Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 427-440
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93058

Existence of Solutions for a Class of Fractional Differential Equations with Boundary Value Problems on Infinite Interval

Ruixin Zhang, Wenxia Wang*

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: 1390019187@qq.com, *wwxgg@126.com

Received: Apr. 29th, 2019; accepted: May 9th, 2019; published: May 24th, 2019

Abstract

In this paper, we study existence of solutions for a class of fractional differential equations with boundary value problems on infinite interval by using cone compression, cone expansion fixed point theorem and Leggett-Williams fixed point theorem. Example is presented to illustrate our results.

Keywords

Infinite Interval, Fractional Differential Equations, The Boundary Value Problem, Fixed Point

一类无穷区间上分数阶微分方程组边值问题正解的存在性

张瑞鑫，王文霞*

太原师范学院数学系，山西 晋中
Email: 1390019187@qq.com, *wwxgg@126.com

收稿日期：2019年4月29日；录用日期：2019年5月9日；发布日期：2019年5月24日

摘　要

本文研究了一类无穷区间上分数阶微分方程组的边值问题。先构造Green函数，并讨论相关性质，再利

*通讯作者。

文章引用: 张瑞鑫，王文霞. 一类无穷区间上分数阶微分方程组边值问题正解的存在性[J]. 理论数学，2019，9(3): 427-440. DOI: 10.12677/pm.2019.93058

用锥拉伸与锥压缩定理和Leggett-Williams不动点定理讨论边值问题解的存在性，最后给出例子说明定理的适用性。

关键词

无穷区间，分数阶微分方程组，边值问题，不动点

1. 引言

分数阶微分方程在很多领域都有着广泛的应用，尤其在流体力学、分数控制系统、气体力学、电子动学、化学工程等方面，目前已取得了很多优秀的研究成果，如文献[1]-[10]。但在分数阶微分方程的边值问题的研究中，有限区间上的研究较多，无穷区间上的研究较少。

在文献[3]中杨凯军运用锥拉伸与锥压缩不动点定理和不动点指数理论研究如下分数阶微分方程 m 点边值问题。

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u_1(t)+f_1(t,u_1(t),u_2(t))=0, & t\in(0,\infty) \\ D_{0^+}^{\alpha}u_2(t)+f_2(t,u_1(t),u_2(t))=0, & t\in(0,\infty) \\ u_1(0)=u_1'(0)=u_2(0)=u_2'(0)=0, & \\ D_{0^+}^{\alpha-1}u_1(+\infty)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u_1(\xi_i),\ D_{0^+}^{\alpha-1}u_2(+\infty)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u_2(\xi_i) & \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$2<\alpha<3$，$0<\xi_1<\xi_2<\xi_3<\cdots<\xi_{m-2}<+\infty$，$\beta_i>0$，$i=1,2,3,\cdots,m-2$，得到边值问题(1.1)至少存在一个和两个正解的充分条件。受上文的启发，本文研究如下的一类分数阶微分方程组的边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u_1(t)+a_1(t)f_1(t,u_1(t),u_2(t))=0, & t\in R^+ \\ D_{0^+}^{\alpha}u_2(t)+a_2(t)f_2(t,u_1(t),u_2(t))=0, & t\in R^+ \\ u_1(0)=u_2(0)=0,\ D_{0^+}^{\alpha-2}u_1(0)=D_{0^+}^{\alpha-2}u_1(0)=0, & \\ D_{0^+}^{\alpha-1}u_1(+\infty)=\xi I^{\beta}u_1(\eta),\ D_{0^+}^{\alpha-1}u_2(+\infty)=\xi I^{\beta}u_2(\eta) & \end{cases} \tag{1.2}$$

其中，$2<\alpha\le 3$，$\beta>0$，$\xi\in R$，$\eta\in[0,+\infty)$，$\Gamma(\alpha+\beta)>\xi\eta^{\alpha+\beta-1}$，$R^+=[0,+\infty)$，$D_{0^+}^{\alpha}$ 与 $D_{0^+}^{\alpha-1}$ 都是标准的 Riemann-Liouville 分数阶微分，I^{β} 是标准的 Riemann-Liouville 分数阶积分。

2. 预备知识及引理

定义 1.1 [2] 连续函数 f：$(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分的定义为：

$$I_{0^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s,$$

对任意的 $\alpha>0$，右端在 R^+ 上逐点可积。

定义 1.2 [2] 函数 f：$(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分的定义为：

$$D_{0^+}^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n}\int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s$$

其中，n 是大于等于 α 的最小正整数，等式的右端在 $(0,+\infty)$ 有定义。

引理 1.1 [2] 假设 $\alpha>0$，如果 $u\in C(0,+\infty)$ 且有 $D_{0^+}^{\alpha}u\in L^1(0,+\infty)$ 则：

$$I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n}$$

其中 $c_i\in R(i=1,2,\cdots,n)$ 为任意常数，n 为大于等于 α 的最小正整数。

引理 1.2 设 $h\in L^1[0,+\infty)$ 连续，那么边值问题

$$\begin{cases}D_{0^+}^{\alpha}u(t)+h(t)=0, \quad 0\le t<+\infty,\\ u(0)=D_{0^+}^{\alpha-2}u(0)=0,\ D_{0^+}^{\alpha-1}u(+\infty)=\xi I^{\beta}u(\eta).\end{cases} \tag{2.1}$$

有唯一解：$u(t)=\int_0^{+\infty}G(t,s)h(s)\mathrm{d}s$，其中，$G(t,s)=G_1(t,s)+G_2(t,s)$，

$$G_1(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}t^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}, & 0\le s\le t<+\infty,\\ t^{\alpha-1}, & 0\le t<s<+\infty.\end{cases}$$

$$G_2(t,s)=\frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Delta}\begin{cases}\eta^{\alpha+\beta-1}-(\eta-s)^{\alpha+\beta-1}, & 0\le s\le \eta<+\infty,\\ \eta^{\alpha+\beta-1}, & 0\le \eta<s<+\infty.\end{cases}$$

$$\Delta=\Gamma(\alpha)\left[\Gamma(\alpha+\beta)-\xi\eta^{\alpha+\beta-1}\right].$$

证明：由引理 1.1 及 $D_{0^+}^{\alpha}u(t)=-h(t)$ 得 $u(t)=-I_{0^+}^{\alpha}h(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+c_3t^{\alpha-3}$。由边界条件 $u(0)=0$ 得 $c_3=0$，所以 $u(t)=-I_{0^+}^{\alpha}h(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}$，于是

$$\begin{aligned}D_{0^+}^{\alpha-2}u(t)&=-I_{0^+}^{2}h(t)+c_1D_{0^+}^{\alpha-2}t^{\alpha-1}+c_2D_{0^+}^{\alpha-2}t^{\alpha-2}\\&=-\int_0^t(t-s)h(s)\mathrm{d}s+c_1\Gamma(\alpha)t+c_2\Gamma(\alpha-1)\end{aligned},$$

由 $D_{0^+}^{\alpha-2}u(0)=0$ 得 $c_2=0$，因此 $u(t)=-I_{0^+}^{\alpha}h(t)+c_1t^{\alpha-1}$，

$$D_{0^+}^{\alpha-1}u(t)=-I_{0^+}^{1}h(t)+c_1D_{0^+}^{\alpha-1}t^{\alpha-1}=-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s+c_1\Gamma(\alpha),$$

$$D_{0^+}^{\alpha-1}u(+\infty)=-\int_0^{+\infty}h(s)\mathrm{d}s+c_1\Gamma(\alpha),$$

$$\xi I^{\beta}u(\eta)=\xi I^{\beta}\left(-I_{0^+}^{\alpha}h(\eta)+c_1\eta^{\alpha-1}\right)=-\xi I^{\alpha+\beta}h(\eta)+c_1\xi\times\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\eta^{\alpha+\beta-1},$$

由边值条件可得

$$c_1=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^{+\infty}h(s)\mathrm{d}s-\xi\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta-1}h(s)\mathrm{d}s}{\Delta},$$

$$u(t)=\frac{-\int_0^t\left(\Gamma(\alpha+\beta)-\xi\eta^{\alpha+\beta-1}\right)(t-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s}{\Delta}+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)t^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}h(s)\mathrm{d}s-\xi\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta-1}t^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s}{\Delta}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\int_0^t \left(\Gamma(\alpha+\beta)-\xi\eta^{\alpha+\beta-1}\right)(t-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}\left(\Gamma(\alpha+\beta)-\xi\eta^{\alpha+\beta-1}\right)t^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s}{\Delta} \\
&\quad+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}t^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}h(s)\mathrm{d}s-\xi t^{\alpha-1}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta-1}h(s)\mathrm{d}s}{\Delta} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s-\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s\right) \\
&\quad+\frac{\xi t^{\alpha-1}\eta^{\alpha+\beta-1}\int_0^{+\infty}h(s)\mathrm{d}s-\xi t^{\alpha-1}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta-1}h(s)\mathrm{d}s}{\Delta} \\
&= \int_0^{+\infty}G_1(t,s)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}G_2(t,s)h(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{+\infty}G(t,s)h(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

证毕。

引理 1.3 函数 $G(t,s)$ 满足如下性质

1) $G(t,s)$ 和 $\dfrac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}$ 均在 $(t,s)\in R^+\times R^+$ 上连续，并且对任意的 $t,s\in R^+$， $G(t,s)\ge 0$；

2) $\dfrac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\le\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}+\dfrac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}$， $(t,s)\in R^+\times R^+$；

3) $\min\limits_{\frac{1}{k}\le t\le k}\dfrac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\ge\eta(k)\sup\limits_{t\in R^+}\dfrac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}$，其中 $\eta(k)=\dfrac{1}{4k^2\left(1+k^{\alpha-1}\right)}$。

证明：由 $G(t,s)$ 的定义容易证明(1)，接下来证明(2)和(3)。

当 $(t,s)\in R^+\times R^+$ 时，

$$
\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\times\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)},\quad \frac{G_2(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\le\frac{1}{\Delta}\times\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}\le\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta},
$$

$$
\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}=\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}+\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta},
$$

即性质(2)成立。

$$
G_2(t,s)=\frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Delta}g_2(s),
$$

$$
g_2(s)=\begin{cases}\eta^{\alpha+\beta-1}-(\eta-s)^{\alpha+\beta-1}, & 0\le s\le\eta<+\infty\\ \eta^{\alpha+\beta-1}, & 0\le\eta<s<+\infty\end{cases},
$$

$$
\frac{G_2(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}=\frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Delta\left(1+t^{\alpha-1}\right)}g_2(s)\le\frac{\xi}{\Delta}g_2(s),\quad \sup_{t\in R^+}\frac{G_2(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\le\frac{\xi}{\Delta}g_2(s),
$$

$$
\begin{aligned}
\min_{\frac{1}{k}\le t\le k}\frac{G_2(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}&=\min_{\frac{1}{k}\le t\le k}\frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Delta\left(1+t^{\alpha-1}\right)}g_2(s)\ge\frac{\xi\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha-1}}{\Delta\left(1+\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha-1}\right)}g_2(s), \\
&\ge\frac{\xi}{\Delta\left(1+k^{\alpha-1}\right)}\times g_2(s)\ge\frac{1}{1+k^{\alpha-1}}\sup_{t\in R^+}\frac{G_2(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}
\end{aligned}
$$

由文献[6]可知：

$$\min_{\frac{1}{k}\le t\le k}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\ge\frac{1}{4k^2\left(1+k^{\alpha-1}\right)}\sup_{t\in R^+}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}},$$

所以

$$\min_{\frac{1}{k}\le t\le k}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\ge\frac{1}{4k^2\left(1+k^{\alpha-1}\right)}\sup_{t\in R^+}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}},$$

即性质(3)成立。

定义空间：

$$E=\left\{u(t)\in C\left(R^+,R\right):\sup_{t\in R^+}\frac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}}<+\infty\right\},$$

其范数

$$\|u\|_1=\sup_{t\in R^+}\frac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}},$$

空间 $X=E\times E$，其范数为

$$\|(u_1,u_2)\|=\|u_1\|_1+\|u_2\|_1.$$

定理 1.1 [7] $\left(E,\|\cdot\|_1\right)$ 和 $\left(X,\|\cdot\|\right)$ 是 Banach 空间。

令锥 $P_1=\left\{u\in E:t\in R^+,u(t)\ge 0,\min_{t\in\left[\frac{1}{k},k\right]}\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}\ge\eta(k)\|u\|_1\right\}$， $P=P_1\times P_1$，显然 P 是 X 中的一个锥。

定义算子 $T:P\to X$

$$T(u_1,u_2)(t)=\left(T_1(u_1,u_2)(t),T_2(u_1,u_2)(t)\right)$$

其中 $T_i(u_1,u_2)(t)=\int_0^{+\infty}G(t,s)a_i(s)f_i\left(s,u_1(s),u_2(s)\right)\mathrm{d}s$ 。

引理 1.4 [3] 设 $Z\subseteq Y$ 是一个有界集，若

1) 对任意的 $u(t)\in Z$， $\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}$ 在 $[0,+\infty)$ 的任意紧区间上是等度连续的；

2) 给定 $\varepsilon>0$，存在常数 $T=T(\varepsilon)>0$，使得对任意的 $t_1,t_2\ge T$ 及 $u(t)\in Z$ 有：

$$\left|\frac{u(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{u(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon$$

均成立，则 Z 是一个相对紧集。

引理 1.5 [2] 设 K 是 Banach 空间 X 中的闭锥，D_1， D_2 是 K 中的有界开集，$\bar{D}_1\subset D_2$，设 $F:\bar{D}_2\to K$ 全连续，并且满足下列条件之一：

1) $\|F(x)\|\le\|x\|$， $\forall x\in\partial D_1$， $\|F(x)\|\ge\|x\|$， $\forall x\in\partial D_2$；

2) $\|F(x)\|\le\|x\|$， $\forall x\in\partial D_2$， $\|F(x)\|\ge\|x\|$， $\forall x\in\partial D_1$；

则 F 在 $\bar{D}_2\setminus D_1$ 上必有不动点。

定义 1.3 [2] 设 E 为 Banach 空间，P 为 E 中的锥，称映射 $\psi:P\to[0,+\infty)$ 为锥 P 上的一个连续凹泛

函，如果ψ对任意的$x,y\in P$，$t\in[0,1)$，

$$\psi(tx+(1-t)y)\geq t\psi(x)+(1-t)\psi(y).$$

对于$a,b,c>0$定义P_c，$\overline{P_c}$，$P(\psi,a,b)$如下，

$$P_c=\{x\in P\,|\,\|x\|<c\},$$

$$\overline{P_c}=\{x\in P\,|\,\|x\|\leq c\},$$

$$P(\psi,a,b)=\{x\in P\,|\,a\leq\psi(x),\|x\|\leq b\}.$$

引理 1.6 [2] (Leggett-Williams 不动点定理)设$T:\overline{P_c}\to\overline{P_c}$是全连续算子，$\psi(x)$为$P$上的非负连续凹泛函，且满足$\psi(x)\leq\|x\|$ ($\forall x\in\overline{P_c}$)。假定存在$0<d<a<b\leq c$使得

1) $\{x\,|\,x\in P(\psi,a,b),\psi(x)>a\}\neq\varnothing$，并且当$x\in P(\psi,a,b)$时，恒有

$$\psi(Tx)>a;$$

2) 当$x\in\overline{P_d}$时恒有$\|Tx\|<d$；

3) 当$x\in P(\psi,a,c)$且$\|Tx\|>b$时，恒有$\psi(Tx)>a$。

则T在$\overline{P_c}$中至少有三个不动点。

定义 1.4 [5] 若$f_i(t,u,v)$满足如下条件：

1) 对任何的$(u,v)\in R^+\times R^+$，$f_i(\cdot,u,v)$可测；

2) 对每个$t\in R^+$，$f_i(t,\cdot,\cdot)$几乎处处连续；

3) 对每个的$r_1,r_2>0$，存在$\Phi_{r_1,r_2}\in L^1[0,+\infty)$，对所有的$u\in[0,r_1]$，$v\in[0,r_2]$，在$t\in R^+$几乎处处有

$$0\leq f_i\left(t,\left(1+t^{\alpha-1}\right)u,\left(1+t^{\alpha-1}\right)v\right)\leq\Phi_{r_1,r_2}(t).$$

则称$f_i(t,u,v)$满足L^1-Caratheodory 条件。

3. 主要结果

(H0) $f_i:R^+\times R^+\times R^+\to R^+\ (i=1,2)$满足$L^1$-Caratheodory 条件；

(H1) $a_i\in C(R^+\to R^+)$，$\int_0^{+\infty}a_i(s)\left(1+s^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}s<+\infty$。

引理 2.1 假设(H0)(H1)成立，则T是$P\to P$全连续的。

证明：1) 证明T是$P\to P$。

当$u\in P$，$T_i(u_1,u_2)(t)\geq 0$，$i=1,2$。

$$\begin{aligned}\min_{t\in\left[\frac{1}{k},k\right]}\frac{T_i(u_1,u_2)(t)}{1+t^{\alpha-1}}&=\min_{t\in\left[\frac{1}{k},k\right]}\frac{\int_0^{+\infty}G(t,s)a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s}{1+t^{\alpha-1}}\\&\geq\int_0^{+\infty}\min_{t\in\left[\frac{1}{k},k\right]}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\geq\int_0^{+\infty}\eta(k)\sup_{t\in R^+}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s,\\&\geq\eta(k)\sup_{t\in R^+}\int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&=\eta(k)\|T_i(u_1,u_2)\|_1\end{aligned}$$

所以，$T(u_1,u_2)\in P$。

2) T 是 $P\to P$ 连续的。

对任意的收敛序列 $(u_{1n},u_{2n})\to(u_1,u_2)$ 即当 $n\to+\infty$ 时，$u_{1n}\to u_1$，$u_{2n}\to u_2$，则存在常数 $r_1,r_2>0$，使得

$$\|u_{1n}\|_1,\|u_1\|_1\le r_1 \text{ 和 } \|u_{2n}\|_1,\|u_2\|_1\le r_2 \text{。}$$

由 f_i 满足 L^1-Caratheodory 条件可知，对几乎处处 $s\in[0,+\infty)$ 当 $n\to+\infty$ 时有

$$f_i(s,u_{1n}(s),u_{2n}(s))\to f_i(s,u_1(s),u_2(s)),$$

$$|f_i(s,u_{1n}(s),u_{2n}(s))|\le(\Phi_{ir_1,r_2})_i(s),$$

由勒贝格控制收敛定理可知，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\|T_i(u_{1n},u_{2n})\|_1&=\lim_{n\to+\infty}\sup_{t\in R^+}\int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_i(s)f_i(s,u_{1n}(s),u_{2n}(s))\mathrm{d}s\\&=\sup_{t\in R^+}\int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_i(s)\lim_{n\to+\infty}f_i(s,u_{1n}(s),u_{2n}(s))\mathrm{d}s\\&=\sup_{t\in R^+}\int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&=\|T_i(u_1,u_2)\|_1\end{aligned},$$

所以 $\|T_i(u_{1n},u_{2n})-T_i(u_1,u_2)\|_1\to0$，$n\to+\infty$，

$$\begin{aligned}&\|T(u_{1n},u_{2n})-T(u_1,u_2)\|\\&=\|T_1(u_{1n},u_{2n})-T_1(u_1,u_2)\|_1+\|T_2(u_{1n},u_{2n})-T_2(u_1,u_2)\|_1\to0,n\to+\infty\end{aligned}.$$

T 是 $P\to P$ 连续的。

3) $T:P\to P$ 是相对紧的。

设 Ω 是 P 中的有界集，对任意的 $(u_1,u_2)\in\Omega$，则存在 $r_1,r_2>0$，使得 $\|u_1\|_1\le r_1$，$\|u_2\|_1\le r_2$。

$$\begin{aligned}\|T_i(u_1,u_2)\|_1&=\sup_{t\in R^+}\int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}|a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))|\mathrm{d}s\\&\le\int_0^{+\infty}\sup_{t\in R^+}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}|a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))|\mathrm{d}s\\&\le\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)\int_0^{+\infty}a_i(s)(\Phi_{r_1,r_2})_i(s)\mathrm{d}s<+\infty\end{aligned},$$

$\|T(u_1,u_2)\|=\|T_1(u_1,u_2)\|_1+\|T_2(u_1,u_2)\|_1<+\infty$，即 $T\Omega$ 有界。

$\forall N_0>0$，$[0,N_0]$ 为 R^+ 中的紧区间。因 $\dfrac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}$ 在 $(t,s)\in(0,N]\times R^+$ 上一致连续，假设 $t_1,t_2\in[0,N_0]$，$t_1>t_2$，$|t_1-t_2|<\delta$，有

$$\left|\frac{G(t_1,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{G(t_2,s)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon.$$

$$\left|\frac{T_i(u_1,u_2)(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{T_i(u_1,u_2)(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|$$
$$=\left|\int_0^{+\infty}\frac{G(t_1,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s-\int_0^{+\infty}\frac{G(t_2,s)}{1+t_2^{\alpha-1}}a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\right|,$$
$$\le\int_0^{+\infty}\left|\frac{G(t_1,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{G(t_2,s)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|\left|a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\right|\mathrm{d}s$$
$$\le\varepsilon\int_0^{+\infty}a_i(s)\left(\Phi_{r_1,r_2}\right)_i(s)\mathrm{d}s$$

因此，$T_i\Omega$ 在 R^+ 中的任意紧区间上等度连续，从而可得 $T\Omega$ 在 R^+ 中的任意紧区间上等度连续。

因(H1)成立，$\left(\Phi_{r_1,r_2}\right)_i\in L^1[0,+\infty)$ 有 $\int_0^{+\infty}a_i(s)\left(\Phi_{r_1,r_2}\right)_i(s)\mathrm{d}s<+\infty$，故对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $L_1>0$ 使 $\int_{L_1}^{+\infty}a_i(s)\left(\Phi_{r_1,r_2}\right)_i(s)\mathrm{d}s<\varepsilon$。

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}=1$，故存在 $L_2>0$，当 $t_1,t_2>L_2$ 时，

$$\left|\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|=\left|\left(1-\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right)-\left(1-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right)\right|\le\left|1-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|+\left|1-\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{(t-L_1)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}=1$，存在 $L_3>L_1>0$，当 $t_1,t_2>L_3$，且 $0\le s\le L_1$ 时，

$$\left|\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|\le\left|1-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|+\left|1-\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|\le\left|1-\frac{(t_1-L_1)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|+\left|1-\frac{(t_2-L_1)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon$$

取 $L_0>\max\{L_2,L_3\}$，$t_1,t_2>L_0$，假设 $t_1>t_2$，$|t_1-t_2|<\delta$，

$$\left|\frac{T_i(u_1,u_2)(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{T_i(u_1,u_2)(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|$$
$$\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}\left|\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|a_i(s)\left|f_i(s,u_1(s),u_2(s))\right|\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_2}^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}a_i(s)\left|f_i(s,u_1(s),u_2(s))\right|\mathrm{d}s$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Delta}\int_0^{+\infty}\left|\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|a_i(s)\left|f_i(s,u_1(s),u_2(s))\right|\mathrm{d}s$$
$$+\frac{\xi}{\Delta}\int_0^{\eta}\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|(\eta-s)^{\alpha+\beta-1}a_i(s)\left|f_i(s,u_1(s),u_2(s))\right|\mathrm{d}s$$

$$\le\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}a_i(s)\left(\Phi_{r_1,r_2}\right)_i(s)\mathrm{d}s+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\varepsilon}{\Delta}\int_0^{+\infty}a_i(s)\left(\Phi_{r_1,r_2}\right)_i(s)\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{L_0}^{t_1}a_i(s)\left(\Phi_{r_1,r_2}\right)_i(s)\mathrm{d}s+\frac{\xi\varepsilon}{\Delta}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta-1}a_i(s)\left(\Phi_{r_1,r_2}\right)_i(s)\mathrm{d}s$$
$$\le\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}a_i(s)\left(\Phi_{r_1,r_2}\right)_i(s)\mathrm{d}s+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\varepsilon}{\Delta}\int_0^{+\infty}a_i(s)\left(\Phi_{r_1,r_2}\right)_i(s)\mathrm{d}s+\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}$$
$$+\frac{\xi\varepsilon}{\Delta}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta-1}a_i(s)\left(\Phi_{r_1,r_2}\right)_i(s)\mathrm{d}s$$

所以，对任意的 $\varepsilon>0$，$(u_1,u_2)\in\Omega$，存在一个充分大的 $N>0$，当 $t_1,t_2>N$ 时，有

$$\left|\frac{T_i(u_1,u_2)(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{T_i(u_1,u_2)(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon,$$

T_i 在无穷远处等度收敛，从而可得 T 在无穷远处等度连续。

故 T 是 $P\to P$ 全连续的。证毕。

(H2) 存在函数 $b_i\in L^1(R^+,R^+)$，函数 $h_i\in C(R^+\times R^+,R^+)$，$i=1,2$ 使得

$$f_i(t,u,v)\le b_i(t)h_i(u,v),\ t,u,v\in R^+,$$

$$\int_0^{+\infty}s^{\alpha-1}b_i(s)\mathrm{d}s<+\infty.$$

下面给出一些记号:

$$\overline{h_i^0}=\overline{\lim_{u,v\to0}}\frac{h_i(u,v)}{u+v},\ \overline{h_i^\infty}=\overline{\lim_{u,v\to+\infty}}\frac{h_i(u,v)}{u+v},$$

$$\underline{f_i^0}=\underline{\lim_{u,v\to0}}\inf_{t\in\left[\frac{1}{k},k\right]}\frac{f_i(t,u,v)}{u+v},\ \underline{f_i^\infty}=\underline{\lim_{u,v\to+\infty}}\inf_{t\in\left[\frac{1}{k},k\right]}\frac{f_i(t,u,v)}{u+v},$$

$$N_i=\inf_{t\in\left[\frac{1}{k},k\right]}\int_{\frac{1}{k}}^{k}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_i(s)\mathrm{d}s,\ n_i=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)a_i(s)b_i(s)\left(1+s^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}s.$$

定理 2.1 假设条件(H0)，(H1)，(H2)成立，并且存在常数 m_i，M_i，使得 $m_1n_1+m_2n_2\le1$，$\eta(k)M_1N_1+\eta(k)M_2N_2\ge1$，$0\le\overline{h_i^0}<m_i$，$M_i<\underline{f_i^\infty}<+\infty$，$i=1,2$，则边值问题(1.2)至少有一个解。

证明：因 $0\le\overline{h_i^0}<m_i$，则存在一个正实数 $\delta_1(\delta_1<1)$，使得

$$h_i(u_1,u_2)\le m_i(u_1+u_2),\ \|u_1\|_1+\|u_2\|_1\le\delta_1$$

令 $\Omega_1=\left\{(u_1,u_2)\in P,\|(u_1,u_2)\|<\delta_1\right\}$，对任意的 $(u_1,u_2)\in\partial\Omega_1$，

$$\begin{aligned}\frac{T_i(u_1,u_2)(t)}{1+t^{\alpha-1}}&=\int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\le\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\le\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)a_i(s)b_i(s)h_i(u_1,u_2)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)b_i(s)a_i(s)m_i\frac{u_1(s)+u_2(s)}{1+s^{\alpha-1}}\left(1+s^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}s\\&\le m_i\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)b_i(s)a_i(s)\left(1+s^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}s\left(\|u_1\|_1+\|u_2\|_1\right)\\&\le m_in_i\left(\|u_1\|+\|u_2\|\right)\end{aligned}$$

即 $\|T_i(u_1,u_2)\|_1\le m_in_i\left(\|u_1\|_1+\|u_2\|_1\right)$。

所以，

$$\begin{aligned}\|T(u_1,u_2)\| &= \|T_1(u_1,u_2)\|_1 + \|T_2(u_1,u_2)\|_1 \\ &\le m_1 n_1 \left(\|u_1\|_1 + \|u_2\|_1\right) + m_2 n_2 \left(\|u_1\|_1 + \|u_2\|_1\right), \\ &\le \|u_1\|_1 + \|u_2\|_1 \le \|(u_1,u_2)\|\end{aligned}$$

即 $\|T(u_1,u_2)\| \le \|(u_1,u_2)\|$，$(u_1,u_2) \in \partial\Omega_1$。

因 $M_i < \underline{f_i^\infty} < +\infty$，则存在正实数 $\delta_2 > 1$，使得

$$f_i(t,u_1,u_2) \ge M_i(u_1+u_2),\ t \in \left[\frac{1}{k},k\right],\ u_1+u_2 \ge \delta_2,$$

令 $\Omega_2 = \left\{(u_1,u_2) \in P, \|(u_1,u_2)\| < \dfrac{\delta_2}{\eta(k)}\right\}$，对任意的 $(u_1,u_2) \in \partial\Omega_2$，

$$\min_{t\in\left[\frac{1}{k},k\right]} u_i(t) \ge \min_{t\in\left[\frac{1}{k},k\right]} \frac{u_i(t)}{1+t^{\alpha-1}} \ge \eta(k)\|u_i\|_1,$$

$$\min_{t\in\left[\frac{1}{k},k\right]} \left(u_1(t)+u_2(t)\right) \ge \eta(k)\left(\|u_1\|_1 + \|u_2\|_1\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{T_i(u_1,u_2)(t)}{1+t^{\alpha-1}} &= \int_0^{+\infty} \frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}} a_i(s) f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s \\ &\ge \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}} a_i(s) f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s \\ &\ge \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}} a_i(s) M_i(u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s \\ &\ge \eta(k)\int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}} a_i(s) M_i\left(\|u_1\|_1 + \|u_2\|_1\right)\mathrm{d}s \\ &\ge \eta(k) M_i \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}} a_i(s)\mathrm{d}s\left(\|u_1\|_1 + \|u_2\|_1\right) \\ &\ge \eta(k) M_i N_i\left(\|u_1\|_1 + \|u_2\|_1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|T(u_1,u_2)\| &= \|T_1(u_1,u_2)\|_1 + \|T_2(u_1,u_2)\|_1 \\ &\ge \eta(k) M_1 N_1\left(\|u_1\|_1 + \|u_2\|_1\right) + \eta(k) M_2 N_2\left(\|u_1\|_1 + \|u_2\|_1\right), \\ &\ge \|u_1\|_1 + \|u_2\|_1 \ge \|(u_1,u_2)\|\end{aligned}$$

即 $\|T(u_1,u_2)\| \ge \|(u_1,u_2)\|$，$(u_1,u_2) \in \partial\Omega_2$。

从而根据引理 1.5 可知在集合 $\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1$ 中 T 至少有一个不动点，因此边值问题(1.2)至少有一个解。证毕。

定理 2.2 假设条件(H0)，(H1)，(H2)成立，并且存在常数 d_i，D_i，使得 $d_1 n_1 + d_2 n_2 \le 1$，$\eta(k)D_1N_1 + \eta(k)D_2N_2 \ge 1$，$0 \le \overline{h_i^\infty} < d_i$，$D_i < \underline{f_i^0} < +\infty$，$i = 1,2$，则边值问题(1.2)至少有一个解。

证明：因 $D_i < \underline{f_i^0} < +\infty$，则存在一个正实数 $\delta_3(\delta_3 < 1)$，使得

$$f_i(t,u_1,u_2) \ge D_i(u_1+u_2),\ t \in \left[\frac{1}{k},k\right],\ \|u_1\|_1 + \|u_2\|_1 \le \delta_3,$$

令 $\Omega_3=\left\{(u_1,u_2)\in P,\left\|(u_1,u_2)\right\|<\delta_3\right\}$，对任意的 $(u_1,u_2)\in\partial\Omega_3$

$$\min_{t\in\left[\frac{1}{k},k\right]}u_i(t)\geq\min_{t\in\left[\frac{1}{k},k\right]}\frac{u_i(t)}{1+t^{\alpha-1}}\geq\eta(k)\left\|u_i\right\|_1,$$

$$\begin{aligned}\frac{T_i(u_1,u_2)(t)}{1+t^{\alpha-1}}&\geq\int_{\frac{1}{k}}^{k}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\geq\int_{\frac{1}{k}}^{k}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_i(s)D_i(u_1(s)+u_2(s))\mathrm{d}s\\&\geq\eta(k)D_i\int_{\frac{1}{k}}^{k}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_i(s)\mathrm{d}s\left(\left\|u_1\right\|_1+\left\|u_2\right\|_1\right)\\&\geq\eta(k)D_iN_i\left(\left\|u_1\right\|_1+\left\|u_2\right\|_1\right)\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\left\|T(u_1,u_2)\right\|&=\left\|T_1(u_1,u_2)\right\|_1+\left\|T_2(u_1,u_2)\right\|_1\\&\geq\eta(k)D_1N_1\left(\left\|u_1\right\|_1+\left\|u_2\right\|_1\right)+\eta(k)D_2N_2\left(\left\|u_1\right\|_1+\left\|u_2\right\|_1\right),\\&\geq\left\|u_1\right\|_1+\left\|u_2\right\|_1\geq\left\|(u_1,u_2)\right\|\end{aligned}$$

即 $\left\|T(u_1,u_2)\right\|\geq\left\|(u_1,u_2)\right\|$，$(u_1,u_2)\in\partial\Omega_3$。

因 $0\leq\overline{h_i^{\infty}}<d_i$，则存在一个正实数 R_0，使得

$$h_i(u_1,u_2)\leq d_i(u_1+u_2),\ \left\|(u_1,u_2)\right\|\in(R_0,+\infty),$$

令 $q_i=\max_{\left\|(u_1,u_2)\right\|\leq R_0}h_i(u_1,u_2)$，

$$h_i(u_1,u_2)\leq q_i+d_i(u_1+u_2),\ (u_1,u_2)\in P,$$

则存在一个正实数 $\delta_4>\max\left\{1,\delta_3,(q_1n_1+q_2n_2)(1-d_1n_1-d_2n_2)^{-1}\right\}$，令 $\Omega_4=\left\{(u_1,u_2)\in P,\left\|(u_1,u_2)\right\|<\delta_4\right\}$，对任意的 $(u_1,u_2)\in\partial\Omega_4$

$$\begin{aligned}\frac{T_i(u_1,u_2)(t)}{1+t^{\alpha-1}}&=\int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\leq\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)a_i(s)f_i(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\leq\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)a_i(s)b_i(s)h_i(u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\leq\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)a_i(s)d_i(s)\left[q_i+d_i(u_1(s)+u_2(s))\right]\mathrm{d}s\\&\leq q_i\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)a_i(s)d_i(s)\left(1+s^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}s\\&\quad+d_i\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)a_i(s)d_i(s)\left(1+s^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}s\left(\left\|u_1\right\|_1+\left\|u_2\right\|_1\right)\end{aligned}$$

$$\left\|T_i(u_1,u_2)\right\|_1\leq d_in_i\left(\left\|u_1\right\|_1+\left\|u_2\right\|_1\right)+q_in_i,$$

所以，

$$\begin{aligned}\left\|T\left(u_1,u_2\right)\right\|&=\left\|T_1\left(u_1,u_2\right)\right\|_1+\left\|T_2\left(u_1,u_2\right)\right\|_1\\&\le d_1n_1\left(\left\|u_1\right\|_1+\left\|u_2\right\|_1\right)+d_2n_2\left(\left\|u_1\right\|_1+\left\|u_2\right\|_1\right)+q_1n_1+q_2n_2\\&\le\left(\left\|u_1\right\|_1+\left\|u_2\right\|_1\right)\left(d_1n_1+d_2n_2+\frac{q_1n_1+q_2n_2}{\left\|u_1\right\|_1+\left\|u_2\right\|_1}\right)\\&\le\left\|u_1\right\|_1+\left\|u_2\right\|_1\le\left\|\left(u_1,u_2\right)\right\|\end{aligned},$$

即 $\left\|T\left(u_1,u_2\right)\right\|\le\left\|\left(u_1,u_2\right)\right\|$，$\left(u_1,u_2\right)\in\partial\Omega_4$。

从而根据引理 1.5 可知在集合 $\overline{\Omega_4}\setminus\Omega_3$ 中 T 至少有一个不动点，因此边值问题(1.2)至少有一个解。证毕。

定义泛函 $\psi(u)=\min\limits_{\frac{1}{k}\le t<k}\frac{u_1(t)}{1+t^{\alpha-1}}+\min\limits_{\frac{1}{k}\le t<k}\frac{u_2(t)}{1+t^{\alpha-1}}\quad\left(u=\left(u_1,u_2\right)\right)$，则 $\psi(u)$ 为非负连续凹泛函。

$$E=2\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)\int_0^{+\infty}a_i(s)\mathrm{d}s,\quad e=2\int_0^{+\infty}\eta(k)\sup_{t\in R^+}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_1(s)\mathrm{d}s$$

定理 2.3 假设条件(H1)成立，并且存在常数 $0<a<b<d\le c$，使得

(H3) $f_i\left(t,\left(1+t^{\alpha-1}\right)u_1,\left(1+t^{\alpha-2}\right)u_2\right)<\frac{c}{E}$，$\left(t,u_1,u_2\right)\in[0,+\infty)\times[0,c)\times[0,c)$；

(H4) $f_i\left(t,\left(1+t^{\alpha-1}\right)u_1,\left(1+t^{\alpha-2}\right)u_2\right)>\frac{b}{e}$，$\left(t,u_1,u_2\right)\in\left[\frac{1}{k},k\right)\times[b,c)\times[b,c)$；

(H5) $f_i\left(t,\left(1+t^{\alpha-1}\right)u_1,\left(1+t^{\alpha-2}\right)u_2\right)<\frac{a}{E}$，$\left(t,u_1,u_2\right)\in[0,+\infty)\times[0,a)\times[0,a)$；

则边值问题(1.2)至少有三个正解。

证明 令 $\left(u_1,u_2\right)\in\overline{P_c}$，则

$$\begin{aligned}\left\|T_i\left(u_1,u_2\right)\right\|_1&=\sup_{t\in R^+}\int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\left|a_i(s)f_i\left(s,u_1(s),u_2(s)\right)\right|\mathrm{d}s\\&\le\int_0^{+\infty}\sup_{t\in R^+}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\left|a_i(s)f_i\left(s,u_1(s),u_2(s)\right)\right|\mathrm{d}s,\\&<\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\xi\eta^{\alpha+\beta-1}}{\Delta}\right)\int_0^{+\infty}a_i(s)\mathrm{d}s\frac{c}{E}\le\frac{c}{2}\end{aligned}$$

$\left\|T\left(u_1,u_2\right)\right\|=\left\|T_1\left(u_1,u_2\right)\right\|_1+\left\|T_2\left(u_1,u_2\right)\right\|_1<c$，所以 $T:\overline{P_c}\to P_c$，同理可得 $T:\overline{P_a}\to P_a$ 引理 1.8 中条件(2)满足，类似引理 2.1 的证明可得 T 是 $P_c\to P_c$ 全连续的。

取 $u_i^*(t)=\frac{b+d}{4}\left(1+t^{\alpha-1}\right)$，$\left\|u^*\right\|=\left\|u_1^*\right\|_1+\left\|u_2^*\right\|_1=\frac{b+d}{2}<d$，并且

$$\psi\left(u^*\right)=\min_{\frac{1}{k}\le t<k}\frac{u_1^*(t)}{1+t^{\alpha-1}}+\min_{\frac{1}{k}\le t<k}\frac{u_2^*(t)}{1+t^{\alpha-1}}=\frac{b+d}{2}>b,$$

所以 $\left\{u\in K(\psi,b,d)\mid\psi(u)>b\right\}\ne\varnothing$。

若 $u\in K(\psi,b,d)$，则 $c\ge\psi(u)=\min\limits_{\frac{1}{k}\le t<k}\frac{u_1(t)}{1+t^{\alpha-1}}+\min\limits_{\frac{1}{k}\le t<k}\frac{u_2(t)}{1+t^{\alpha-1}}\ge b$，则

$$\begin{aligned}\psi(Tu)&=\min_{\frac{1}{k}\le t<k}\frac{Tu_1(t)}{1+t^{\alpha-1}}+\min_{\frac{1}{k}\le t<k}\frac{Tu_2(t)}{1+t^{\alpha-1}}\\&=\min_{\frac{1}{k}\le t<k}\int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_1(s)f_1(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\quad+\min_{\frac{1}{k}\le t<k}\int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_2(s)f_2(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\ge\int_0^{+\infty}\min_{\frac{1}{k}\le t<k}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_1(s)f_1(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\quad+\int_0^{+\infty}\min_{\frac{1}{k}\le t<k}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_2(s)f_2(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\ge\int_0^{+\infty}\eta(k)\sup_{t\in R^+}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_1(s)f_1(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\quad+\int_0^{+\infty}\eta(k)\sup_{t\in R^+}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_2(s)f_2(s,u_1(s),u_2(s))\mathrm{d}s\\&\ge2\int_0^{+\infty}\eta(k)\sup_{t\in R^+}\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_1(s)\frac{b}{e}\mathrm{d}s>b\end{aligned}$$

则 $\psi(Tu)>b$， $\forall u\in K(\psi,b,d)$ 引理 1.8 中条件(1)满足。

假设 $u\in K(\psi,b,c)$ 则 $\psi(u)\ge b$，$\|u\|\le c$，所以 $b\le\min_{\frac{1}{k}\le t<k}\frac{u_1(t)}{1+t^{\alpha-1}}+\min_{\frac{1}{k}\le t<k}\frac{u_2(t)}{1+t^{\alpha-1}}\le c$，由前面的得 $\psi(Tu)>b$，引理 1.8 中条件(3)满足。

根据引理 1.6 可知 T 在 $\overline{P_c}$ 中至少有三个不动点，因此边值问题(1.2)至少有三个正解。证毕。

4. 例子

考虑下面边值问题：

$$\begin{cases}D_{0^+}^{\frac{5}{2}}u_1(t)+\mathrm{e}^{-t}(u_1(t)+u_2(t))^2=0,\ t\in R^+,\\D_{0^+}^{\frac{5}{2}}u_2(t)+\mathrm{e}^{-t}(u_1(t)+u_2(t))^{\frac{3}{2}}=0,\ t\in R^+,\\u_1(0)=u_1'(0)=0,\ D_{0^+}^{\alpha-2}u_1(0)=D_{0^+}^{\alpha-2}u_1(0)=0,\\D_{0^+}^{\frac{3}{2}}u_1(+\infty)=2I^1u_1(1),\ D_{0^+}^{\frac{3}{2}}u_2(+\infty)=2I^1u_2(1).\end{cases}$$

式中

$$f_1(t,u_1(t),u_2(t))=(u_1(t)+u_2(t))^2,\ f_2(t,u_1(t),u_2(t))=(u_1(t)+u_2(t))^{\frac{3}{2}},\ a_1(t)=a_2(t)=\mathrm{e}^{-t},$$

$$\xi=2,\ \eta=1,\ \beta=1,\ b_1(t)=b_2(t)=\mathrm{e}^{-t},\ h_1(u_1(t),u_2(t))=(u_1(t)+u_2(t))^2,$$

$$h_2(u_1(t),u_2(t))=(u_1(t)+u_2(t))^{\frac{3}{2}},$$

常数 $r_1,r_2>0$，取 $\Phi_{r_1,r_2}(t)=(1+r_1+r_2)^2(1+t)^2\mathrm{e}^{-t}$，取 $k=2$ 则 $\eta(k)\approx0.01632$。

由于 $N_i\approx0.98$， $n_i\approx0.944$，取 $M_i=34$， $m_i=0.4$，则满足定理 2.1 中的条件，所以由定理 2.1 可知

边值问题至少有一个解。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11361407)。

参考文献

[1] Kilbas, A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Applications of Differential Equations. Mathematics Studies.

[2] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及其应用[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2013.

[3] 杨凯军. 无穷区间上的分数阶微分方程边值问题的解[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2013.

[4] Tan, J.J. and Cheng, C.Z. (2015) Existence of Solution to Nonlinear Fractional Differential Equations with Boundary Conditions on an Infinite Interval in Banach Spaces. *Boundary Value Problems*, **2015**, 153. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0419-0

[5] 薛婷, 刘文斌, 张伟. 无穷区间上分数阶微分方程积分边值问题正解的存在性[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2017, 40(4): 36-46.

[6] Liang, S.H. and Zhang, J.H. (2010) Existence of Multiple Positive for M-Point Fractional Boundary Value Problems on an Infinite Interval. *Mathematical and Computer Modelling*, **54**, 1334-1446.

[7] Shen, C.F., Zhou, H. and Yang, L. (2015) On the Existence of Solution to a Boundary Value Problem of Fractional Differential Equation on the Infinite Interval. *Boundary Value Problems*, **2015**, 241. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0509-z

[8] Liu, Y.J., Ahmad, B. and Agarwal. R.P. (2013) Existence of Solution for A Coupled System of Nonlinear Fractional Differential Equations with Fractional Boundary Conditions on the Half-Line. *Advances in Difference Equations*, **2013**, 46. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-46

[9] 冯海星，翟成波. 一类含参数分数阶微分方程边值问题正解的性质研究[J]. 应用数学和力学，2017，38(7): 818-826.

[10] Wang, G.T., Cabada, A. and Zhang, L.H. (2014) Integral Boundary Value Problem for Nonlinear Differential Equations 3 of Fractional Order on an Unbounded Domain. *Journal of Integral Equations and Applications,* **26**, 11 p. https://doi.org/10.1216/jie-2014-26-1-117