Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(7), 818-835
Published Online September 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.97108

Hans汉斯

The Binomial Coefficient Series Is Associated with a Sum of Odd Reciprocal Squares

Zuoyuan Xue[1], Xue Xue[2], Wanhui Ji[1]

[1]Department of Electricity, Yinchuan Energy College, Yinchuan Ningxia
[2]Binhe Institute of Science and Technology, Yinchuan Ningxia
Email: 2475649890@qq.com, jiwanhui2008@163.com

Received: Aug. 26th, 2019; accepted: Sep. 16th, 2019; published: Sep. 23rd, 2019

Abstract

Using one known series, we can structure several new binomial coefficient series which is associated with a sum of odd reciprocal squares. Their denominator has parity indefinite linear factors 1, 2, 3, 4, 5. Using relation of inverse Trigonometric and Hyperbolic function, we get that alternating the binomial coefficient series is associated with a sum of odd reciprocal squares. The numerical identities of binomial coefficient series with odd reciprocal square are given.

Keywords

Binomial Coefficients, Sum of Odd Reciprocal Squares, Differential, Split Terms, Series

二项式系数级数连带奇数倒数平方和

薛坐远[1]，薛　雪[2]，及万会[1]

[1]银川能源学院电力学院，宁夏 银川
[2]滨河科技学院，宁夏 银川
Email: 2475649890@qq.com, jiwanhui2008@163.com

收稿日期：2019年8月26日；录用日期：2019年9月16日；发布日期：2019年9月23日

摘　要

根据一个已知级数，使用裂项方法得到分母含奇偶性不定因子$(m+i)(i=1,2,3,4,5)$ 1个，2个，3个，4个，5个线性因子的二项式系数级数连带奇数倒数平方和。利用反正弦与反双曲正弦关系给出交错二项式系数级数连带奇数倒数平方和。所给出级数的和式是封闭形的。并给出二项式系数级数连带奇数倒数平方和数值恒等式。

文章引用: 薛坐远, 薛雪, 及万会. 二项式系数级数连带奇数倒数平方和[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 818-835.
DOI: 10.12677/pm.2019.97108

关键词

二项式系数，奇数倒数平方和，微分，裂项，级数

1. 引言及引理

二项式系数在数论，图论，统计和概率等数学分支扮演重要角色。二项式系数变换研究有大量文献[1]-[10]。文献[2] [3] [4] [5]中都提到被称为 Lehmer 级数恒等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{n\binom{2n}{n}}=\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，$|x|<1$，一些作者使用微分，积分，发生函数，白塔－伽马函数，递推等数学工具得到二项式系数倒数级数的重要结果。文[3]给出二项式系数倒数数值级数用积分表示，并给出递推公式。文[4]给出二项式系数倒数数值级数用反三角函数表示的公式；文[5]给出二项式系数倒数数值级数用积分表示。文[5] [6] [7] [8]利已知级数裂项构造出一批新二项式系数的倒数级数。文[9]利用白塔函数建立非中心型二项式倒数级数。文[10]利用“变换核”函数导出无穷级数恒等式。我们利用一个已知级数，用微分裂项法，将分式的化成部分分式经过一定程序转化分母含奇偶性不定的 1 个，2 个，3 个，4 个，5 个线性因子的二项式系数级数连带奇数倒数平方和。利用反正弦与反双曲正弦关系给出交错二项式系数级数连带奇数倒数平方和。所给出级数是封闭形的。并给出二项式系数级数连带奇数倒数平方和数值恒等式。

引理 1 [11] $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=\frac{1}{6}\left(\arcsin^3 x\right)$

2. 主要结果和证明

2.1. 定理

设 $B=\frac{\arcsin^2 x}{2\sqrt{1-x^2}}$，**则二项式系数级数连带续奇数倒数平方和**

1) 分母含有 1 个线性因子的二项式系数级数连带奇数倒数平方和

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\left(-\frac{2}{x^2}+2\right)B+1 \tag{1}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\left(-\frac{4}{3x^4}+\frac{2}{3x^2}+\frac{2}{3}\right)B+\frac{2}{3x^2}+\frac{2}{9} \tag{2}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\left(-\frac{16}{15x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{2}{15x^2}+\frac{2}{5}\right)B+\frac{8}{15x^4}+\frac{8}{45x^2}+\frac{64}{675} \tag{3}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{-32}{35x^8}+\frac{16}{35x^6}+\frac{4}{35x^4}+\frac{2}{35x^2}+\frac{2}{7}\right)B+\frac{16}{35x^6}+\frac{16}{105x^4}+\frac{128}{1575x^2}+\frac{64}{1225} \tag{4}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{256}{315x^{10}}+\frac{128}{315x^8}+\frac{32}{315x^6}+\frac{16}{315x^4}+\frac{2}{63x^2}+\frac{2}{9}\right)B \tag{5}$$
$$+\frac{128}{315x^{10}}+\frac{128}{945x^6}+\frac{1024}{14175x^4}+\frac{512}{11025x^2}+\frac{16384}{496125}$$

2) 分母含有 2 个线性因子的二项式系数级数连带奇数倒数平方和

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\left(\frac{4}{3x^4}-\frac{2}{3x^2}-\frac{2}{3}\right)B-\frac{2}{3x^2}+\frac{7}{9} \tag{6}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{8}{15x^6}-\frac{4}{15x^4}-\frac{16}{15x^2}+\frac{4}{5}\right)B-\frac{4}{15x^4}-\frac{4}{45x^2}+\frac{611}{1350} \tag{7}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{16}{15x^6}-\frac{28}{15x^4}+\frac{8}{15x^2}+\frac{4}{15}\right)B-\frac{8}{15x^4}+\frac{22}{45x^2}+\frac{86}{675} \tag{8}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{32}{105x^8}-\frac{16}{105x^6}-\frac{4}{105x^4}-\frac{24}{35x^2}+\frac{4}{7}\right)B-\frac{16}{105x^6}-\frac{16}{315x^4}-\frac{128}{4725x^2}+\frac{387}{1225} \tag{9}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{16}{35x^8}-\frac{8}{35x^6}-\frac{76}{105x^4}+\frac{32}{105x^2}+\frac{4}{21}\right)B-\frac{8}{35x^6}-\frac{8}{105x^4}+\frac{461}{1575x^2}+\frac{937}{11025} \tag{10}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{32}{35x^8}-\frac{32}{21x^6}+\frac{44}{105x^4}+\frac{8}{105x^2}+\frac{4}{35}\right)B-\frac{16}{35x^6}+\frac{8}{21x^4}+\frac{152}{1575x^2}+\frac{1408}{33075} \tag{11}$$

3) 分母含有 3 个线性因子的二项式系数级数连带奇数倒数平方和

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{8}{15x^6}+\frac{8}{5x^4}-\frac{8}{5x^2}+\frac{8}{15}\right)B+\frac{4}{15x^4}-\frac{26}{45x^2}+\frac{439}{1350} \tag{12}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{16}{105x^8}+\frac{8}{105x^6}+\frac{24}{35x^4}-\frac{104}{105x^2}+\frac{8}{21}\right)B+\frac{8}{105x^6}+\frac{568}{105x^4}-\frac{1511}{4725x^2}+\frac{2546}{11025} \tag{13}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{32}{105x^8}+\frac{24}{35x^6}-\frac{8}{35x^4}-\frac{8}{21x^2}+\frac{8}{35}\right)B+\frac{16}{105x^6}-\frac{68}{315x^4}-\frac{292}{4725x^2}+\frac{9041}{66150} \tag{14}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{16}{35x^8}+\frac{136}{105x^6}-\frac{8}{7x^4}+\frac{8}{35x^2}+\frac{8}{105}\right)B+\frac{8}{35x^6}-\frac{16}{35x^4}+\frac{103}{525x^2}+\frac{1403}{33075} \tag{15}$$

4) 分母含有 4 个线性因子的二项式系数级数连带奇数倒数平方和

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{16}{105x^8}-\frac{64}{105x^6}+\frac{32}{35x^4}-\frac{64}{105x^2}+\frac{16}{105}\right)B \tag{16}$$
$$-\frac{8}{105x^6}+\frac{76}{315x^4}-\frac{1219}{4725x^2}+\frac{1247}{13230}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{64}{945x^{10}}-\frac{176}{945x^8}+\frac{64}{945x^6}+\frac{32}{135x^4}-\frac{256}{945x^2}+\frac{16}{189}\right)B \tag{17}$$
$$-\frac{32}{945x^8}+\frac{184}{2835x^6}+\frac{828}{42525x^4}-\frac{671}{6615x^2}+\frac{311081}{5953500}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{32}{315x^{10}}-\frac{16}{45x^8}+\frac{128}{315x^6}-\frac{32}{315x^4}-\frac{32}{315x^2}+\frac{16}{315}\right)B \tag{18}$$
$$-\frac{16}{315x^8}+\frac{128}{945x^6}-\frac{1298}{14175x^4}-\frac{766}{33075x^2}+\frac{124031}{3969000}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{128}{945x^{10}}-\frac{496}{945x^8}+\frac{704}{945x^6}-\frac{416}{945x^4}+\frac{64}{945x^2}+\frac{16}{945}\right)B$$
$$-\frac{64}{945x^8}+\frac{584}{2835x^6}-\frac{8612}{42525x^4}+\frac{1823}{33075x^2}+\frac{2179}{212625} \tag{19}$$

5) 分分母含有 5 个线性因子的二项式系数级数连带奇数倒数平方和

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{32}{945x^{10}}+\frac{32}{189x^8}-\frac{64}{189x^6}+\frac{64}{189x^4}-\frac{32}{189x^2}+\frac{32}{945}\right)B$$
$$+\frac{16}{945x^8}-\frac{40}{567x^6}+\frac{674}{6075x^4}-\frac{863}{11025x^2}+\frac{250069}{11907000} \tag{20}$$

推论 1 设 $b=\frac{-\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2\sqrt{1+x^2}}$，**则交错二项式系数连带续奇数倒数平方和级数**

1) 分母含有 1 个因子交错的二项式系数级数连带奇数倒数平方和

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\left(\frac{2}{x^2}+2\right)b+1 \tag{21}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\left(-\frac{4}{3x^4}-\frac{2}{3x^2}+\frac{2}{3}\right)b-\frac{2}{3x^2}+\frac{2}{9} \tag{22}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\left(\frac{16}{15x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{2}{15x^2}+\frac{2}{5}\right)b+\frac{8}{15x^4}-\frac{8}{45x^2}+\frac{64}{675} \tag{23}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{-32}{35x^8}-\frac{16}{35x^6}+\frac{4}{35x^4}-\frac{2}{35x^2}+\frac{2}{7}\right)b-\frac{16}{35x^6}+\frac{16}{105x^4}-\frac{128}{1575x^2}+\frac{64}{1225} \tag{24}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{256}{315x^{10}}+\frac{128}{315x^8}-\frac{32}{315x^6}+\frac{16}{315x^4}-\frac{2}{63x^2}+\frac{2}{9}\right)b$$
$$+\frac{128}{315x^8}-\frac{128}{945x^6}+\frac{1024}{14175x^4}-\frac{512}{11025x^2}+\frac{16384}{496125} \tag{25}$$

2) 母含有 2 个因子交错的二项式系数级数连带奇数倒数平方和

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\left(\frac{4}{3x^4}+\frac{2}{3x^2}-\frac{2}{3}\right)b+\frac{2}{3x^2}+\frac{7}{9} \tag{26}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{8}{15x^6}-\frac{4}{15x^4}+\frac{16}{15x^2}+\frac{4}{5}\right)b-\frac{4}{15x^4}+\frac{4}{45x^2}+\frac{611}{1350} \tag{27}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{16}{15x^6}-\frac{28}{15x^4}-\frac{8}{15x^2}+\frac{4}{15}\right)b-\frac{8}{15x^4}-\frac{22}{45x^2}+\frac{86}{675} \tag{28}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{32}{105x^8}+\frac{16}{105x^6}-\frac{4}{105x^4}+\frac{24}{35x^2}+\frac{4}{7}\right)b+\frac{16}{105x^6}-\frac{16}{315x^4}+\frac{128}{4725x^2}+\frac{387}{1225} \tag{29}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{16}{35x^8}+\frac{8}{35x^6}-\frac{76}{105x^4}-\frac{32}{105x^2}+\frac{4}{21}\right)b+\frac{8}{35x^6}-\frac{8}{105x^4}-\frac{461}{1575x^2}+\frac{937}{11025} \tag{30}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{32}{35x^8}+\frac{32}{21x^6}+\frac{44}{105x^4}-\frac{8}{105x^2}+\frac{4}{35}\right)b+\frac{16}{35x^6}+\frac{8}{21x^4}-\frac{152}{1575x^2}+\frac{1408}{33075} \tag{31}$$

3) 母含有 3 个因子交错的二项式系数级数连带奇数倒数平方和

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{8}{15x^6}+\frac{8}{5x^4}+\frac{8}{5x^2}+\frac{8}{15}\right)b+\frac{4}{15x^4}+\frac{26}{45x^2}+\frac{439}{1350} \tag{32}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{16}{105x^8}-\frac{8}{105x^6}+\frac{24}{35x^4}+\frac{104}{105x^2}+\frac{8}{21}\right)b-\frac{8}{105x^6}+\frac{568}{105x^4}+\frac{1511}{4725x^2}+\frac{2546}{11025} \tag{33}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{32}{105x^8}-\frac{24}{35x^6}-\frac{8}{35x^4}+\frac{8}{21x^2}+\frac{8}{35}\right)b-\frac{16}{105x^6}-\frac{68}{315x^4}+\frac{292}{4725x^2}+\frac{9041}{66150} \tag{34}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{16}{35x^8}-\frac{136}{105x^6}-\frac{8}{7x^4}-\frac{8}{35x^2}+\frac{8}{105}\right)b-\frac{8}{35x^6}-\frac{16}{35x^4}-\frac{103}{525x^2}+\frac{1403}{33075} \tag{35}$$

4) 分母含有 4 个因子交错的二项式系数级数连带奇数倒数平方和

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{16}{105x^8}+\frac{64}{105x^6}+\frac{32}{35x^4}+\frac{64}{105x^2}+\frac{16}{105}\right)b+\frac{8}{105x^6}+\frac{76}{315x^4}+\frac{1219}{4725x^2}+\frac{1247}{13230} \tag{36}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{64}{945x^{10}}+\frac{176}{945x^8}-\frac{64}{945x^6}+\frac{32}{135x^4}+\frac{256}{945x^2}+\frac{16}{189}\right)b$$
$$-\frac{32}{945x^8}-\frac{184}{2835x^6}+\frac{828}{42525x^4}+\frac{671}{6615x^2}+\frac{311081}{5953500} \tag{37}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{32}{315x^{10}}-\frac{16}{45x^8}-\frac{128}{315x^6}-\frac{32}{315x^4}+\frac{32}{315x^2}+\frac{16}{315}\right)b$$
$$-\frac{16}{315x^8}-\frac{128}{945x^6}-\frac{1298}{14175x^4}+\frac{756}{33075x^2}+\frac{124031}{3969000} \tag{38}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(-\frac{128}{945x^{10}}-\frac{496}{945x^8}-\frac{704}{945x^6}-\frac{416}{945x^4}-\frac{64}{945x^2}+\frac{16}{945}\right)b$$
$$-\frac{64}{945x^8}-\frac{584}{2835x^6}-\frac{8612}{42525x^4}-\frac{1823}{33075x^2}+\frac{2179}{212625} \tag{39}$$

5) 分母含有 5 个因子交错的二项式系数级数连带奇数倒数平方和

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\left(\frac{32}{945x^{10}}+\frac{32}{189x^8}+\frac{64}{189x^6}+\frac{64}{189x^4}+\frac{32}{189x^2}+\frac{32}{945}\right)b$$
$$+\frac{16}{945x^8}+\frac{40}{567x^6}+\frac{674}{6075x^4}+\frac{863}{11025x^2}+\frac{250069}{11907000} \tag{40}$$

2.2. 定理的证明

由文[11] 公式 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=\frac{1}{6}\left(\arcsin^3 x\right)$ 两端关于 x 微分

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}x^{2k}}{2^{2k}}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}=B \tag{41}$$

1) 对(41)式左端裂项

$\frac{x^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-2)!(2k-1)2k}{2^{2k}\left((k-1)!\right)^2(k)^2}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2k}=B$ 令 $k-1=m$，化成

$\frac{x^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!(2m+1)(2m+2)}{2^{2m+2}(m!)^2(m+1)^2}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m+2}=B$，两端同乘以 $\frac{2}{x^2}$，得出

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!(2m+1)}{2^{2m}(m!)^2(m+1)}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{2}{x^2}B$$

$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\left(2-\frac{1}{m+1}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{2}{x^2}B$，整理得到如下(1)式，令其为 B_1

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\left(-\frac{2}{x^2}+2\right)B+1$$

2) 对(41)式左端裂项

$\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-4)!(2k-3)(2k-2)(2k-1)(2k)}{2^{2k}\left((k-2)!\right)^2(k-1)^2(k)^2}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2k}=B$，令 $k-2=m$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{12}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)}{2^{2m+4}(m!)^2(m+1)^2(m+2)^2}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m+4}=B$$

两端同乘以 $\frac{4}{x^4}$ 得

$$\frac{2}{x^2}+\frac{5}{3}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!(2m+1)(2m+3)}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{4}{x^4}B$$

$$\frac{2}{x^2}+\frac{5}{3}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\left(2-\frac{1}{m+1}\right)\left(2-\frac{1}{m+2}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{4}{x^4}B$$

$$\frac{2}{x^2}+\frac{5}{3}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\left(4-\frac{2}{m+1}-\frac{2}{m+2}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{4}{x^4}B \tag{42}$$

a) (42)式化成部分分式，得出

$$\frac{2}{x^2}+\frac{5}{3}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\left(4-\frac{1}{m+1}-\frac{3}{m+2}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{4}{x^4}B$$

由于 B,B_1 已知，计算得出下面(2)式，并令其为 B_2

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\left(-\frac{4}{3x^4}+\frac{2}{3x^2}+\frac{2}{3}\right)B+\frac{2}{3x^2}+\frac{2}{9}$$

b) 在(42)式，B,B_1,B_2 已知，易得 2 个因子乘积的二项式系数级数连带奇数倒数平方和公式(6)。

3) 对(41)式左端裂项

$$\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{12}+\frac{259x^6}{720}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-6)!(2k-5)\cdots(2k-1)(2k)}{2^{2k}\left((k-3)!\right)^2(k-2)^2(k-1)^2(k)^2}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2k}=B$$

令 $k-2=m$，

$$\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{12}+\frac{259x^6}{720}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2m)!(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)(2m+5)(2m+6)}{2^{2k+6}(m!)^2(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^2}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m+6}=B$$

两端同乘以 $\frac{8}{x^6}$ 得

$$\frac{4}{x^4}+\frac{10}{3x^2}+\frac{259}{90}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2m)!(2m+1)(2m+3)(2m+5)}{2^{2k}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{8}{x^6}B$$

$$\frac{4}{x^4}+\frac{10}{3x^2}+\frac{259}{90}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\left(2-\frac{1}{m+1}\right)\left(2-\frac{1}{m+2}\right)\left(2-\frac{1}{m+3}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{8}{x^6}B$$

$$\begin{aligned}&\frac{4}{x^4}+\frac{10}{3x^2}+\frac{259}{90}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\left(8-\frac{4}{m+1}-\frac{4}{m+2}-\frac{4}{m+3}+\frac{2}{(m+1)(m+2)}\right.\\&\left.+\frac{2}{(m+1)(m+3)}+\frac{2}{(m+2)(m+3)}-\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{8}{x^6}B\end{aligned}\tag{43}$$

a) 将上式所有分式化成部分分式，得出

$$\frac{4}{x^4}+\frac{10}{3x^2}+\frac{259}{90}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\left(8-\frac{3/2}{m+1}-\frac{3}{m+2}-\frac{15/2}{m+3}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{8}{x^6}B$$

由于 B,B_1,B_2 已知，计算得出下面(3)式，并令其为 B_3

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\left(-\frac{16}{15x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{2}{15x^2}+\frac{2}{5}\right)B+\frac{8}{15x^4}+\frac{8}{45x^2}+\frac{64}{675}$$

为行文简便，今后将 $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)$，

$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)$ 等用符号 B_{12}， B_{123} 表示。

以 B_3 证明级数连带奇数倒数平方和上标增加 1 项或几项不改变其和式收敛性。

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}\\&=\left(-\frac{16}{15x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{2}{15x^2}+\frac{2}{5}\right)B+\frac{8}{15x^4}+\frac{8}{45x^2}+\frac{64}{675}\end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(2j-1)^2}+\frac{1}{[2(m+1)-1]^2}+\frac{1}{[2(m+2)-1]^2}+\frac{1}{[2(m+3)-1]^2}\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)$$
$$+\frac{2m!x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\frac{1}{[2(m+1)-1]^2}+\frac{1}{[2(m+2)-1]^2}+\frac{1}{[2(m+3)-1]^2}\right)$$

前和式为二项式系数级数连带奇数倒数平方和表达式，后式极限趋于 0。

根据阶乘斯特林渐进公式 $n!\sim\sqrt{2n\pi}n^n\mathrm{e}^{-n}$，注意到变量 $|x|<1$，

$$\frac{2m!}{(m!)^2}\sim\frac{\sqrt{4\pi m}(2m)^{2m}\mathrm{e}^{-2m}}{2m\pi m^m\mathrm{e}^{-m}m^m\mathrm{e}^{-m}}\frac{(2m)^{2m}}{\sqrt{m\pi}(m)^{2m}}=\frac{2^{2m}}{\sqrt{m\pi}}$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2m!x^{2m}}{2^{2m}(m!)(m+3)}\left(\frac{1}{[2(m+1)-1]^2}+\frac{1}{[2(m+2)-1]^2}+\frac{1}{[2(m+3)-1]^2}\right)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{x^{2m}}{\sqrt{m\pi}(m+3)}\left(\frac{1}{[2(m+1)-1]^2}+\frac{1}{[2(m+2)-1]^2}+\frac{1}{[2(m+3)-1]^2}\right)$$
$$=0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$

因此 $=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(2j-1)^2}+0\right)x^{2m}$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}$$

所以，级数连带奇数倒数平方和上标增加 1 项或几项不改变其和式收敛性。

b) 在(43)保留 2 个因子分式，(在(41)式中出现的 2 个因子分式不再计算)，对这些 2 个因子的分式，每次保留 1 个，其余化成部分分式，得到：

$$\frac{4}{x^4}+\frac{10}{3x^2}+\frac{259}{90}+B_{13}+8B-2B_1-3B_2-7B_3=\frac{8}{x^6}B$$
$$\frac{4}{x^4}+\frac{10}{3x^2}+\frac{259}{90}+B_{23}+8B-4B_1-3B_2-\frac{13}{2}B_3=\frac{8}{x^6}B$$

由于 B,B_1,B_2,B_3 已知，计算得出公式(7)~(8)

c) 在(43)保留 3 个因子分式，其他分式化成部分分式得到：

$$\frac{4}{x^4}+\frac{10}{3x^2}+\frac{259}{90}+B_{123}+8B-2B_1-2B_2-8B_3=\frac{8}{x^6}B$$

由于 B,B_1,B_2,B_3 已知，计算得出公式(12)式。

4) 对(41)式左端裂项

$$\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{12}+\frac{259x^6}{720}+\frac{3229x^8}{10080}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-8)!(2k-7)\cdots(2k-1)(2k)}{2^{2k}\left((k-4)!\right)^2(k-3)^2(k-2)^2(k-1)^2(k)^2}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2k}=B\text{，}\quad k-4=m$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{12}+\frac{259x^6}{720}+\frac{3229x^8}{10080}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!(2m+1)(2m+2)(2m+3)\cdots(2m+6)(2m+7)(2m+8)}{2^{2m+8}(m!)^2(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^2(m+4)^2}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m+8}=B$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{12}+\frac{259x^6}{720}+\frac{3229x^8}{10080}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8(2m)!(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)}{2^{2m+8}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m+8}=B$$ ，两端同乘以 $\frac{16}{x^8}$ 得

$$\frac{8}{x^6}+\frac{20}{3x^4}+\frac{259}{45x^2}+\frac{3229}{630}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\left(2-\frac{1}{m+1}\right)\left(2-\frac{1}{m+2}\right)\left(2-\frac{1}{m+3}\right)\left(2-\frac{1}{m+4}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{16}{x^8}B$$

$$\begin{aligned}&\frac{8}{x^6}+\frac{20}{3x^4}+\frac{259}{45x^2}+\frac{3229}{630}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\left(16-\frac{8}{m+1}-\frac{8}{m+2}-\frac{8}{m+3}-\frac{8}{m+4}\right.\\&+\frac{4}{(m+1)(m+2)}+\frac{4}{(m+1)(m+3)}+\frac{4}{(m+2)(m+3)}+\frac{4}{(m+1)(m+4)}+\frac{4}{(m+2)(m+4)}\\&+\frac{4}{(m+3)(m+4)}+\frac{-2}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\frac{-2}{(m+1)(m+2)(m+4)}+\frac{-2}{(m+1)(m+3)(m+4)}\\&\left.+\frac{-2}{(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{16}{x^8}B\end{aligned}\tag{44}$$

a) 将上式所有分式化成部分分式，得出

$$\frac{8}{x^6}+\frac{20}{3x^4}+\frac{259}{45x^2}+\frac{3229}{630}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\left(16-\frac{5/2}{m+1}-\frac{9/2}{m+2}-\frac{15/2}{m+3}-\frac{35/2}{m+4}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{16}{x^8}B$$

由于 B,B_1,B_2,B_3 已知，计算得出下面(4)式，并令其为 B_4

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)$$
$$=\left(\frac{-32}{35x^8}+\frac{16}{35x^6}+\frac{4}{35x^4}+\frac{2}{35x^2}+\frac{2}{7}\right)B+\frac{16}{35x^6}+\frac{16}{105x^4}+\frac{128}{1575x^2}+\frac{64}{1225}$$

b) 在(44)式，其余保留 2 个因子分式，(在(43)式中出现的 2 个因子分式不再计算)然后对这些 2 个因子的分式，每次保留 1 个，其余化成部分分式，得到：

$$\frac{8}{x^6}+\frac{20}{3x^4}+\frac{259}{45x^2}+\frac{3229}{630}+16B+B_{14}-\frac{17}{5}B_1-\frac{9}{2}B_2-\frac{15}{2}B_3-\frac{103}{6}B_4=\frac{16}{x^8}B$$

$$\frac{8}{x^6}+\frac{20}{3x^4}+\frac{259}{45x^2}+\frac{3229}{630}+16B+B_{24}-\frac{5}{2}B_1-5B_2-\frac{15}{2}B_3-17B_4=\frac{16}{x^8}B$$

$$\frac{8}{x^6}+\frac{20}{3x^4}+\frac{259}{45x^2}+\frac{3229}{630}+16B+B_{34}$$
$$-\frac{5}{2}B_1-\frac{9}{2}B_2-\frac{17}{2}B_3-\frac{33}{2}B_4=\frac{16}{x^8}B$$

由于 B,B_1,B_2,B_3,B_4 已知，计算得出公式(9)~(11)式。

c) 在(44)保留 3 个因子分式(在(43)式出现的 3 个因子分式不再计算)，然后对这些 3 个因子的分式，每次保留 1 个，其余化成部分分式，得到：

$$\frac{8}{x^6}+\frac{20}{3x^4}+\frac{259}{45x^2}+\frac{3229}{630}+16B+B_{124}$$
$$-\frac{17}{6}B_1-4B_2-\frac{15}{2}B_3-\frac{53}{3}B_4=\frac{16}{x^8}B$$

$$\frac{8}{x^6}+\frac{20}{3x^4}+\frac{259}{45x^2}+\frac{3229}{630}+16B+B_{134}$$
$$-\frac{8}{3}B_1-\frac{9}{2}B_2-7B_3-\frac{107}{6}B_4=\frac{16}{x^8}B$$

$$\frac{8}{x^6}+\frac{20}{3x^4}+\frac{259}{45x^2}+\frac{3229}{630}+16B+B_{234}-\frac{5}{2}B_1-5B_2-\frac{13}{2}B_3-18B_4=\frac{16}{x^8}B$$

由于 B,B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 已知，计算得出(13)~(15)式。

d) 在(44)保留 4 个因子分式，然后对这些 2 个因子的分式，每次保留 1 个，其余化成部分分式，得到：

$$\frac{8}{x^6}+\frac{20}{3x^4}+\frac{259}{45x^2}+\frac{3229}{630}+16B+B_{1234}-\frac{8}{3}B_1-4B_2-8B_3-\frac{52}{3}B_4=\frac{16}{x^8}B$$

由于 B,B_1,B_2,B_3,B_4，已知，计算得出公式(16)式。

5) 对(41)式左端裂项

$$\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{12}+\frac{259x^6}{720}+\frac{3229x^8}{10080}+\frac{117469}{403200}x^{10}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-10)!(2k-9)\cdots(2k-1)(2k)}{2^{2k}\left((k-5)!\right)^2(k-4)^2(k-3)^2(k-2)^2(k-1)^2(k)^2}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2k}=B \quad , \quad k-5=m$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{12}+\frac{259x^6}{720}+\frac{3229x^8}{10080}+\frac{117469}{403200}x^{10}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!(2m+1)(2m+2)(2m+3)\cdots(2m+8)(2m+9)(2m+10)}{2^{2m+10}(m!)^2(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^2(m+4)^2(m+5)^2}\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m+10}=B$$

两端同乘以 $\frac{32}{x^{10}}$ 得

$$\frac{16}{x^8}+\frac{40}{3x^6}+\frac{518}{45x^4}+\frac{3229}{315x^2}+\frac{117469}{12600}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\left(2-\frac{1}{m+1}\right)\left(2-\frac{1}{m+2}\right)\left(2-\frac{1}{m+3}\right)\left(2-\frac{1}{m+4}\right)\left(2-\frac{1}{m+5}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{32}{x^{10}}B$$

展开乘积表达式

$$\begin{aligned}&\frac{16}{x^8}+\frac{40}{3x^6}+\frac{518}{45x^4}+\frac{3229}{315x^2}+\frac{117469}{12600}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\Bigg[32-\frac{16}{m+1}-\frac{16}{m+2}-\frac{16}{m+3}\\&-\frac{16}{m+4}-\frac{16}{m+5}+\frac{8}{(m+1)(m+2)}+\frac{8}{(m+1)(m+3)}+\frac{8}{(m+2)(m+3)}+\frac{8}{(m+1)(m+4)}\\&+\frac{8}{(m+2)(m+4)}+\frac{8}{(m+3)(m+4)}+\frac{8}{(m+1)(m+5)}+\frac{8}{(m+2)(m+5)}+\frac{8}{(m+3)(m+5)}\\&+\frac{8}{(m+4)(m+5)}+\frac{-4}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\frac{-4}{(m+1)(m+2)(m+4)}+\frac{-4}{(m+1)(m+3)(m+4)}\\&+\frac{-4}{(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{-4}{(m+1)(m+2)(m+5)}+\frac{-4}{(m+1)(m+3)(m+5)}\\&+\frac{-4}{(m+2)(m+3)(m+5)}+\frac{-4}{(m+1)(m+4)(m+5)}+\frac{-4}{(m+2)(m+4)(m+5)}\\&+\frac{-4}{(m+3)(m+4)(m+5)}+\frac{2}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{2}{(m+1)(m+2)(m+4)(m+5)}\\&+\frac{2}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)}+\frac{2}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\\&+\frac{-1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\Bigg]\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{32}{x^{10}}B\end{aligned} \tag{45}$$

在(45)式有 1 个因子分式，2 个因子分式 4 个，3 个因子分式 6 个，4 个因子分式 4 个，5 个因子分式 1 个。为使论文简短写，我们仅选 1 个因子分式，4 个因子分式，5 个因子分式，通过如下操作程序：将分式化成分母为 1 个因子。4 个因子(在(44)式出现的 4 个因子分式不再计算)，5 个因子乘积的二项式系数连带连续奇数倒数平方和级数

a) 将(45)式所有分式化成部分分式，得出：

$$\begin{aligned}&\frac{16}{x^8}+\frac{40}{3x^6}+\frac{518}{45x^4}+\frac{3229}{315x^2}+\frac{117469}{12600}\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\left(32-\frac{35/8}{m+1}-\frac{15/2}{m+2}-\frac{45/4}{m+3}-\frac{35/2}{m+4}-\frac{315/8}{m+5}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{32}{x^{10}}B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{128}{315x^8}+\frac{320}{945x^6}+\frac{4144}{14175x^4}+\frac{25832}{99225x^2}+\frac{117469}{496125}\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\left(\frac{256}{315}-\frac{1/9}{m+1}-\frac{4/21}{m+2}-\frac{2/7}{m+3}-\frac{4/9}{m+4}-\frac{1}{m+5}\right)\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}=\frac{256}{315x^{10}}B\end{aligned}$$

由于 B,B_1,B_2,B_3,B_4 已知，计算得出下面(5)式，并令其为 B_5

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+5}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)x^{2m}\\&=\left(-\frac{256}{315x^{10}}+\frac{128}{315x^8}+\frac{32}{315x^6}+\frac{16}{315x^4}+\frac{2}{63x^2}+\frac{2}{9}\right)B\\&\quad+\frac{128}{315x^{10}}+\frac{128}{945x^6}+\frac{1024}{14175x^4}+\frac{512}{11025x^2}+\frac{16384}{496125}\end{aligned}$$

b) 在(45)式保留 4 个因子分式，然后对这些 4 个因子的分式，每次保留 1 个，其余化成部分分式，得到：

$$\frac{16}{x^8}+\frac{40}{3x^6}+\frac{518}{45x^4}+\frac{3229}{315x^2}+\frac{117469}{12600}+32B+B_{1245}-\frac{107}{24}B_1-\frac{22}{3}B_2-\frac{45}{4}B_3-\frac{53}{3}B_4-\frac{943}{24}B_5=\frac{32}{x^{10}}B$$

$$\frac{16}{x^8}+\frac{40}{3x^6}+\frac{518}{45x^4}+\frac{3229}{315x^2}+\frac{117469}{12600}+32B+B_{1345}-\frac{53}{12}B_1-\frac{15}{2}B_2-11B_3-\frac{107}{6}B_4-\frac{157}{4}B_5=\frac{32}{x^{10}}B$$

$$\frac{16}{x^8}+\frac{40}{3x^6}+\frac{518}{45x^4}+\frac{3229}{315x^2}+\frac{117469}{12600}+32B+B_{2345}-\frac{35}{8}B_1-\frac{23}{3}B_2-\frac{43}{4}B_3-18B_4-\frac{941}{24}B_5=\frac{32}{x^{10}}B$$

由于 B,B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 已知，计算得出(17)~(19)式。

c) 在(45)式保留 5 个因子分式，其余化成部分分式，得到：

$$\frac{16}{x^8}+\frac{40}{3x^6}+\frac{518}{45x^4}+\frac{3229}{315x^2}+\frac{117469}{12600}+32B+B_{12345}-\frac{53}{12}B_1-\frac{22}{3}B_2-\frac{23}{2}B_3-\frac{52}{3}B_4-\frac{473}{12}B_5=\frac{32}{x^{10}}B$$

由于 B,B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 已知，计算得出(20)式。定理证毕。

2.3. 推论的证明

在定理的公式用 ix 代替 x，注意到 $\arcsin(ix)=i\operatorname{arcsin}hx$，

$\operatorname{arcsin}hx=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$， $\dfrac{\arcsin^2(ix)}{2\sqrt{1-(ix)^2}}=\dfrac{-\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2\sqrt{1+x^2}}=b$，推论成立。

3. 一些数值级数

3.1. 数值级数

在定理公式(1)~(20)，令 $x=1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$， $\arcsin x=\frac{\pi}{4}$， $B=\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2$

则分母为奇偶性不定线性因子乘积的二项式系数级数连带奇数倒数平方和数值恒等式

1) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+1)}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{16}\pi^2+1;$$

2) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+2)}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{16}\pi^2+\frac{14}{9};$$

3) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\frac{43\sqrt{2}}{240}\pi^2+\frac{1729}{675};$$

4) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\frac{177\sqrt{2}}{560}\pi^2+\frac{49408}{11025};$$

5) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\frac{2867\sqrt{2}}{5040}\pi^2+\frac{1323008}{165375};$$

6) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+1)(m+2)}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{48}\pi^2-\frac{5}{9};$$

7) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+1)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{120}\pi^2-\frac{1069}{1350};$$

8) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+2)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{40}\pi^2-\frac{694}{675};$$

9) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+1)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{71\sqrt{2}}{840}\pi^2-\frac{38383}{33075};$$

10) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+2)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{73\sqrt{2}}{840}\pi^2-\frac{16229}{11025};$$

11) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{23\sqrt{2}}{168}\pi^2-\frac{62768}{33075};$$

12) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{60}\pi^2+\frac{319}{1350};$$

13) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{140}\pi^2+\frac{722324}{33075};$$

14) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+1)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\frac{11\sqrt{2}}{420}\pi^2+\frac{4877}{13230};$$

15) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+2)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\frac{13\sqrt{2}}{240}\pi^2+\frac{44621}{33075};$$

16) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{3m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{210}\pi^2-\frac{1459}{22050};$$

17) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{3m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{13\sqrt{2}}{1890}\pi^2-\frac{587439}{5953500};$$

18) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{3m}(m!)^2(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{126}\pi^2-\frac{146123}{1323000};$$

19) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{3m}(m!)^2(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{17\sqrt{2}}{1890}\pi^2-\frac{62119}{496125};$$

20) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{3m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{945}\pi^2+\frac{8369}{567000}。$$

3.2. 数值级数

在公式(1)~(20)，令 $x=1$， $\arcsin x=\frac{\pi}{2}$；计算公式中的项 $\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_t}{b_t}\right)B=0$，

因为 $\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_t}{b_t}\right)=0$， 而 $B=\frac{\pi^2/8}{\sqrt{1-x^2}}\to\infty$， $(x\to 1)$

这时定理计算公式(1)~(20)中， $\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_t}{b_t}\right)$ 与 B 相乘的项的均为 0

则分母为奇偶性不定线性因子乘积的二项式系数级数连带奇数倒数平方和数值恒等式

1) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=1$

2) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{8}{9}$；

3) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{544}{675}$；

4) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{8192}{11025}$；

5) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{16384}{23625}$；

6) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{1}{9}$；

7) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{131}{1350}$；

8) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{56}{675}$；

9) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{2833}{33075}$；

10) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{268}{3675}$；

11) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{416}{6615}$；

12) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{19}{1350}$；

13) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{178501}{33075}$；

14) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{251}{22050}$；

15) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{332}{33075}$；

16) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{89}{66150}$；

17) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{780701}{5953500}$；

18) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{13}{147000}$；

19) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{556}{496125}$；

20) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{223}{3969000}$。

3.3. 数值级数

在推论公式(1)~(5)令 $x=1$， $b=-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$

则交错的分母为奇偶性不定因子乘积二项式系数级数连带奇数倒数平方和数值恒等式

1) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+1)}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\sqrt{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)+1$；

2) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+2)}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=3\sqrt{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{4}{9}$；

3) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+3)}\left(\sum_{j=1}^{m+2}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\frac{7}{15}\sqrt{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{304}{675}$；

4) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+4)}\left(\sum_{j=1}^{m+3}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=\frac{9}{35}\sqrt{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{736}{2205}$；

5) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(m+5)}\left(\sum_{j=1}^{m+4}\frac{1}{(2j-1)^2}\right)=-\frac{107}{315}\sqrt{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{18176}{55125}$。

参考文献

[1] Lehmer, H. (1985) Interesting Series Involving the Central Binomial Coefficients. *The American Mathematical*

Monthly, **92**, 449-457. https://doi.org/10.1080/00029890.1985.11971651

[2] Sury, B., Wang, T. and Zhao, F.-Z. (2004) Some Identities Involving of Binomial Coefficients. *Journal of Integer Sequences*, **7**, 36-52.

[3] Sofo, A. (2006) Integral Representations of Ratios of Binomial Coefficients. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **31**, 29-46.

[4] Borwein, J.M. and Girgensohn, R. (2005) Evaluation of Binomial Series. *Aequationes Mathematicae*, **70**, 25-36. https://doi.org/10.1007/s00010-005-2774-x

[5] 及万会, 黑宝骊. 关于二项式系数级数恒等式[J]. 湖南文理学院学报, 2012, 24(4): 4-13.

[6] 及万会, 张来萍. 关于正负相间二项式系数倒数级数[J]. 理论数学, 2012, 2(4): 192-201.

[7] 及万会, 黑宝骊. 列项法导出二项式系数倒数级数[J]. 理论数学, 2012, 3(1): 18-30.

[8] 张来萍, 及万会. 二项式系数倒数级数恒等式[J]. 数学的认识与实践, 2014, 44(21): 301-307.

[9] Zhang, L. and Ji, W.H. (2013) The Series of Reciprocals of Non-Central Binomial Coefficients. *American Journal of Computational Mathematics*, **3**, 31-37. https://doi.org/10.4236/ajcm.2013.33B006

[10] 张来萍, 及万会. "变换核"函数导出无穷级数恒等式[J]. 数学的认识与实践, 2016, 46(6): 276-284.

[11] Berndt, B.C. (1985) Ramanujan's Notbooks, Part 1. Springer-Verlag, New York, 262-263+289-290.