

Mathematical Proof of Four-Color Theorem

Shanzhong Zou

Guangzhou Guangdong
Email: 75473066@qq.com

Received: Apr. 26th, 2019; accepted: May 6th, 2019; published: May 22nd, 2019

Abstract

The closed space is defined as an area, and then the background color of the map is defined. The section connecting more than three boundaries is regarded as the intersection point, and the line segment connecting two regions is defined as the boundary. After reducing or expanding the intersection points of the map, the complex area map with boundary and intersection points is simplified to a map with only boundary. The results show that four kinds of color can be used to distinguish different areas in the map.

Keywords

Region, Background Color, Boundary, Intersection Point, Reduced or Expanded

四色定理的数学证明

邹山中

广东 广州
Email: 75473066@qq.com

收稿日期: 2019年4月26日; 录用日期: 2019年5月6日; 发布日期: 2019年5月22日

摘要

定义一个区域, 对区域的范围、线段、多个区域相交的交点以及相邻区域的边界等作出定义, 同时定义一个基础颜色, 通过对地图中的交点进行收缩或膨胀, 分别从交点收缩或膨胀后的状况进行分析, 把一幅由边界和交点构成的复杂区域地图, 简化为仅仅只有边界的地图, 得出了构成一幅地图最多只用四种颜色便可区分所有的区域的结论。

关键词

区域, 基色, 边界, 交点, 收缩和膨胀

作者简介: 出生年月: 1959年9月, 籍贯: 广东省始兴县, 学历: 本科, 职称: 工程师。

文章引用: 邹山中. 四色定理的数学证明[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 410-413.
DOI: 10.12677/pm.2019.93054

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 预备工作

定义 1 区域[1], 被一单一线条所封闭的空间我们定义为区域:



Figure 1. A space enclosed by a single line

图 1. 单一线条所封闭的空间

如何能在地图上表现一个区域呢? 这就必须把区域绘在一张纸上(图 1), 当纸与区域的颜色不同时, 我们便可在纸上清楚地看见区域。如上图, 我们把纸的颜色称为基色, 如此便有:

定义 2 基色, 是指我们绘制地图用的纸张的颜色, 显然, 基色与地图上任何一区域的颜色是不同的, 且基色无边界、无形状, 他是因绘图需要而自然存在的。因此我们有:

推论 1 要表示一个区域, 最少有两种颜色, 基色 + 区域色。

定义 3 区域的边界线段, 在区域的闭环上, 从一个点到另一点间的区间称区域的边界线段, 如图 2, $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$, 如果一个区域的闭环上有 n 个线段, 那么, 当 n 是偶数时(图 3), 只需要两种颜色的线段便可区分不同的线段, 当 n 是奇数时(图 2), 只需要三种不同颜色的线段便可区分不同的线段。

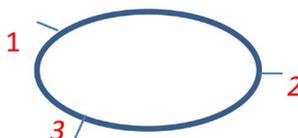


Figure 2. Odd line segment

图 2. 奇数线段

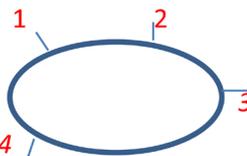


Figure 3. Even line segment

图 3. 偶数线段

证: 若奇数线段($1 \rightarrow 2$)的颜色设为 R, 偶数线段($2 \rightarrow 3$)的颜色设为 Y, 当 n 是偶数时(图 3), 设段 $1 \rightarrow 2$ 为 R, 段为 $2 \rightarrow 3$ Y, 则 $4 \rightarrow 1$ 段为 Y, $1 \rightarrow 2$ 段为 R, 那么当在区域闭环处, 与第一段线段相连的线段是偶数段, 那么, 整个闭环中仅需 R、Y 两种颜色便可区分所有的线。

当 n 是奇数时(图 2), 由于与第一段线段($1 \rightarrow 2$)段相连的线段是 $3 \rightarrow 1$ 奇数线段, 此时便产生了 R, R 的相连处, 所以此时我们只需增加一种颜色 B 把线段 $3 \rightarrow 1$ 的颜色设为 B, 那么当 n 是奇数时, 我们只需三种颜色的线段便可把闭环上的线段区分开。如图 2, 显然当, $n > 4$ 时奇数与偶数的分析方法是相同的。

因此我们可得到**引理一**，一个封闭的区域上当封闭线上的线段是偶数时，我们只需两种颜色便可以把所有的区段区分开，而当封闭线上的线段是奇数时，我们只需三种颜色便可以把所有的区段区分开。

定义 4 边界[2]，如何才能知道两相邻区域相连接了呢？那么他的连接部分必须形成一条相交的边，因为两区域相交必须是确定的一条边，所以相交两区域的任一区域必须有一线段，此线段与另一区域的一个线段相组合，这样就产生了边界。因此，边界是由两种不同的颜色结合后的线段。

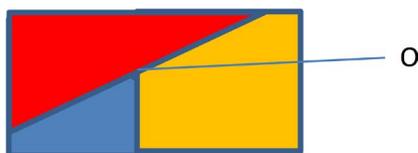


Figure 4. Intersection of three regions
图 4. 三个区域的交点

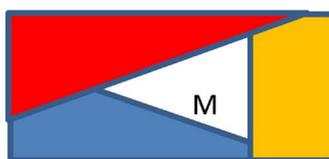


Figure 5. Base color is closed
图 5. 基色被封闭

定义 5 交点。三个或更多个相邻区域两两相交的结合处，在图 4 中，O 是交点，与引理一中线段的证明方法一样，只需 A, B, C 三种不同的颜色便可将不同的区域区分开。如果有 n 个这样的区域结合，则称为 n 个区域的交点，显然，当 n 是偶数时，我们只需两种颜色便可以把所有的区段区分开，当 n 是奇数时，我们只需三种颜色便可以把所有的区段区分开，我们可以从 O 点放射线的数量来得知有几个区域在此相交，有 n 条放射线时，我们便可知道有 n 个区域在此相交。且这 n 个区域最多用 R、Y、B 三种不同的颜色使他们相邻的颜色互不相同。

定义 6 基色被封闭，图 5，M 区域就叫做基色被封闭。由于基色无边界无大小，显然，图 5 中 M 收缩成一点后就是图 4。

因此，我们可以得到**引理二**：当基色被 n 个区域封闭后，由于基色无大小无边界，所以被封闭的基色区域可收缩成一个交点，而不影响区域相交的本来结构。

这样，我们可以得到引理二的**推论**：相交区域的交点可膨胀为一个被封闭的基色区，而不影响区域相交的本来结构。

2. 命题证明

在任何一幅地图中，我们发现无论任何复杂的区域结构，也仅仅由四部分组成，

1) 区域，2) 被封闭的基色区，3) 交点，4) 边界。

然后使用不同的颜色来区分不同的区域。

根据引理二，我们将一幅地图中的所有交点膨胀为一封闭的基色区域。

图 6，是 n 个区域交点膨胀后的示意图，我们取 $n \geq 3$ ，用同样的方法可以显示地图中的所有膨胀后的交点，那么把一幅地图中的每个交点膨胀之后，地图中所有的交点都变成了图 6，这时，这幅地图就没有交点了。(地图中的交点膨胀后，地图中的区域结构不会改变)，这时，我们如何区分封闭的



Figure 6. After the intersection of n regions expands

图 6. n 个区域的交点膨胀后

基色区域与地图中的区域呢？由于基色区域是在三种颜色交点的前提下膨胀而来，显然，当一个区域的封闭线上的线段数量 n 是奇数时，那么该区域就是封闭的基色区域。

那么地图中区域的封闭线上的线段 n 是偶数，只能有两种不同的颜色(因基色可伸缩所以基色被忽略)，当区域的颜色是 R 时，封闭线上只能有 Y 、 B 两种颜色，当区域的颜色是 B 时，封闭线上只能有 R 、 Y 两种颜色，当区域的颜色是 Y 时，封闭线上只能有 R 、 B 两种颜色，因此，与本区域相交的区域只要与本区域的颜色不同即可找到共同的边界。如：颜色是 R 与颜色是 B 的两区域相交，也就是 R 区域封闭线上的 B 与 B 区域封闭线上的 R 相交产生边界。

这样我们便可得出结论，由于地图中的区域封闭线上只能有两种颜色，所以当多个区域相交时，区域间只要有三种颜色便可以区分所有的区域，因此，三个不同的颜色区域加上基本颜色可以区分地图的任何区域， $3 + 1 = 4$ [3]，因此我们可以用四种颜色区分任何地图的任何区域。四种颜色包含一种基本颜色和三种区域颜色。证明完

参考文献

- [1] Zhou, P.S. (2010) Computer Science. China Science and Technology Press, Beijing.
- [2] Gu, C.H. (1992) Mathematics Dictionary. Shanghai Dictionary Press, Shanghai.
- [3] Min, S.H. (1981) Method of Number Theory. Science Press, Beijing.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：pm@hanspub.org