Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(10), 1187-1194
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.910145

Hans汉斯

Stability of Solutions for Stochastic Volterra-Levin Equations Driven by α-Stable Noise

Weiya Rao, Huanquan Lin, Tong Jiang

School of Science, Changchun University, Changchun Jilin
Email: 1172216803@qq.com

Received: Dec. 3rd, 2019; accepted: Dec. 16th, 2019; published: Dec. 23rd, 2019

Abstract

In this paper, we study stochastic Volterra-Levin equations driven by α-stable noise. We have a try to deal with the stability conditions in distribution of the segment process of the solutions to the stochastic systems.

Keywords

α-Stable Noise, Stochastic Volterra-Levin Equation, Stability

α-稳定噪声驱动的随机Volterra-Levin方程解的稳定性

饶维亚，蔺焕泉，姜　童

长春大学理学院，吉林 长春
Email: 1172216803@qq.com

收稿日期：2019年12月3日；录用日期：2019年12月16日；发布日期：2019年12月23日

摘　要

本文研究了α-稳定噪声驱动的随机Volterra-Levin方程。在一定条件下，得到了该类方程的解部分过程的依分布稳定性。

关键词

α-稳定噪声，随机Volterra-Levin方程，依分布稳定性

文章引用: 饶维亚, 蔺焕泉, 姜童. α-稳定噪声驱动的随机 Volterra-Levin 方程解的稳定性[J]. 理论数学, 2019, 9(10): 1187-1194. DOI: 10.12677/pm.2019.910145

1. 引言

1928 年，Volterra [1]研究了如下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-\int_{t-L}^{t}q(s-t)f(x(s))\mathrm{d}s,$$

其中 q,f,L 满足下文中的假设。Volterra 尝试利用 Laypunov 方法研究该类微分方程的稳定性。1963 年，Levin [2]利用 Laypunov 方程得到该类微分方程的稳定性，所以该类方程被称为 Volterra-Levin 方程。该方面更一步的结果可以参考 MacCamy，Wong [3]和 Burton [4]的工作及参考文献。最近许多学者开始研究随机型 Volterra-Levin 方程(参见 Gushchin 和 Küchler [5]; Liu [6]; Reiß [7], Li 和 Xu [8]等及相关文献)。许多学者研究了随机 Volterra-Levin 方程的稳定性。Appleby [9]和 Burton [10]在一定条件下，利用不动点定理研究了随机 Volterra-Levin 方程在概率 1 意义下的稳定性。Luo [11]和 Zhao 等[12]进一步得到了均方意义下的指数稳定性，在更弱的条件下得到概率 1 意义下的指数稳定性。Guo 和 Zhu [13]研究了带 Poisson 跳的 Volterra-Levin 方程解的存在唯一性，并得到 p-阶矩意义下的稳定性。Yin 等[14]研究了带 Poisson 跳和变时滞的 Volterra-Levin 方程 p-阶矩意义下的稳定性。

许多学者尝试着讨论比概率 1 更弱的稳定性，随机微分方程的解收敛到某一分布，一个值得研究的课题。该种稳定称为解依分布渐近稳定。1996 年，Basak 等[15]首次研究了漂移项为线性的随机微分方程的依分布稳定性。在此基础上[15]，Bao 等[16] [17] [18] [19]，Hu 和 Wang [20]以及 Yuan 和 Mao [21]，Li 和 Zhang [22]研究了随机 Volterra-Levin 方程解的依分布稳定性。

近年来，Lévy 噪声驱动的随机微分方程受到学者们的广泛关注。α-稳定噪声是特殊的 Lévy 噪声，它可以展现重尾现象，因此研究 α-稳定噪声驱动的随机微分方程非常有意义，成为一个重要的研究课题，Priola 和 Zabczyk [23]研究了 α-稳定噪声驱动的随机微分方程解的渐近行为，Zang 和 Li [24]研究了 α-稳定噪声驱动的随机微分方程解的依分布稳定性。

2. 预备知识

设 $\{\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\ge0},P\}$ 是完备的概率空间，其中 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\ge0}$ 是滤流，满足通有条件，即滤流是右连续的并且 $\mathscr{F}_0$ 包含所有零集。令 $\{Z(t),t\ge0\}$ 为定义在 $\{\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\ge0},P\}$ 上的 α-稳定过程。对于给定的常数 $L>0$，$C:=C([-L,0];\mathbb{R})$ 记为连续函数 $\varphi:[-L,0]\to\mathbb{R}$ 构成的空间，其范数为 $\|\varphi\|=\sup_{t\in[-L,0]}|\varphi(t)|$。

本文将研究下述 α-稳定噪声驱动的随机 Volterra-Levin 方程解的依分布稳定性。

$$\mathrm{d}x(t)=-\left(\int_{t-L}^{t}q(s-t)f(x(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t+\mathrm{d}Z_t, \tag{1}$$

初始条件，

$$x(\cdot)=\psi(\cdot)\in C([-L,0];R),\ -L\le s\le0 \tag{2}$$

其中，映射 $q\in C([-L,0];R), f\in C(R;R)$，$Z_t$ 是概率空间 $\{\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\ge0},P\}$ 上的 α-稳定噪声。对任意 $\psi\in C([-L,0];R)$，定义 $\psi_t(s)=\psi(t+s),s\in[-L,0]$。

参见 Appleby [9]和 Burton [10]，本文给出如下假设：

(H1) $f(0)=0$，且存在一个常数 $\lambda>0$，使得 $\frac{f(x)}{x}\geq 2\lambda$；

(H2) $\mu=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$；

(H3) 存在一个常数 $K>0$，使得对于任意的 $x,y\in R$，$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|$；

(H4) 存在一个常数 $m>0$，使得 $\int_{-L}^{0}q(s)\mathrm{d}s=m$；

(H5) $2K\int_{-L}^{0}|q(s)|\mathrm{d}s<1$。

3. 主要结果

令 $x(t,\psi)$ 为方程(1)满足初始条件 $\psi(\cdot)\in C([-L,0];R)$ 的解，则(1)的相应部分解过程为 $x_t(\psi)=x(t+\theta;\psi),-L\leq\theta\leq 0,t\geq 0$。于是 $x_t(\psi),t\geq 0$ 的转移概率 $P(\psi,t,\cdot),\psi\in C([-L,0];R)$ 是一个齐次的马尔科夫过程(参考 Mohammed Mohammed [25])。在本节中，将研究方程(1)的部分解过程 $x_t(\psi)$ 的分布稳定性。

定义 1. 如果存在一个 $C([-L,0];R)$ 上的概率测度 $\pi(\cdot)$，使得对任意的 $\psi\in C([-L,0];R)$，当 $t\to\infty$ 时，$x_t(\psi)$ 的概率转移函数 $P(\psi,t,\cdot)$ 弱收敛到 $\pi(\cdot)$。则方程(1)的部分解过程 $x_t(\psi),t\geq 0$ 为依分布意义下渐近稳定的分布。

引理 1 假设(H1)-(H5)成立，则对于任意 $\psi\in C([-L,0];R)$，有

$$\sup_{0\leq t<\infty}E\|x_t(\psi)\|<\infty. \tag{3}$$

证明： 利用文献[22]的方法，定义连续函数 $a(t):[0,\infty]\to[0,\infty]$，

$$a(t)=\begin{cases}\dfrac{f(x(t))}{x(t)}, & x(t)\neq 0,\\ \mu, & x(t)=0.\end{cases}$$

由假设(H4)，则方程(1)满足：

$$\mathrm{d}x(t)=-ma(t)x(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}\left(\int_{-L}^{0}q(s)\int_{t+s}^{t}f(x(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right)+\mathrm{d}Z_t,t\geq 0. \tag{4}$$

利用变量替换以及分步积分，则方程(1)可写成如下形式：

$$\begin{aligned}x(t)=&\mathrm{e}^{-\int_0^t ma(u)\mathrm{d}u}\left(\psi(0)-\int_{-L}^{0}q(s)\int_{t+s}^{t}f(\psi(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right)\\&+\int_{-L}^{0}q(s)\int_{t+s}^{t}f(x(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&-\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_v^t ma(s)\mathrm{d}s}ma(v)\int_{-L}^{0}q(s)\int_{v+s}^{v}f(x(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s\mathrm{d}v\\&+\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t ma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}Z(s).\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
E|x(t)| \le & E\left|\mathrm{e}^{-\int_0^t ma(u)\mathrm{d}u}\left(\psi(0)-\int_{-L}^0 q(s)\int_{t+s}^t f(\psi(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right)\right| \\
& + E\left|\int_{-L}^0 q(s)\int_{t+s}^t f(x(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right| \\
& + E\left|\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_v^t ma(s)\mathrm{d}s} ma(v)\int_{-L}^0 q(s)\int_{v+s}^v f(x(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s\mathrm{d}v\right| \\
& + \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t ma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}Z(s) \\
:= & I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)+I_4(t).
\end{aligned} \tag{5}
$$

对于 $I_1(t)$ 有：

$$
I_1(t) \le \mathrm{e}^{-\int_0^t ma(u)\mathrm{d}u}(1+KLm)\|\psi_0\|, \tag{6}
$$

由(H3)得：

$$
I_2(t) \le K\left|\int_{-L}^0 q(s)\int_{t+s}^t E|x(u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right| \le \left(K\int_{-L}^0 |sq(s)|\mathrm{d}s\right)\cdot \sup_{-L\le\theta\le 0} E|x(t+\theta)|, \tag{7}
$$

类似地，

$$
\begin{aligned}
I_3(t) &= E\left|\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_v^t ma(s)\mathrm{d}s} ma(v)\int_{-L}^0 q(s)\int_{v+s}^v f(x(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s\mathrm{d}v\right| \\
&\le KE\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_v^t ma(s)\mathrm{d}s} ma(v)\int_{-L}^0 |q(s)|\int_{v+s}^v E|x(u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\mathrm{d}v\right) \\
&\le \left(K\int_{-L}^0 |sq(s)|\mathrm{d}s\right)\cdot \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_v^t ma(s)\mathrm{d}s} ma(v) \sup_{-L\le\theta\le 0} E|x(v+\theta)|\mathrm{d}v.
\end{aligned} \tag{8}
$$

对于 I_4，令 $\{\xi_k\}_{k\in N}$ 为一个定义在某一个正态分布 $N(0,1)$ 的概率空间 $\{\Omega',\mathscr{F}',P'\}$ 上的独立随机变量序列，$\{C_k\}_{k\in N}$ 是一个实数序列，则

$$
E'\left|\sum_{k=1}^{\infty} C_k\xi_k\right|^p = A_p\left(\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|^2\right)^{\frac{p}{2}}, A_p := \int_R \frac{|x|^p}{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x}}.
$$

则

$$
\begin{aligned}
I_4(t) &= E\left|\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t ma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}Z(s)\right| = \left(EE'\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t ma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}W_{S_s}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(E'E\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t ma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}W_{S_s}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(CE'\int_0^t\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2\mathrm{e}^{-2\int_s^t ma(u)\mathrm{d}u}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{\alpha}} \\
&\le \left(C\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha\int_s^t ma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left(C\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha\lambda(t-s)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left[\frac{C}{\alpha\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha\lambda t}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

对于 $t\ge 0$，将(6)~(9)代入(5)，可以得到：

$$
\begin{aligned}
E\left|x(t)\right| \le{}& \mathrm{e}^{-\int_0^t ma(u)\mathrm{d}u}\left(1+KLm\right)\left\|\psi_0\right\| + \left(K\int_{-L}^{0}\left|sq(s)\right|\mathrm{d}s\right)\cdot \sup_{-L\le\theta\le 0} E\left|x(t+\theta)\right| \\
&+\left(K\int_{-L}^{0}\left|sq(s)\right|\mathrm{d}s\right)\cdot\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_v^t ma(s)\mathrm{d}s} ma(v)\sup_{-L\le\theta\le 0} E\left|x(v+\theta)\right|\mathrm{d}v \\
&+\left[\frac{C}{\alpha\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha\lambda t}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

令 $\eta_1 := \left(1+KLm\right)\left\|\psi_0\right\|, \eta_2=\eta_3 := K\int_{-L}^{0}\left|sq(s)\right|\mathrm{d}s, \eta_4=\left(C\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha\int_s^t ma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}$。

由假设(H5)可知 $\rho=\eta_2+\eta_3=K\int_{-L}^{0}\left|sq(s)\right|\mathrm{d}s<1$。

另一方面，由(H1)和(H3)有，$H:=\sup_{t\ge 0}\int_{t-L}^{t}a(s)\mathrm{d}s\ge 2\lambda L$ 存在，并且 $\lim_{t\to\infty}\int_0^t a(s)\mathrm{d}s=\infty$。则对 $\forall\psi\in C\left(\left[-L,0\right];R\right)$，存在 $N>0,\lambda_1\in(0,1)$，使得 $\left\|\psi_0\right\|<N$ 以及 $\frac{\eta_1}{N}+\mathrm{e}^{\eta_1 2\lambda L}\eta_2+\mathrm{e}^{2\lambda^2 L}\frac{\eta_3}{1-\lambda_1}<1$ 成立。

由文献[22]中的引理 3.1，可得

$$
E\left|x(t)\right| \le N\mathrm{e}^{-\lambda_1\int_0^t ma(v)\mathrm{d}v}+\left(1-\rho\right)^{-1}\eta_4,\ t\ge 0. \tag{11}
$$

这说明 $x(t)$ 是有界的。

接下来我们还需要证明部分解过程 $x_t(\psi)$ 的有界性。由 α-稳定过程的自相似性，对于任意 $n\ge 1$。

$$
\begin{aligned}
E\left\|x_{nL}(\psi)\right\| \le{}& E\sup_{-L\le\theta\le 0}\left|\mathrm{e}^{-\int_{(n-1)L}^{nL+\theta} ma(u)\mathrm{d}u}\left(x\left((n-1)L\right)-\int_{-L}^{0}q(s)\int_{s+(n-1)L}^{(n-1)L} f\left(x(u)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right)\right| \\
&+E\sup_{-L\le\theta\le 0}\left|\int_{-L}^{0}q(s)\int_{nL+\theta+s}^{nL+\theta} f\left(x(u)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right| \\
&+E\sup_{-L\le\theta\le 0}\left|\int_{(n-1)L}^{nL+\theta}\mathrm{e}^{-\int_v^{nL+\theta} ma(s)\mathrm{d}s} ma(v)\int_{-L}^{0}q(s)\int_{v+s}^{v} f\left(x(u)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\mathrm{d}v\right| \\
&+E\sup_{-L\le\theta\le 0}\left|\int_{(n-1)L}^{nL+\theta}\mathrm{e}^{-\int_s^{nL+\theta} ma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}Z(s)\right| \\
\le{}& \left(K\int_{-L}^{0}\left|sq(s)\right|\mathrm{d}s\right)E\left\|x_{(n-1)L}(\psi)\right\|+C\left(1+\sup_{(n-2)L\le t\le nL}E\left|x(t,\psi)\right|\right. \\
&\left.+E\sup_{(n-2)L\le t\le nL}\left|\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_{s+(n-1)L}^{t} ma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}\tilde{Z}(s)\right|\right),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

其中 $C>0$ 时，由自相似性知 $\tilde{Z}=Z\left(s+(n-1)L\right)-Z\left((n-1)L\right)$ 仍然是一个 α-稳定过程。

对于 $\forall n\in N$，由(11)式，对于某些常数 $K_1>0$，都有

$$
\sup_{(n-2)L\le t\le nL}E\left|x(t,\psi)\right|\le\tilde{K}_1<\infty,
$$

并且对于某些常数 $\tilde{K}_2>0$，都有

$$
E\sup_{0\le t\le L}\left|\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_{s+(n-1)L}^{t} ma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}\tilde{Z}(s)\right|\le C(\alpha)=C_2<\infty.
$$

从而有

$$
E\left\|x_{nL}(\psi)\right\|\le\left(K\int_{-L}^{0}\left|sq(s)\right|\mathrm{d}s\right)E\left\|x_{(n-1)L}(\psi)\right\|+\tilde{K}_2,
$$

$$\tilde{K}_2 = C\left(1 + \sup_{(n-2)L \le t \le nL} E\left|x(t,\psi)\right|\right) + C_2.$$

所以，由条件(H5)，有

$$K\int_{-L}^{0}\left|sq(s)\right|\mathrm{d}s =: \mu < 1.$$

于是，对任意的整数$n \ge 1$，根据迭代法可得

$$\begin{aligned} E\left\|x_{nL}(\psi)\right\| &\le \mu E\left\|x_{(n-1)L}(\psi)\right\| + \tilde{K}_2 \\ &\le \mu\left(\mu E\left\|x_{(n-1)L}(\psi)\right\| + \tilde{K}_2\right) \\ &\le \mu^n \sup_{-L\le\theta\le0}\left|\psi(\theta)\right| + \tilde{K}_2\left(1+\mu+\mu^2+\cdots+\mu^{n-1}\right) \\ &\le \sup_{-L\le\theta\le0}\left|\psi(\theta)\right| + \frac{\tilde{K}_2}{1-\mu}. \end{aligned} \tag{13}$$

对于任意的$t \ge 0$，存在$n \ge 0$，使得，当$t \in \left[nL,(n+1)L\right]$时，

$$E\left\|x_t(\psi)\right\| \le E\left\|x_{(n+1)L}(\psi)\right\| + E\left\|x_{nL}(\psi)\right\|.$$

这样，根据(13)可以得到如下结论：

$$\sup_{0\le t<\infty} E\left\|x_t(\psi)\right\| < \infty.$$

引理 2. 假设(H1)-(H5)成立，则对于任意有界子集$S \subset C\left(\left[-L,0\right];R\right)$，并且$\phi,\psi \in S$，下述结论成立

$$\lim_{t\to\infty} E\left|x(t,\phi) - x(t,\psi)\right| = 0. \tag{14}$$

证明. 类似于引理 1 的证明，首先证明：

$$\lim_{t\to\infty} E\left|x_t(\phi) - x_t(\psi)\right| = 0, \tag{15}$$

其中$\phi,\psi \in S$。

对任意的$t \ge 0$，可以得到

$$\begin{aligned} &E\left|x(t,\phi) - x(t,\psi)\right| \\ &\le E\left|\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^t ma(u)\mathrm{d}u}\left(\left(\phi(0)-\psi(0)\right) - \int_{-L}^{0} q(s)\int_s^0\left[f\left(\phi(u)\right) - f\left(\psi(u)\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right)\right| \\ &\quad + E\left|\int_{-L}^{0} q(s)\int_{t+s}^{t}\left[f\left(x(u,\phi)\right) - f\left(x(u,\psi)\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right| \\ &\quad + E\left|\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_v^t ma(s)\mathrm{d}s} ma(v)\int_{-L}^{0} q(s)\int_{t+s}^{t}\left[f\left(x(u,\phi)\right) - f\left(x(u,\psi)\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}s\mathrm{d}v\right| \\ &\le \tilde{b}_1 \mathrm{e}^{-\int_0^t ma(u)\mathrm{d}u} + \tilde{b}_2 \sup_{-L\le\theta\le0} E\left|x(t+\theta,\phi) - x(t+\theta,\psi)\right| \\ &\quad + \tilde{b}_3 \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_v^t ma(s)\mathrm{d}s} ma(v) \sup_{-L\le\theta\le0} E\left|x(v+\theta,\phi) - x(v+\theta,\psi)\right|\mathrm{d}v, \end{aligned}$$

其中$\tilde{b}_1 = (1+KLm)\left|\phi(0)-\psi(0)\right|$，$\tilde{b}_2 = \tilde{b}_3 = K\int_{-L}^{0}\left|sq(s)\right|\mathrm{d}s$。因此，根据引理 1，即可得到(15)。

令$t \ge 2L$，根据假设(H1)-(H3)得：

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{-L\le\theta\le0}\left|x(t+\theta,\phi)-x(t+\theta,\psi)\right|\\
&\le E\sup_{-L\le\theta\le0}\bigg|\mathrm{e}^{-\int_{t-L}^{t+\theta}ma(u)\mathrm{d}u}\left(x(t-L,\phi)-x(t-L,\psi)\right)\\
&\quad-\int_{-L}^{0}q(s)\int_{t-L+s}^{t-L}\left[f\left(x(u,\phi)\right)-f\left(x(u,\psi)\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}s\bigg|\\
&\quad+E\sup_{-L\le\theta\le0}\left|-\int_{t-L}^{t+\theta}\int_{t+\theta+s}^{t+\theta}\left[f\left(x(u,\phi)\right)-f\left(x(u,\psi)\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right|\\
&\quad+E\sup_{-L\le\theta\le0}\left|\int_{t-L}^{t+\theta}\mathrm{e}^{-\int_{v}^{t+\theta}ma(s)\mathrm{d}s}ma(v)\cdot\int_{-L}^{0}q(s)\int_{v+s}^{v}\left[f\left(x(u,\phi)\right)-f\left(x(u,\psi)\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}s\mathrm{d}v\right|\\
&\qquad\le E\left|x(t-L,\phi)-x(t-L,\psi)\right|+mK\int_{t-2L}^{t-L}E\left|x(s,\phi)-x(s,\psi)\right|\mathrm{d}s\\
&\qquad\quad+mK\int_{t-2L}^{t-L}E\left|x(s,\phi)-x(s,\psi)\right|\mathrm{d}s+KmL\int_{t-2L}^{t-L}E\left|x(u,\phi)-x(u,\psi)\right|\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

于是利用(15)，可得

$$
\lim_{t\to\infty}\sup_{-L\le\theta\le0}\left|x(t+\theta,\phi)-x(t+\theta,\psi)\right|=0. \tag{16}
$$

因此, (14)式必定成立，引理证毕。

接下来，讨论方程(1)的部分解过程的分布稳定性。

令 $\mathscr{P}\left(C([-L,0];R)\right)$ 为在 $C([-L,0];R)$ 上的概率测度空间。当 $p_1,p_2\in\mathscr{P}\left(C([-L,0];R)\right)$ 时，定义：

$$
d_L(p_1,p_2)=\sup_{f\in L}\left|\int_e f(\Phi)p_1(d\phi)-\int_e f(\psi)p_2(\mathrm{d}\Psi)\right|,
$$

其中，对于任意的 $\phi,\psi\in C([-L,0];R)$，有

$$
L=\left\{f\mid C([-L,0];R)\to R:\left|f(\phi)-f(\psi)\right|\le\left\|\phi-\psi\right\|,\left|f(\cdot)\right|\le1\right\}.
$$

参考文献[22]，有如下的结果：

引理 3 ([22]) 假设(H1)-(H5)成立，则对于任意的初值 $\phi\in C([-L,0];R)$， $P(\phi,t,\cdot):t\ge0$ 是空间 $\mathscr{P}\left(C([-L,0];R)\right)$ 上具有度量 d_L 的柯西列。

本文的主要结果如下：

定理 1 假设(H1)-(H5)成立，则 α-稳定噪声驱动的随机方程(1)的部分解过程 $x_t(\psi),t\ge0$ 是分布稳定的。

证明. 类似于文献[22]中定理 3.1 的证明，可以很类似地得到该定理的证明。证明从略。

参考文献

[1] Volterra, V. (1982) Sur la théorie mathématique des phénomes héréditaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **7**, 249-298.

[2] Levin, J.J. (1963) The Asymptotic Behavior of the Solution of a Volterra Equation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **14**, 534-541. https://doi.org/10.2307/2034270

[3] MacCamy, R.C. and Wong, J.S.W. (1972) Stability Theorems for Some Functional Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **164**, 1-37. https://doi.org/10.2307/1995957

[4] Burton, T.A. (1979) Stability Theory for Volterra Equations. *Journal of Differential Equations*, **32**, 101-118. https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90054-8

[5] Gushchin, A. and Küchler, U. (2000) On Stationary Solutions of Delay Differential Equations Driven by Lévy Process. *Stochastic Processes and their Applications*, **88**, 195-211. https://doi.org/10.1016/S0304-4149(99)00126-X

[6] Liu, K. (2010) Retarded Stationary Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by Lévy Noise and Operator Self-Decomposability. *Potential Analysis*, **33**, 291-312. https://doi.org/10.1007/s11118-010-9174-0

[7] Reiβ, M., Riedleb, M. and van Gaansc, O. (2006) Delay Differential Equations Driven by Lévy Processes: Stationarity and Feller Properties. *Stochastic Processes and their Applications*, **116**, 1409-1432. https://doi.org/10.1016/j.spa.2006.03.002

[8] Li, D.S. and Xu, D.Y. (2012) Existence and Global Attractivity of Periodic Solution for Impulsive Stochastic Volterra-Levin Equations. Electron. *Qualitative Theory of Differential Equations*, **46**, 1-12.

[9] Appleby, J.A.D. (2008) Fixed Points, Stability and Harmless Stochastic Perturbations.

[10] Burton, T.A. (2006) Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations. Dover, New York.

[11] Luo, J. (2010) Fixed Points and Exponential Stability for Stochastic Volterra-Levin Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **234**, 934-940. https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.02.013

[12] Zhao, D., Yuan, S. and Zhang, T. (2014) Improved Stability Conditions for a Class of Stochastic Volterra-Levin Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **231**, 39-47. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.01.022

[13] Guo, L. and Zhu, Q. (2011) Stability Analysis for Stochastic Volterra-Levin Equations with Poisson Jumps: Fixed Point Approach. *Journal of Mathematical Physics*, **52**, Article ID: 042702. https://doi.org/10.1063/1.3573598

[14] Yin, H., Xiao, S., Xiao, X. and Wen, X. (2014) *p*th Moment Stability in Stochastic Neutral Volterra-Levin Equation with Lévy Noise and Variable Delays. *Advances in Difference Equations*, **2014**, 106. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-106

[15] Basak, G.K., Bisi, A. and Ghosh, M.K. (1996) Stability of a Random Diffusion with Linear Drift. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **202**, 604-622. https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0336

[16] 鲍建海. 马尔可夫调制的中立型随机微分方程的数值解及依分布稳定性[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 中南大学, 2006.

[17] Bao, J., Hou, Z. and Yuan, C. (2009) Stability in Distribution of Neutral Stochastic Differential Delay Equations with Markovian Switching. *Statistics and Probability Letters*, **79**, 1663-1673. https://doi.org/10.1016/j.spl.2009.04.006

[18] Bao, J., Hou, Z. and Yuan, C. (2010) Stability in Distribution of Mild Solutions to Stochastic Partial Differential Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **138**, 2169-2180. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-10-10230-5

[19] Bao, J., Truman, A. and Yuan, C. (2009) Stability in Distribution of Mild Solutions to Stochastic Partial Differential Delay Equations with Jumps. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, **465**, 2111-2134. https://doi.org/10.1098/rspa.2008.0486

[20] Hu, G.X. and Wang, K. (2012) Stability in Distribution of Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Markovian Switching. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **385**, 757-769. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.07.002

[21] Yuan, C. and Mao, X. (2003) Asymptotic Stability in Distribution of Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. *Stochastic Processes and their Applications*, **103**, 277-291. https://doi.org/10.1016/S0304-4149(02)00230-2

[22] Li, Z. and Zhang, W. (2017) Stability in Distribution of Stochastic Volterra-Levin Equations. *Statistics and Probability Letters*, **122**, 20-27. https://doi.org/10.1016/j.spl.2016.10.022

[23] Priola, E. and Zabczyk, J. (2011) Structural Properties of Semilinear SPDEs Driven by Cylindrical Stable Processes. *Probability Theory and Related Fields*, **149**, 97-137. https://doi.org/10.1007/s00440-009-0243-5

[24] Zang, Y. and Li, J. (2014) Stability in Distribution of Neutral Stochastic Partial Differential Delay Equations Driven by α-Stable Process. *Advances in Difference Equations*, **2014**, 13. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-13

[25] Mohammed, S. (1984) Stochastic Functional Differential Equation. Pitman, Boston, MA.