Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(9), 998-1008
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.99126

Hans汉斯

The Inverse Question of the Equal Segmentation Problem of Regular Polygons

Youning Wang, Xiaole Su*

Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education, School of Mathematical Science, Beijing Normal University, Beijing
Email: wangyouning@163.com, *suxiaole@bnu.edu.cn

Received: Oct. 14th, 2019; accepted: Oct. 31st, 2019; published: Nov. 7th, 2019

Abstract

In this paper, we focus on the inverse question of the equal segmentation problem of the regular polygons, which is a generalization of the corresponding problem for triangles and squares.

Keywords

Regular Polygon, Equal Segmentation Problem, Square, Regular Triangle

正多边形等截分之逆问题

王幼宁，苏效乐*

北京师范大学数学科学学院，数学与复杂系统教育部重点实验室，北京
Email: wangyouning@163.com, *suxiaole@bnu.edu.cn

收稿日期：2019年10月14日；录用日期：2019年10月31日；发布日期：2019年11月7日

摘　要

本文讨论了正多边形等截分问题的逆问题，是以前正三角形和正方形相应问题的推广，更具有一般性。

关键词

正多边形，等截分，正方形，正三角形

*通讯作者。

文章引用: 王幼宁, 苏效乐. 正多边形等截分之逆问题[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 998-1008.
DOI: 10.12677/pm.2019.99126

1. 引言

在正 n 边形的 n 条边上顺序截取等长线段得到 n 个截点，它们一定能顺序成为某个正 n 边形的 n 个顶点。这就是大家熟知的正多边形等截分问题，其证明是简单的，但其逆问题的求解[1] [2] [3] [4]却不是那么显然的。文献[1] [2] [3] [4]分别讨论了 $n=3$ 和 $n=4$ 的情况。本文将统一考虑正 n 边形的等截分问题的逆问题并给出解析研讨。

延续文献[4]的想法，不仅可以考虑等长截点落在原 n 边形各边之上，还可以考虑截点落在各边的有向延长线上。显然推广了的正 n 边形等截分点相应性质依然具备，同时逆问题也有相应的推广。本文将沿用文献[4]的方法并进一步拓展，自然推广原有结果。

本文不仅得到了正 n 边形的等截分逆问题的一些看起来有点神奇结果，同时也得到了文献[1] [2] [3] [4]中没有提到的一些关于三角形等截分逆问题的新的结果。比如除了正多边形外，凸偶数边形可以各边的内部有等截分正多边形(定理 1)，而凸奇数边形只有五边形才可以(定理 5)；而如果考虑等截分点都在各边延长线上，则不管奇偶性，凸多边形等截分能得到正多边形的只有原来就是正多边形的情况(定理 3)。最后的定理 6 和定理 8 则说明对三角形的情况，非平凡的等截分解存在且仅存在于钝角三角形之中。

2. 准备工作

文献[4]是从正方形的内角和作为一个出发点来考虑问题的，我们延续这种想法，但是换用更本质的外角和来考虑问题。

以下总考虑顺序以点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为顶点的正定向 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$， $n\ge 3$。记顶点 A_i 到 A_{i+1} 的边长为 $a_i>0$，顶点 A_i 之处的有向外角为 $\alpha_i\in(-\pi,\pi)$，以有向截长 $r\in(0,+\infty)$ 在边 A_iA_{i+1} 或其延长线上从 A_i 出发所截得之点为 $P_i,i=1,2,\cdots,n$，其中记 $A_0=A_n$，$A_{n+1}=A_1$，$A_{n+2}=A_2$，$\alpha_0=\alpha_n$，$\alpha_{n+1}=\alpha_1$，$\alpha_{n+2}=\alpha_2$；$a_0=a_n$，$a_{n+1}=a_1$，$a_{n+2}=a_2$。熟知有

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi. \tag{1}$$

先给出一个正 n 边形等截分问题的一个等价条件。

引理 1: 上述正定向 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的以有向截长 $r\in(0,+\infty)$ 确定的等截分点 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 恰好成为正 n 边形的充要条件是其边长、外角以及等截长满足(1)式以及

$$(a_{i-1}-r)\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)+r\left(\cos\frac{2\pi}{n}-\cos\alpha_{i+1}\right)=(a_i-r), \tag{2}$$

$$(a_{i-1}-r)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)+r\left(\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+1}\right)=0, \tag{3}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$。并且，在指标 n 阶循环意义下的任意指定的 2 个相邻 i 所对应的(2)和(3)式中 2 对方程，蕴含于整个方程组的其余 $2n-3$ 个方程之中。

证明： 等截分点 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 是正 n 边形的充要条件是其 n 个边向量 $\boldsymbol{P_iP_{i+1}},i=1,2,\cdots,n$ 循序旋转 $2\pi/n$ 相等。

正 n 边形的各组相邻边的关系相同，故只需要首先分别考虑 $P_{i-1}P_i$ 和 P_iP_{i+1} 成为某个正 n 边形的一组相邻边的充要条件。

为此，以 A_i 为原点、以 $\boldsymbol{A_iA_{i+1}}$ 为横轴正向向量建立直角坐标系，如图 1 所示，则各点坐标可分别确定为 $A_i(0,0)$，$A_{i+1}(a_i,0)$，$P_i(r,0)$，$A_{i-1}(-a_{i-1}\cos\alpha_i, a_{i-1}\sin\alpha_i)$，$P_{i-1}(-(a_{i-1}-r)\cos\alpha_i,(a_{i-1}-r)\sin\alpha_i)$，$P_{i+1}(a_i+r\cos\alpha_{i+1}, r\sin\alpha_{i+1})$。此时，$n$ 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的边向量 $\boldsymbol{P_iP_{i+1}}=(a_i-r+r\cos\alpha_{i+1}, r\sin\alpha_{i+1})$，$\boldsymbol{P_{i-1}P_i}=(r+(a_{i-1}-r)\cos\alpha_i, -(a_{i-1}-r)\sin\alpha_i)$。

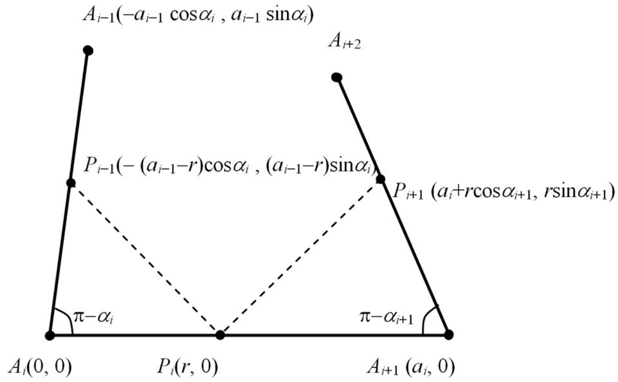

Figure 1. Sketch map of equal segmentation
图 1. 等截分示意图

同时，这两条边向量旋转 $2\pi/n$ 相等的条件在此坐标系下的表达形式即为

$$\boldsymbol{P_{i-1}P_i}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2\pi}{n} & \sin\dfrac{2\pi}{n}\\ -\sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n}\end{pmatrix}=\boldsymbol{P_iP_{i+1}}, \tag{4}$$

分量形式即分别为

$$\begin{aligned}a_i-r+r\cos\alpha_{i+1}&=\left[r+(a_{i-1}-r)\cos\alpha_i\right]\cos(2\pi/n)+(a_{i-1}-r)\sin\alpha_i\sin(2\pi/n)\\&=(a_{i-1}-r)\cos(2\pi/n-\alpha_i)+r\cos(2\pi/n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r\sin\alpha_{i+1}&=\left[r+(a_{i-1}-r)\cos\alpha_i\right]\sin(2\pi/n)-(a_{i-1}-r)\sin\alpha_i\cos(2\pi/n)\\&=(a_{i-1}-r)\sin(2\pi/n-\alpha_i)+r\sin(2\pi/n)\end{aligned}$$

它们分别对应于(2)和(3)式中指标 i 相同的一对方程。

注意到(2)和(3)式之中的几何量与坐标系选取无关，故与(1)式联立时等价于等截分点 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的 n 个边向量 $\boldsymbol{P_iP_{i+1}}, i=1,2,\cdots,n$ 循序旋转 $2\pi/n$ 是相等的，从而是它成为正 n 边形的充要条件。进一步，注意到在指标循环意义下的 $n-2$ 对相邻边向量循序旋转 $2\pi/n$ 相等，则蕴涵着另外两对也同时成立，其中外角取值满足(1)式，因而结论成立。

引理 2：上述正定向 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 若具有以有向截长 $r_1\neq r_2$ 所分别确定的等截分点 n 边形分别为正 n 边形，则 $A_1A_2\cdots A_n$ 必为正 n 边形，从而其对于任意截长所得到的等截分点 n 边形均为正 n 边形。

证明：对于给定的正定向 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，若以有向截长 $r_1\neq r_2$ 所分别确定的等截分点 n 边形分别为正 n 边形，则由引理 1 结论，(2)和(3)式对于 $r=r_1$ 和 $r=r_2$ 都成立，注意到各边长 $a_i>0$，得到

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)=0,\quad \sin\alpha_{i+1}=\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)=1,\quad \cos\alpha_{i+1}=\cos\frac{2\pi}{n}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$ 。注意到 $\alpha_i\in(-\pi,\pi), i=1,2,\cdots,n$ ，该组条件意味着只能有

$$\alpha_i=\frac{2\pi}{n}, i=1,2,\cdots,n.$$

代回(2)式进一步得到 $a_i=a_{i+1}$ ，即得 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形。

引理 3：上述正定向 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 若仅具有唯一的有向截长 $r\in(0,+\infty)$ 使得所确定的等截分点 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 恰好为正 n 边形，则在(1)式联立(2)式、(3)式所得到的方程组之中，(3)式等价于方程

$$\frac{a_{i-1}}{r}\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)+\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+1}=0, \tag{5}$$

而(2)式当 $\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\neq 0$ 时可以等价置换为方程

$$\sin\alpha_{i-1}\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)-\sin\alpha_i\sin\left(\frac{4\pi}{n}-\alpha_{i-1}-\alpha_i\right)+\sin\alpha_{i+1}\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i-1}\right)=0, \tag{6}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$ 。

证明：现在 $A_1A_2\cdots A_n$ 不是正 n 边形，否则由引理 2 可知矛盾。由引理 1 证明过程可知，(2)式对应等价于

$$\left(a_{i-1}-r\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)-\left(a_i-r\right)+r\left(\cos\frac{2\pi}{n}-\cos\alpha_{i+1}\right)=0, \tag{7}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$ 。同时(3)式等价于(5)式，并且可以按指标组等价改写为

$$\left(a_i-r\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}\right)+r\left(\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+2}\right)=0. \tag{8}$$

现在，(7)、(3)、(8)式所对应 3 元线性方程组有非零解 $\left(a_{i-1}-r,a_i-r,r\right)$ 的充要条件是其系数矩阵的行列式为零，即有

$$\begin{aligned}
0&=\begin{vmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right) & -1 & \cos\frac{2\pi}{n}-\cos\alpha_{i+1}\\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right) & 0 & \sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+1}\\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}\right) & \sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+2}\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right) & \sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+1}\\ 0 & \sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+2}\end{vmatrix}-\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}\right)\begin{vmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right) & \cos\frac{2\pi}{n}-\cos\alpha_{i+1}\\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right) & \sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+1}\end{vmatrix}\\
&=\sin\frac{2\pi}{n}\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\sin\alpha_{i+2}\\
&\quad-\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}\right)\left[\sin\frac{2\pi}{n}\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)-\cos\frac{2\pi}{n}\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\right]\\
&\quad-\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}\right)\left[-\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\sin\alpha_{i+1}+\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\cos\alpha_{i+1}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=-\sin\alpha_i\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}\right)-\sin\alpha_{i+2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}+\alpha_{i+1}\right)\\
&\quad+\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}\right)\sin\alpha_{i+1}-\sin(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}\right)\cos\alpha_{i+1}\\
&=-\sin\alpha_i\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}\right)-\sin\alpha_{i+2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\\
&\quad+\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}\right)\sin\alpha_{i+1}+\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}\right)\sin\alpha_{i+1}\\
&=-\sin\alpha_i\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{i+1}\right)-\sin\alpha_{i+2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)+\sin\alpha_{i+1}\sin\left(\frac{4\pi}{n}-\alpha_i-\alpha_{i+1}\right)
\end{aligned}
$$

此即按指标组等价于(6)式。注意到当 $\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\neq 0$ 时(6)式意味着(7)式可由方程(3)和(8)式线性表出，故此时(2)式可以等价置换为方程(6)式，结论得证。

引理 4: 上述正定向 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 若是凸的并且仅具有唯一的有向截长 $r\in(0,+\infty)$ 使得所确定的等截分点 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 恰好为正 n 边形，则当 $n=3$ 或 $n=4$ 时，或当 $n\geq 5$ 并且 $r\notin\{a_i>0\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$ 时，(1)式联立(2)式、(3)式所得到的方程组等价于(1)式联立(5)、(6)式所得到的方程组。

证明：现在 $A_1A_2\cdots A_n$ 具有正定向且凸，意味着 $\alpha_i\in(0,\pi),i=1,2,\cdots,n$。由引理 2 可知它不是正 n 边形，由引理 3 可知现只需证明 $\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\neq 0,i=1,2,\cdots,n$。

用反证法，不妨设 $\exists j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使 $\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{j+1}\right)=0$，则 $\alpha_{j+1}=\frac{2\pi}{n}\in(0,\pi)$，此时(2)、(3)式对应于指标 i 分别取为 j 和 $j+1$ 而化简得到两组等式

$$
(a_{j-1}-r)\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_j\right)=a_j-r,\quad (a_{j-1}-r)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_j\right)=0,
$$

$$
a_j+r\left(\cos\frac{2\pi}{n}-\cos\alpha_{j+2}\right)=a_{j+1},\quad r\left(\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{j+2}\right)=0.
$$

进而，由第二组式子可知，当 $n=3$ 时，若 $\alpha_{j+2}=\frac{(n-2)\pi}{n}$ 则进一步由(1)式即可得知 $\alpha_j=2\pi-\alpha_{j+1}-\alpha_{j+2}=\pi$，矛盾；于是此时只能有

$$
\alpha_{j+2}=\frac{2\pi}{n},\quad a_j=a_{j+1}.
$$

当 $n=4$ 时，同样由第二组式子易知

$$
\alpha_{j+2}=\frac{2\pi}{n},\quad a_j=a_{j+1}.
$$

而当 $n\geq 5$ 并且 $r\notin\{a_i>0\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$ 时，由第一组式子可知

$$
\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_j\right)=0,
$$

$$
\alpha_j=\frac{2\pi}{n},\quad a_{j-1}=a_j
$$

于是在每种情形下都可递推得到 $A_1A_2\cdots A_n$ 各外角相同、各边等长，与它不是正 n 边形矛盾。结论得证。

引理 5：对于给定的不是正 n 边形的正定向 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，若存在一致小于(或一致大于)各边之长的有向截长 $r\in(0,+\infty)$ 使其所确定的等截分点 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 恰好为正 n 边形，则 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外角不能有取值 $2\pi/n$ 的。

证明：若 $\exists j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使某个外角 $\alpha_{j+1}=2\pi/n$，则(2)式和(3)式蕴涵

$$(a_{j-1}-r)\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_j\right)=(a_j-r),$$

$$(a_{j-1}-r)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_j\right)=0.$$

现 $0<r<\min\{a_i>0\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$ 或 $r>\max\{a_i>0\,|\,i=1,2,\cdots,n\}>0$，则

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_j\right)>0,\quad \sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_j\right)=0.$$

注意到 $\alpha_j\in(-\pi,\pi)$，即得唯一解 $\alpha_j=2\pi/n$。关于指标 j 递推归纳则得 n 个外角都等于 $2\pi/n$，再回到(2)式得到各边长也都相等，与 $A_1A_2\cdots A_n$ 不是正 n 边形矛盾。得证。

3. 主要结果

有了前述的准备工作，本节给出本文的几个主要结果。为了便于叙述，先分奇偶性讨论一下。

对于一般的偶数边凸 n 边形，考察当 $\alpha_{j-1}+\alpha_j=4\pi/n$，$\alpha_j\in(0,2\pi/n)$ 时的情形下的特解及其性质。注意到此时 $\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_j\right)\neq 0$，由(6)式可知

$$0=\sin\alpha_{j-1}\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_j\right)+\sin\alpha_{j+1}\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_{j-1}\right)=(\sin\alpha_{j-1}-\sin\alpha_{j+1})\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_j\right),$$

故有 $\alpha_{j-1}=\alpha_{j+1}$。于是方程组(6)式和(1)式有特解 $\{\alpha_{i-1}+\alpha_i=4\pi/n,\alpha_{i-1}=\alpha_{i+1}\,|\,\alpha_1\in(0,2\pi/n),i=1,2,\cdots,n\}$，此时(5)式有对应解

$$\frac{a_{i-1}}{r}=1-\frac{\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+1}}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)}=1-\frac{\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\left(\frac{4\pi}{n}-\alpha_i\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)}=2\cos^2\frac{\pi}{n}\left[1-\tan\frac{\pi}{n}\tan\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\alpha_i}{2}\right)\right],$$

从而满足对 $i=1,2,\cdots,n$ 都有

$$2\cos\frac{2\pi}{n}<\frac{a_i}{r}<2,$$

$$\frac{a_{i-1}+a_i}{r}=2\cos^2\frac{\pi}{n}\left[2-\tan\frac{\pi}{n}\tan\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\alpha_i}{2}\right)-\tan\frac{\pi}{n}\tan\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\alpha_{i+1}}{2}\right)\right]=4\cos^2\frac{\pi}{n},$$

即由引理 4 和引理 1 可知对于边数为偶数 $n\geq 6$ 的情形都对应有不是正多边形的一族解，且此情形有

$$\frac{a_i}{r}>2\cos\frac{2\pi}{n}\begin{cases}=0,n=4;\\ \geq 1,n\geq 6.\end{cases}$$

于是，对于偶数 $n\geq 6$ 的情形，可如此构造出正 n 边形等截分点逆问题的一族凸 n 边形非平凡内截之例。即得下列结论。

定理 1：对于偶数 $n\geq 6$ 的情形，至少存在不是正 n 边形的一族凸 n 边形，具有唯一的小于各边之长

的有向截长，使得其各边之上的等截分点顺序构成正 n 边形。

对于奇数边数 $n\ge 7$ 的情形，类似的结论并不成立。事实上有下列结论。

定理 2：对于奇数边数 $n\ge 5$ 的情形，上述正定向 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 若是凸的并且仅具有唯一的一致小于各边之长的有向截长 $r\in(0,+\infty)$ 使得所确定的等截分点 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 恰好为正 n 边形，则奇数边数只能是 $n=5$。

证明：现在 $A_1A_2\cdots A_n$ 具有正定向且凸并且仅具有唯一的小于各边之长的有向截长，意味着 $\alpha_i\in(0,4\pi/n), i=1,2,\cdots,n$。而由引理 2 可知它不是正 n 边形，由引理 4、引理 5 可知相关各量是(1)、(5)、(6)式联立所得方程组的解，且 $\alpha_i\ne 2\pi/n, i=1,2,\cdots,n$。

此时(5)式对应等价变形为

$$1-\frac{a_{i-1}}{r}=\frac{\sin\dfrac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+1}}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)}, \tag{9}$$

从而由条件 $0<r<\min\{a_i>0\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 推出

$$\frac{\sin\dfrac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+1}}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)}<0, \tag{10}$$

由(1)式以及 $\alpha_i\in(0,2\pi/n)\cup(2\pi/n,4\pi/n)$ 可知 $\exists j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使 $\alpha_j\in(0,2\pi/n)$，则由(10)式可知 $\sin\alpha_{j+1}>\sin(2\pi/n)$，故得 $\alpha_{j+1}\in(2\pi/n,4\pi/n)\cap(2\pi/n,(n-2)\pi/n)$。再由(10)式递推可知 $\sin\alpha_{j+2}<\sin(2\pi/n)$，故得当奇数边数 $n=5$ 时 $\alpha_{j+2}\in(0,2\pi/n)\cup((n-2)\pi/n,4\pi/n)=(0,2\pi/5)\cup(3\pi/5,4\pi/5)$，而当奇数边数 $n\ge 7$ 时必有 $\alpha_{j+2}\in(0,2\pi/n)$。当奇数边数 $n\ge 7$ 时，随着指标 i 顺序遍历 $\{0,1,2,\cdots,n\}$，外角 α_i 在两个不相交的区间 $(0,2\pi/n)$ 和 $(2\pi/n,4\pi/n)$ 交替取值，将得到矛盾；故只有当 $n=5$ 时的情形需进一步考虑外角取值分布的相容性。结论得证。

定理 3：对于凸的上述正定向 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，若具有一致大于各边之长的有向截长 r 使得所确定的等截分点 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 恰好为正 n 边形，则 $A_1A_2\cdots A_n$ 只能是正 n 边形。

证明：用反证法。设凸正定向 $A_1A_2\cdots A_n$ 不是正 n 边形，且具有有向截长 $r>\max\{a_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 使得所确定的等截分点 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 恰好为正 n 边形，则凸正定向意味着 $\alpha_i\in(0,\pi), i=1,2,\cdots,n$。由引理 2、引理 4 可知相关各量是(1)、(5)、(6)式联立所得方程组的解，也等价是(1)、(2)、(3)式联立所得方程组的解。

此时(5)式对应等价变形为

$$\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+1}=\left(1-\frac{a_{i-1}}{r}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right), \tag{11}$$

特别当 $n=3$ 时即为三个内角 $\beta_i=\pi-\alpha_i\in(0,\pi)$ 的形式

$$\sin\frac{\pi}{3}-\sin\beta_{i+1}=\left(1-\frac{a_{i-1}}{r}\right)\sin\left(\beta_i-\frac{\pi}{3}\right). \tag{12}$$

当 $n\ge 4$ 时，由(1)式和凸性不妨设 $\alpha_1\in(0,2\pi/n]$，则(11)式蕴涵

$$\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_2=\left(1-\frac{a_0}{r}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_1\right)\ge 0,$$

$$\alpha_2\in(0,2\pi/n]\cup[(n-2)\pi/n,\pi).$$

进而按两个区间分两种情形分别讨论。若 $\alpha_2 \in \left[(n-2)\pi/n,\pi\right)$，则由(11)式递推有

$$\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_3=\left(1-\frac{a_1}{r}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_2\right)\le 0,$$

$$\alpha_3\in\left[2\pi/n,(n-2)\pi/n\right],$$

$$\cdots$$

$$\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_{i+1}=\left(1-\frac{a_{i-1}}{r}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_i\right)\le 0,$$

$$\alpha_{i+1}\in\left[2\pi/n,(n-2)\pi/n\right],$$

$$\cdots$$

$$\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha_1=\left(1-\frac{a_{n-1}}{r}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha_n\right)\le 0,$$

$$\alpha_1\in\left[2\pi/n,(n-2)\pi/n\right],$$

于是

$$\alpha_1\in\left[2\pi/n,(n-2)\pi/n\right]\cap\left(0,2\pi/n\right]=\left\{2\pi/n\right\},$$

进而再由(1)式归纳可得

$$\alpha_i=2\pi/n,i=1,2,\cdots,n$$

再回到(2)式可得

$$a_i=a_{i-1},i=1,2,\cdots,n$$

此时与 $A_1A_2\cdots A_n$ 不是正 n 边形的假设矛盾，故该种情形不成立，从而只需考虑另一情形 $\alpha_2\in\left(0,2\pi/n\right]$。此时，同理(11)式蕴涵 $\alpha_3\in\left(0,2\pi/n\right]\cup\left[(n-2)\pi/n,\pi\right)$，且只需再考虑情形 $\alpha_3\in\left(0,2\pi/n\right]$ 即可。递推归纳后，依然得到各外角相等、各边长相等，此时亦与 $A_1A_2\cdots A_n$ 不是正 n 边形的假设矛盾，即知 $A_1A_2\cdots A_n$ 只能是正 n 边形。

当 $n=3$ 时，由(1)式不妨设 $\beta_1\in\left(0,\pi/3\right]$，则(12)式蕴涵

$$\sin\frac{\pi}{3}-\sin\beta_2=\left(1-\frac{a_0}{r}\right)\sin\left(\beta_1-\frac{\pi}{3}\right)\le 0,$$

$$\beta_2\in\left[\pi/3,2\pi/3\right],$$

$$\sin\frac{\pi}{3}-\sin\beta_3=\left(1-\frac{a_1}{r}\right)\sin\left(\beta_2-\frac{\pi}{3}\right)\ge 0,$$

$$\beta_3\in\left(0,\pi/3\right]\cup\left[2\pi/3,\pi\right).$$

再由(1)式限制可知只能有

$$\beta_3\in\left(0,\pi/3\right].$$

再由(12)式可知

$$\sin\frac{\pi}{3}-\sin\beta_1=\left(1-\frac{a_2}{r}\right)\sin\left(\beta_3-\frac{\pi}{3}\right)\le 0,$$

$$\beta_1 \in [\pi/3, 2\pi/3],$$

于是

$$\beta_1 \in [\pi/3, 2\pi/3] \cap (0, \pi/3] = \{\pi/3\}.$$

进而得到各内角相等、各边长相等，此时亦与 $\Delta A_1A_2A_3$ 不是正三角形的假设矛盾，故该假设不成立，即结论得证。

与上述证法类似，利用(12)式也可推知关于三角形的下列结论成立。

定理 4：若在 $\Delta A_1A_2A_3$ 三边 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_1 之上(不含延长线上)可以分别截取点 P_1、P_2、P_3 使得有向截长 $A_1P_1 = A_2P_2 = A_3P_3$ 并使 $\Delta P_1P_2P_3$ 成为正三角形，则此时 $\Delta A_1A_2A_3$ 为正三角形。

证明：用反证法。设正定向 $\Delta P_1P_2P_3$ 不是正三角形，且具有有向截长 $r \le \min\{a_i \mid i = 1,2,3\}$。不妨设三个内角 $\beta_1 \le \beta_2 \le \beta_3$，则由(1)式和(12)式可知

$$0 \le r[\sin(\pi/3) - \sin\beta_1] = (r - a_2)\sin(\beta_3 - \pi/3) \le 0,$$

$$\beta_1 = \pi/3,$$

进而再由(12)式可得各内角相等，由(2)式可得各边长相等，与 $A_1A_2A_3$ 不是正三角形的假设矛盾，故 $A_1A_2A_3$ 只能是正三角形，结论得证。

至此，可将定理 2 和定理 4 合并写为下列结论。

定理 5：对于奇数边数 n 的情形，上述正定向 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 若是凸的并且仅具有唯一的小于各边之长的有向截长 r 使得所确定的等截分点 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 恰好为正 n 边形，则奇数边数只能是 $n = 5$。

关于三角形时的非正三角形解的存在性的证明，以及相关性质的讨论，可归结为对于相关连续函数的取值分布的讨论。

方程式(6)的三个方程在(1)式约束下以 ΔABC 的三内角 $\beta_1 \le \beta_2 \le \beta_3$ 为变元之时，是相互等价的，等价于以其较小的两个内角 $\beta_1 \le \beta_2$ 为变元之时的形式。除了具有对应于正三角形的特解 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \pi/3$ 之外，它还存在其它的解，这些解将对应于钝角三角形。事实上，具体可讨论闭区域上的二元函数的零值分布状况。由(6)式等价形式构造函数

$$f(\beta_1, \beta_2) = \sin\beta_1 \sin(\pi/3 - \beta_2) - \sin\beta_2 \sin(\pi/3 + \beta_1 + \beta_2) + \sin(\beta_1 + \beta_2)\sin(\pi/3 - \beta_1),$$

即要考虑其零值的分布，特别是当 $(\beta_1, \beta_2) \in [0, \pi/3] \times [\beta_1, \pi/2 - \beta_1/2]$ 之时的分布。注意到有

$$f(0, \beta_2) = \sin\beta_2[\sin(\pi/3) - \sin(\pi/3 + \beta_2)],$$

$$f(\beta_1, \pi/3 - \beta_1) = \sin^2\beta_1,$$

$$\begin{aligned} f(\beta_1, \beta_1) &= \sin\beta_1 \sin(\pi/3 - \beta_1) - \sin\beta_1 \sin(\pi/3 + 2\beta_1) + \sin(2\beta_1)\sin(\pi/3 - \beta_1) \\ &= \sin\beta_1[\sin(\pi/3 - \beta_1) - \sin(3\pi/3 - 2\beta_1) + 2\cos b_1 \sin(\pi/3 - \beta_1)] \\ &= 2\sin\beta_1 \sin(\pi/3 - \beta_1)[\cos(\pi/3) - \cos(\pi/3 - \beta_1) + \cos\beta_1] \\ &= 2\sin\beta_1 \sin(\pi/3 - \beta_1)[\cos(\pi/3) + \cos(\pi/3 + \beta_1)] \end{aligned}$$

由连续函数的性质可知：对于 $\forall\beta_2 \in (0, \pi/3)$ 存在 $\beta_1 \in (0, \beta_2)$ 满足方程式(6)，且此时 $\beta_3 > 2\pi/3$，从而对应于钝角三角形为解的情形；既得下列结论。

定理 6：对于 $\forall\beta_2 \in (0, \pi/3)$，存在以 $\beta_1 \le \beta_2 \le \beta_3$ 为三个内角的钝角 $\Delta A_1A_2A_3$，在其三个顶点出发的射线 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_1 上可以分别取到唯一一组点 P_1、P_2、P_3 使得有向截长 $A_1P_1 = A_2P_2 = A_3P_3$ 并使 $\Delta P_1P_2P_3$ 成为正三角形。此时 $\Delta A_1A_2A_3$ 的钝角 $\beta_3 = \pi - \beta_1 - \beta_2$ 具有值域 $(2\pi/3, \pi)$。

证明：注意到 $f(\beta_1,\beta_2)$ 连续，而且在由 $\beta_1=0$、$\beta_1=\beta_2$、$\beta_1=\pi/3-\beta_2$ 所围成的闭区域有边值条件

$$f(0,\beta_2)<0,\quad \forall\beta_2\in(0,\pi/3),$$

$$f(\beta_1,\pi/3-\beta_1)>0,\quad \forall\beta_1\in(0,\pi/3),$$

$$f(\beta_1,\beta_1)>0,\quad \forall\beta_1\in(0,\pi/3),$$

故由闭区间上连续函数的零点定理可知，$\forall\beta_2\in(0,\pi/3)$，存在 $\beta_1\in(0,\beta_2)\cap(0,\pi/3-\beta_2)$ 使得 $f(\beta_1,\beta_2)=0$。于是，可知所论存在性成立，且此时 $\beta_3>2\pi/3$。再注意到引理 2，可知截长与钝角对边的比值必是唯一的。进一步注意到对应 $\beta_1+\beta_2$ 的取值范围充满 $(0,\pi/3)$，得知钝角 β_3 具有值域 $(2\pi/3,\pi)$。证毕。

引理 7：若 $\Delta A_1A_2A_3$ 是正三角形等截分逆问题的解，即在其三个顶点出发的射线 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_1 上可以分别取到点 P_1、P_2、P_3 使得有向截长 $A_1P_1=A_2P_2=A_3P_3$ 并使 $\Delta P_1P_2P_3$ 成为正三角形，并且 $\Delta A_1A_2A_3$ 不是正三角形，则 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三个内角两两不相等。

证明：按上文中的记号，注意到 $f(\beta_1,\beta_1)>0$，$\forall\beta_1\in(0,\pi/3)$，既得 $\beta_1<\beta_2$。而

$$\begin{aligned}&f(\beta_1,\pi/2-\beta_1/2)\\&=\sin\beta_1\sin(\beta_1/2-\pi/6)-\cos(\beta_1/2)\sin(\pi/6-\beta_1/2)+\cos(\beta_1/2)\sin(\pi/3-\beta_1)\\&=\sin(\pi/6-\beta_1/2)\cos(\beta_1/2)\left[-2\sin(\beta_1/2)-1+2\cos(\pi/6-\beta_1/2)\right]\\&=\sin(\pi/6-\beta_1/2)\cos(\beta_1/2)\left[2\cos(\pi/6+\beta_1/2)-1\right]>0,\quad\forall\beta_1\in(0,\pi/3)\end{aligned}$$

从而 $\beta_2<\beta_3$，证毕。

定理 8：若 $\Delta A_1A_2A_3$ 是正三角形等截分逆问题的解，并且 $\Delta A_1A_2A_3$ 不是正三角形，则 $\Delta A_1A_2A_3$ 只能是定理 6 之中所给定的一族钝角三角形。

证明：按上文中的记号，现由引理 7 不妨设 $\beta_1<\beta_2<\beta_3$，则 $\beta_1\in(0,\pi/3)$，$\beta_2\in(\beta_1,\pi/2)$，$\beta_3\in(\pi/3,\pi)$。注意到引理 4 及其证明过程，得知 $\beta_2\neq\pi/3$。而注意到(12)式即知

$$0<r\left[\sin(\pi/3)-\sin\beta_1\right]=(r-a_2)\sin(\beta_3-\pi/3),$$

$$r>a_2.$$

现若 $\beta_2\in(\pi/3,\pi/2)$，则再注意到(12)式即知

$$0>r\left[\sin(\pi/3)-\sin\beta_2\right]=(r-a_3)\sin(\beta_1-\pi/3),$$

$$r>a_3.$$

此时，由 $\Delta A_1A_2A_3$ 不是正三角形和定理 3 即知只能有

$$r<a_1.$$

于是，相应截点 P_1 落在边 A_1A_2 上，同时截点 P_3 落在边 A_3A_1 的延长线上，从而对应角度之间具有关系

$$\beta_2<\angle P_2P_1A_1<\angle P_2P_1P_3=\pi/3,$$

即得矛盾。因而只能有

$$\beta_2\in(\beta_1,\pi/2)-\{\pi/3\}-(\pi/3,\pi/2)=(\beta_1,\pi/3),$$

$$0<r\left[\sin(\pi/3)-\sin\beta_2\right]=(r-a_3)\sin(\beta_1-\pi/3),$$

$$r<a_3.$$

此时依次得知

$$a_1/a_3 = \sin\beta_3/\sin\beta_2 = \sin(\beta_1+\beta_2)/\sin\beta_2 = \sin\beta_1\cos\beta_2/\sin\beta_2 + \cos\beta_1$$
$$> \sin\beta_1\cos(\pi/3)/\sin(\pi/3) + \cos\beta_1 = \sin(\beta_1+\pi/3)/\sin(\pi/3) > 1$$

$$r < a_3 < a_1,$$

$$r\left[\sin(\pi/3) - \sin\beta_3\right] = (r-a_1)\sin(\beta_2 - \pi/3) > 0,$$

$$\beta_3 \in (0,\pi/3)\cup(2\pi/3,\pi).$$

进而

$$\beta_3 \in \left[(0,\pi/3)\cup(2\pi/3,\pi)\right]\cap(\pi/3,\pi) = (2\pi/3,\pi).$$

此即对应为定理 6 之中所给定的钝角三角形，证毕。

对于一般的多边形边数大于等于 4 的情形，讨论所论逆问题解的分类问题是有意义的，但预期是复杂的，有待于进一步研究。

基金项目

本项研究受到国家自然科学基金资助，项目号 11471039，11971057。

参考文献

[1] 张慧欣. 一个几何问题的思考[J]. 数学通报, 2012, 51(11): 53-54.
[2] 张新. 对正三角形等截分逆问题的再思考[J]. 数学通报, 2015, 54(5): 59-60.
[3] 王幼宁. 正三角形等截分逆问题的推广及其解析求解[J]. 数学通报, 2016, 55(5): 51-53.
[4] 王幼宁, 苏效乐. 正方形等截分之逆问题[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 386-392.