=P_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_i^{n_i}\cdots p_m^{m}$ 中，有 $n=1$，即 $Q=p_1p_2\cdots p_i\cdots p_m$。

证，如果 $p_i^{n_i},n_i>1$，则有 $Q=p_iq_1p_iq_2$，使得 $k_1=s_1,k_2=s_1$.，与推论三矛盾。**证明完**

2) $k_2=0,k_1=s_1$

$$N=p_1n_i+s_1=\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2+s_1+1)=t(s_1+1)+\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2)$$

$\exists!t(s_1+1)\equiv s_1 \bmod p_1$，即 $t(s_1+1)=p_1n+s_1$，使等式成立。

$\because t$ 是偶数，设 $t=2n_t$

$2n_ts_1+2n_t=2n_ts_1+n_t+n_t=p_1n_t+n_t$，$\exists!n_t=p_1n+s_1,n\geq 0$，满足等式，

$$\therefore p_1^2n+p_1s_1+p_1n+s_1=p_1n(p_1+1)+2s_1s_1+s_1+s_1$$

$N_{i1}=p_1n_1+s_1,N_{i2}=p_1n_2+s_1$，这样的结果与 $k_2=s_1$ 相同，$\therefore k_1=s_1$，$k_2\neq 0$

3) 在 $2p_1n_2/(2k_2+1)$ 中，$n_2=(2k_2+1)n$

$\because p_1/(2k_2+1)$ 不是整数，$\therefore n_2/(2k_2+1)$ 必须是整数。

$\because$ p_1 是 Q 中最小的素数，$\therefore(2k_2+1)=p_i$，$p_i>p_1$，$\therefore p_1n_2+k_2$ 可以表示为

$p_in_2+s_i$，$s_i=k_2$，$s_i=(p_i-1)/2$，p_i 是 Q 中的素数。

$$\because 0\leq k_2<p_1,\ (2k_2+1)>p_1,\ \therefore k_1<k_2\leq 2k_1,$$

设 $k_1=m_1$，$k_2=m_2$，有 $k_2-k_1=(m_2-m_1)=\Delta n$，显然 $\Delta n\leq m_1$，$k_2=\Delta n+k_1$

$$\therefore (3)有: \begin{aligned} N=p_1n_i+s_1 &=\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+k_1+p_1n_2+k_1+\Delta n+1) \\ &=t\Delta n+\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2+p_1) \end{aligned}$$

$\exists!(t\Delta n-s_1)/p_1=n$，即 $s_1(t\Delta n/s_1-1)/p_1=n$，$\because s_1/p_1$ 不是整数，$\therefore(t\Delta n/s_1-1)/p_1$ 必须是整数，如果. $\Delta n/s_1$ 是整数，即 $k_1=s_1,k_2=2s_1$，$\therefore$(2)有：

$$N=2p_1n_j+2\times 2s_1s_1+2s_1+s_1=\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2+s_1+2s_1+1)$$

$$2p_1n_j+s_1(4s_1+3)=ts_1+\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2+p_1)$$

$\exists!ts_1=p_1n+s_1$ 使得 $\left(ts_1+\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2+p_1)\right)\equiv s_1 \bmod p_1$。

$(ts_1-s_1)/p_1=n$，即 $s_1(t-1)/p_1=n$，$\because s_1/p_1$ 不是整数$\therefore(t-1)/p_1=n$，即 $t-1=p_1n$。

$\because Q=p_1p_2\cdots p_i\cdots p_m$，用 Q 中 p_i 逐个代入 $\therefore t-1=p_1p_2\cdots p_i\cdots p_mn$，这使得 $\sum_{i=1}^{t}(N_{i1}+N_{i2}+1)>Q$。$\therefore\Delta n\neq s_1$。

$\because(t\Delta n/s_1-1)/p_1=n$，$\therefore t\Delta n/s_1-1=p_1n$，$\because\Delta n/s_1$ 不是整数，$\therefore t/s_1$ 必须是整数，$\therefore t\Delta n$ 在能整除 $s_1,s_2,\cdots,s_i,\cdots,s_m$ 的同时，$\dfrac{t\Delta n}{s_1}-1$ 还必须整除 p_i。

DOI: 10.12677/pm.2019.93056

$\therefore t > p_1 p_2 \cdots p_i \cdots p_m$，这样便造成 $\sum_{i=1}^{t}\left(N_{i1}+N_{i2}+1\right)>Q$，$\therefore$ 当 $k_1 = s_1$ 时，因 k_2 无法取值，原假设不成立，所以不存在奇完全数。证明完！

参考文献

[1] Gu, C.H. (1992) Mathematics Dictionary. Shanghai Dictionary Press, Shanghai.

[2] Min, S.H. (1981) Method of Number Theory. Science Press, Beijing.