Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(1), 11-16
Published Online January 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.101003

Hans汉斯

The Faithfully Flat Property of the Residue Rings of Ore Extension Rings

Zhaoqing Gong, Lunqun Ouyang

School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan
Email: 271811021@qq.com, ouyanglqtxy@163.com

Received: Dec. 7th, 2019; accepted: Dec. 25th, 2019; published: Jan. 2nd, 2020

Abstract

Let α be an automorphism and δ an α-derivation of a ring R, $f(x)$ be a skew polynomial in the Ore extension ring $R[x;\alpha,\delta]$. We mainly investigate the relations between the coefficients of $f(x)$ and the faithfully flat property of $R[x;\alpha,\delta]/(f(x))$, and obtain some sufficient conditions for $R[x;\alpha,\delta]/(f(x))$ being a faithfully flat R-module.

Keywords

(α,δ)-Compatible Ideal, Flat Module, Faithfully Flat Module

Ore扩张剩余类环的忠实平坦性质

龚朝庆，欧阳伦群

湖南科技大学，数学与计算科学学院，湖南 湘潭
Email: 271811021@qq.com, ouyanglqtxy@163.com

收稿日期：2019年12月7日；录用日期：2019年12月25日；发布日期：2020年1月2日

摘 要

设α是环R的自同构，δ是环R的α-导子，$f(x)$是Ore扩张环$R[x;\alpha,\delta]$中的一个斜多项式。通过讨论$f(x)$的系数与$R[x;\alpha,\delta]/(f(x))$的忠实平坦性质之间的关系，得到了$R[x;\alpha,\delta]/(f(x))$是忠实平坦$R$-模时应满足的几个充分条件。

文章引用: 龚朝庆, 欧阳伦群. Ore 扩张剩余类环的忠实平坦性质[J]. 理论数学, 2020, 10(1): 11-16.
DOI: 10.12677/pm.2020.101003

关键词

(α,δ)-相容理想，平坦模，忠实平坦模

1. 前言

设 R 是有单位元 1 的交换环，α 是环 R 上的一个自同构，δ 是环 R 上的一个 α -导子，即 δ 是环 R 的保持加法运算的映射，并且对任意 $a,b\in R$，有 $\delta(ab)=\delta(a)b+\alpha(a)\delta(b)$。记 $R[x;\alpha,\delta]=\left\{\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\,\middle|\,a_i\in R,n\in N\right\}$，其中加法运算为普通的多项式加法，乘法运算为满足下列关系式的乘法运算：对于任意 $a\in R$，$xa=\alpha(a)x+\delta(a)$，则 $R[x;\alpha,\delta]$ 按上述运算构成一个环，称为环 R 的 Ore 扩张环。

设 I 是环 R 的理想，如果对任意 $a,b\in R$，$ab\in I\Leftrightarrow a\alpha(b)\in I$，则称 I 是环 R 的 α -相容理想；如果对任意 $a,b\in R$，$ab\in I\Leftrightarrow a\delta(b)\in I$，则称 I 是环 R 的 δ -相容理想；如果理想 I 既是环 R 的 α -相容理想，又是环 R 的 δ -相容理想，则称 I 是环 R 的 (α,δ) -相容理想。如果环 R 的任意理想都是 α -相容理想，则称环 R 是 α -相容环；如果环 R 的任意理想都是 δ -相容理想，则称环 R 是 δ -相容环；如果环 R 的任意理想都是 (α,δ) -相容理想，则称环 R 是 (α,δ) -相容环。

设 α 是环 R 的自同构，δ 是环 R 的 α -导子，α^{-1} 是 α 的逆自同构。对于任意整数 i,j，$0\le i\le j$，用 f_i^j 表示 i 个 α 与 $j-i$ 个 δ 组成的各种各样可能的乘积的和。例如：$f_j^j=\alpha^j$，$f_0^j=\delta^j$，$f_{j-1}^j=\alpha^{j-1}\delta+\alpha^{j-2}\delta\alpha+\cdots+\delta\alpha^{j-1}$。则由文献[1]知，对任意正整数 n，任意 $r\in R$，有 $x^nr=\sum_{i=0}^{n}f_i^n(r)x^i$。令 $\alpha'=\alpha^{-1}$，$\delta'=-\delta\alpha^{-1}$，仿照 f_i^j 的表示方法，用 g_i^j 表示 i 个 α' 与 $j-i$ 个 δ' 组成的各种各样可能的乘积的和。则由文献[2]知，对任意正整数 n，任意 $b\in R$，有 $bx^n=\sum_{i=0}^{n}x^ig_i^n(b)$。

2. 预备知识

引理 1：设 R 是有单位元 1 的结合环，α 是环 R 的自同构，δ 是环 R 的 α -导子，I 是环 R 的 (α,δ) -相容理想，则对任意 $a,b\in R$，下列结论成立：

1) 若 $ab\in I$，则对任意正整数 n，有 $a\alpha^{-n}(b)\in I$，$\alpha^{-n}(a)b\in I$；反过来，若存在正整数 n，使得 $a\alpha^{-n}(b)\in I$ 或 $\alpha^{-n}(a)b\in I$，则必有 $ab\in I$；

2) 若 $ab\in I$，则对任意正整数 m、n，有 $\alpha^{-m}(a)\delta^n(b)\in I$，$\delta^n(a)\alpha^{-m}(b)\in I$。

证明：1) 若 $ab\in I$，则有 $a\alpha\left(\alpha^{-1}(b)\right)\in I$。于是由 α -相容理想的定义可得 $a\alpha^{-1}(b)\in I$，再由 $a\alpha^{-1}(b)\in I$ 可推出 $a\alpha\left(\alpha^{-2}(b)\right)\in I$，从而同样可推出 $a\alpha^{-2}(b)\in I$。依此类推可得对任意正整数 n，有 $a\alpha^{-n}(b)\in I$。

若 $ab\in I$，则有 $\alpha^n\left(\alpha^{-n}(a)\alpha^{-n}(b)\right)=1\cdot\alpha^n\left(\alpha^{-n}(a)\alpha^{-n}(b)\right)\in I$，其中 n 是正整数，于是由上面的证明可得 $1\cdot\alpha^{-n}\left(\alpha^n\left(\alpha^{-n}(a)\alpha^{-n}(b)\right)\right)=\alpha^{-n}(a)\alpha^{-n}(b)\in I$。由于 I 是环 R 的 α -相容理想，于是可得 $\alpha^{-n}(a)\alpha^{-n+1}(b)\in I$，依此类推可得 $\alpha^{-n}(a)b\in I$。

反过来，若存在正整数 n，使得 $a\alpha^{-n}(b)\in I$ 或 $\alpha^{-n}(a)b\in I$，则由文献[3]中的命题 2.3 可得 $a\alpha^n\left(\alpha^{-n}(b)\right)=ab\in I$ 及 $\alpha^n\left(\alpha^{-n}(a)\right)b=ab\in I$。

2) 若 $ab\in I$，则由(1)可得 $\alpha^{-m}(a)b\in I$，又由于 I 是环 R 的 δ-相容理想，于是可得 $\alpha^{-m}(a)\delta(b)\in I$，从而可得 $\alpha^{-m}(a)\delta^{n}(b)\in I$。

若 $ab\in I$，则由文献[3]中的命题 2.3 可得 $\alpha(a)b\in I$，由于 I 是环 R 的 δ-相容理想，于是有 $\alpha(a)\delta(b)\in I$，又由于 $1\cdot ab=ab\in I$，I 是环 R 的 δ-相容理想，于是有 $1\cdot\delta(ab)=\delta(ab)\in I$，从而有 $\delta(a)b=\delta(ab)-\alpha(a)\delta(b)\in I$。

由 $\delta(a)b\in I$，类似可得 $\delta^{2}(a)b\in I$，从而可得 $\delta^{n}(a)b\in I$，再由(1)可得 $\delta^{n}(a)\alpha^{-m}(b)\in I$。

推论 1：设 R 是有单位元 1 的结合环，α 是环 R 的自同构，δ 是环 R 的 α-导子，I 是环 R 的 (α,δ)-相容理想，则对任意 $a,b\in R$，下列结论成立：

1) 若 $ab\in I$，则对任意非零整数 n，有 $a\alpha^{n}(b)\in I$，$\alpha^{n}(a)b\in I$；反过来，若存在非零整数 n，使得 $a\alpha^{n}(b)\in I$ 或 $\alpha^{n}(a)b\in I$，则必有 $ab\in I$；

2) 若 $ab\in I$，则对任意整数 m 及正整数 n，有 $\alpha^{m}(a)\delta^{n}(b)\in I$，$\delta^{n}(a)\alpha^{m}(b)\in I$；

3) 若 $ab\in I$，则 $af_i^{j}(b)\in I$，其中 $i<j$；若 $b\in I$，则 $g_i^{j}(b)\in I$，其中 $i\le j$。

证明：由引理 1 及文献[3]中的命题 2.3 可知上述结论(1)和(2)成立；由上述结论(1)和(2)成立易知结论(3)成立。

引理 2：设 R 是有单位元 1 的结合环，α 是环 R 的自同构，δ 是环 R 的 α-导子，I 是环 R 的 (α,δ)-相容理想，$f(x)=\sum_{j=0}^{m}a_jx^j\in R[x;\alpha,\delta]$。则对任意正整数 n，任意 $b\in I$，有 $f(x)b\in I[x;\alpha,\delta]$，$f(x)bx^n\in(f(x))\cdot I$。

证明：由于 $f(x)b=\left(\sum_{j=0}^{m}a_jx^j\right)b=\sum_{j=0}^{m}a_j\left(\sum_{i=0}^{j}f_i^{j}(b)x^i\right)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{j}a_jf_i^{j}(b)x^i$，由 $b\in I$ 可得对任意 $0\le j\le m$，$a_jb\in I$，于是由推论 1 得 $a_jf_i^{j}(b)\in I$，故 $f(x)b\in I[x;\alpha,\delta]$。

由于 $f(x)bx^n=f(x)\left(\sum_{i=0}^{n}x^ig_i^{n}(b)\right)=\sum_{i=0}^{n}f(x)x^ig_i^{n}(b)$，由于 $b\in I$，于是由推论 1 可得 $g_i^{n}(b)\in I$，故 $f(x)bx^n\in(f(x))\cdot I$。

3. 主要结果

定理 1：设 R 是有单位元 1 的交换环，α 是环 R 的自同构，δ 是环 R 的 α-导子，I 是环 R 的 (α,δ)-相容理想，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in R[x;\alpha,\delta]$，$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m\in R[x;\alpha,\delta]$，$F(x)=f(x)g(x)$，如果存在正整数 $k\,(0<k<n)$，使得 $a_n(a_n\neq 0),a_{n-1},\cdots,a_{n-k+1}$ 都是幂等元，$(a_n,a_{n-1},\cdots,a_{n-k})=R$，且 $F(x)$ 中 $x^l\,(n-k\le l\le n+m)$ 的系数都在 I 中，则必有 $b_j\in I$，$j=0,1,\cdots,m$。

证明：我们有

$$F(x)=f(x)g(x)=\sum_{l=0}^{n+m}\left(\sum_{s+t=l}\left(\sum_{i=s}^{n}a_if_s^{i}(b_t)\right)\right)x^l=\sum_{l=0}^{n+m}\Delta_lx^l,$$

其中 $\Delta_l=\sum_{s+t=l}\left(\sum_{i=s}^{n}a_if_s^{i}(b_t)\right)$ 为 $F(x)$ 中 x^l 项的系数。由已知条件知，当 $n-k\le l\le n+m$ 时，$\Delta_l\in I$。为了表达方便起见，下面假设当 $j<0$ 时，约定 $b_j=0$。现在我们构造一个表(表 1)，将能从引理的已知条件及 $\Delta_l\in I\,(n-k\le l\le n+m)$ 的表达式中可证明出属于 I 的那些 $a_ib_j\,(n-k\le i\le n)$ 放入表中。

当 $l=n+m$ 时，有 $\Delta_{n+m}=a_n\alpha^{n}(b_m)\in I$，由于 I 是 (α,δ)-相容理想，故由推论 1 可得 $a_nb_m\in I$。将 a_nb_m 放入表 1 的第一行；

当 $l=n+m-1$ 时，我们有

$$\Delta_{n+m-1}=a_n\alpha^{n}(b_{m-1})+a_{n-1}\alpha^{n-1}(b_m)+a_nf_{n-1}^{n}(b_m).\tag{1}$$

由于 a_n 是幂等元，故将方程(1)两边同时乘以 a_n 得

$$a_n\alpha^n(b_{m-1}) = a_n\Delta_{n+m-1} - a_{n-1}a_n\alpha^{n-1}(b_m) - a_nf_{n-1}^n(b_m).$$

由于 I 是 (α,δ)-相容理想且 $a_nb_m \in I$，于是由推论 1 可得 $a_n\alpha^{n-1}(b_m) \in I$ 且 $a_nf_{n-1}^n(b_m) \in I$，从而有 $a_n\alpha^n(b_{m-1}) \in I$，再由推论 1 得 $a_nb_{m-1} \in I$。由引理的已知条件及上面的证明过程可知，在方程(1)中，我们有 $\Delta_{n+m-1} \in I$，$a_n\alpha^n(b_{m-1}) \in I$，$a_nf_{n-1}^n(b_m) \in I$，故我们有

$$a_{n-1}\alpha^{n-1}(b_m) = \Delta_{n+m-1} - a_n\alpha^n(b_{m-1}) - a_nf_{n-1}^n(b_m) \in I.$$

于是由推论 1 可得 $a_{n-1}b_m \in I$。将 a_nb_{m-1}，$a_{n-1}b_m$ 放入表 1 的第二行；

当 $l = n+m-2$ 时，我们有

$$\Delta_{n+m-2} = a_n\alpha^n(b_{m-2}) + a_{n-1}\alpha^{n-1}(b_{m-1}) + a_nf_{n-1}^n(b_{m-1}) + a_{n-2}\alpha^{n-2}(b_m) + a_{n-1}f_{n-2}^{n-1}(b_m) + a_nf_{n-2}^n(b_m) \quad (2)$$

将方程(2)两边同时乘以 a_n 得

$$a_n\alpha^n(b_{m-2}) = a_n\Delta_{n+m-2} - a_{n-1}a_n\alpha^{n-1}(b_{m-1}) - a_nf_{n-1}^n(b_{m-1}) - a_{n-2}a_n\alpha^{n-2}(b_m) - a_{n-1}a_nf_{n-2}^{n-1}(b_m) - a_nf_{n-2}^n(b_m).$$

由于 $\Delta_{n+m-2} \in I$，$a_nb_m \in I$，$a_{n-1}b_m \in I$ 及 $a_nb_{m-1} \in I$，故由推论 1 可得 $a_n\alpha^{n-1}(b_{m-1}) \in I$，$a_nf_{n-1}^n(b_{m-1}) \in I$，$a_n\alpha^{n-2}(b_m) \in I$，$a_nf_{n-2}^{n-1}(b_m) \in I$，$a_nf_{n-2}^n(b_m) \in I$，从而可得 $a_n\alpha^n(b_{m-2}) \in I$，再利用推论 1 可得 $a_nb_{m-2} \in I$。

再将方程(2)两边同时乘以 a_{n-1} 得

$$a_{n-1}\alpha^{n-1}(b_{m-1}) = a_{n-1}\Delta_{n+m-2} - a_{n-1}a_n\alpha^n(b_{m-2}) - a_{n-1}a_nf_{n-1}^n(b_{m-1}) - a_{n-2}a_{n-1}\alpha^{n-2}(b_m) - a_{n-1}f_{n-2}^{n-1}(b_m) - a_{n-1}a_nf_{n-2}^n(b_m)$$

利用 $a_nb_m \in I$，$a_{n-1}b_m \in I$，$a_nb_{m-1} \in I$ 及 $a_nb_{m-2} \in I$ 这些上面已经证明了的条件及推论 1，我们可得 $a_{n-1}\alpha^{n-1}(b_{m-1}) \in I$，从而有 $a_{n-1}b_{m-1} \in I$。由方程(2)，我们有

$$a_{n-2}\alpha^{n-2}(b_m) = \Delta_{n+m-2} - a_n\alpha^n(b_{m-2}) - a_{n-1}\alpha^{n-1}(b_{m-1}) - a_nf_{n-1}^n(b_{m-1}) - a_{n-1}f_{n-2}^{n-1}(b_m) - a_nf_{n-2}^n(b_m).$$

由于 $\Delta_{n+m-2} \in I$，$a_nb_m \in I$，$a_{n-1}b_m \in I$，$a_nb_{m-1} \in I$ 及 $a_{n-1}b_{m-1} \in I$，$a_nb_{m-2} \in I$，故由推论 1 得 $a_{n-2}\alpha^{n-2}(b_m) \in I$，从而有 $a_{n-2}b_m \in I$。将 a_nb_{m-2}，$a_{n-1}b_{m-1}$，$a_{n-2}b_m$ 放入表 1 的第三行；

Table 1. a_ib_j $(n-k \le i \le n)$ belongs to I

表 1. 属于 I 的 a_ib_j $(n-k \le i \le n)$

$l = n+m$	a_nb_m							
$n+m-1$	$a_{n-1}b_m$	a_nb_{m-1}						
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$					
$n+m-k+1$	$a_{n-k+1}b_m$	$a_{n-k+2}b_{m-1}$	$\cdots\ \cdots$	a_nb_{m-k+1}				
$n+m-k$	$a_{n-k}b_m$	$a_{n-k+1}b_{m-1}$	$\cdots\ \cdots\ \cdots$	a_nb_{m-k}				
$n+m-1$		$a_{n-k}b_{m-1}$	$\cdots\ \cdots\ \cdots$	$a_{n-1}b_{m-k}$	a_nb_{m-k-1}			
$\vdots$		$\ddots$				$\ddots$		
$\vdots$			$\ddots$				$\ddots$	
$n+1$				$a_{n-k}b_{k+1}$	$a_{n-k+1}b_k$	$\cdots\ \cdots$	a_nb_1	
n					$a_{n-k}b_k$	$\cdots\ \cdots\ \cdots$	$a_{n-1}b_1$	a_nb_0
$\vdots$					$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$						$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-k+1$							$a_{n-k}b_1$	$a_{n-k+1}b_0$
$n-k$								$a_{n-k}b_0$

依此类推，假设当$l=n+m-k+1$时，由对应的系数

$$\Delta_{n+m-k+1}=a_n\alpha^n\left(b_{m-k+1}\right)+\sum_{i=n-1}^{n}a_if_{n-1}^i\left(b_{m-k+2}\right)+\cdots+\sum_{i=n-k+1}^{n}a_if_{n-k+1}^i\left(b_m\right)\in I$$

可得a_nb_{m-k+1}，$a_{n-1}b_{m-k+2}$，$\cdots$，$a_{n-k+1}b_m$都属于I，并将其放入表1的第k行。

当$l=n+m-k$时，我们有

$$\Delta_{n+m-k}=a_n\alpha^n\left(b_{m-k}\right)+\sum_{i=n-1}^{n}a_if_{n-1}^i\left(b_{m-k+1}\right)+\cdots+\sum_{i=n-k}^{n}a_if_{n-k}^i\left(b_m\right)\in I. \tag{3}$$

依次将方程(3)两边分别乘以a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_{n-k+1}，再运用上述类似的方法可依次得到a_nb_{m-k}，$a_{n-1}b_{m-k+1}$，$\cdots$，$a_{n-k}b_m$都属于I，将其放入表1的第$k+1$行。

由于$\left(a_n,a_{n-1},\cdots,a_{n-k}\right)=R$，于是存在$r_0,r_1,\cdots,r_k\in R$，使得$r_0a_n+r_1a_{n-1}+\cdots+r_ka_{n-k}=1$，因此由表1的第一列可得

$$r_0a_nb_m+r_1a_{n-1}b_m+\cdots+r_ka_{n-k}b_m=b_m\in I.$$

接下来再看$x^{n+m-k-1}$的系数，即当$l=n+m-k-1$时，有

$$\Delta_{n+m-k-1}=a_n\alpha^n\left(b_{m-k-1}\right)+\sum_{i=n-1}^{n}a_if_{n-1}^i\left(b_{m-k}\right)+\cdots+\sum_{i=n-k-1}^{n}a_if_{n-k-1}^i\left(b_m\right)\in I,$$

由于$b_m\in I$，则可得$a_n\alpha^n\left(b_{m-k-1}\right)+\sum_{i=n-1}^{n}a_if_{n-1}^i\left(b_{m-k}\right)+\cdots+\sum_{i=n-k}^{n}a_if_{n-k}^i\left(b_{m-1}\right)\in I$，将该式依次分别乘以$a_n$，$a_{n-1}$，$\cdots$，$a_{n-k+1}$，可以推出$a_nb_{m-k-1}$，$a_{n-1}b_{m-k}$，$\cdots$，$a_{n-k}b_{m-1}$都属于$I$，将其放入表1的第$k+2$行。

由表1的第二列可得

$$r_0a_nb_{m-1}+r_1a_{n-1}b_{m-1}+\cdots+r_ka_{n-k}b_{m-1}=b_{m-1}\in I.$$

重复此过程，于是可得表1中的每一项都属于I，并且分别由表1的每一列还可以得到b_m，b_{m-1}，$\cdots$，b_1，b_0都属于I。

定理2：设R是有单位元1的(α,δ)-相容的交换环，α是环R的自同构，δ是环R的α-导子，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in R[x;\alpha,\delta]$，如果存在正整数$k(0<k<n)$，使得$a_n(a_n\neq 0),a_{n-1},\cdots,a_{n-k+1}$都是幂等元，$\left(a_n,a_{n-1},\cdots,a_{n-k}\right)=R$，则$A=R[x;\alpha,\delta]/(f(x))$是忠实平坦的右$R$-模。

证明：首先证明A的平坦性。在R-模正合列

$$0\to(f(x))\to R[x;\alpha,\delta]\to A\to 0$$

中，$R[x;\alpha,\delta]\cong\coprod R$是平坦右$R$-模，故由文献[4]知$A$是平坦右$R$-模的充要条件是对$R$中任意有限生成的左理想$I$，有

$$(f(x))\cap R[x;\alpha,\delta]\cdot I=(f(x))\cdot I.$$

显然$(f(x))\cdot I\subseteq(f(x))\cap R[x;\alpha,\delta]\cdot I$，下证$(f(x))\cap R[x;\alpha,\delta]\cdot I\subseteq(f(x))\cdot I$成立。

设$F(x)\in(f(x))\cap R[x;\alpha,\delta]\cdot I$，则存在$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m\in R[x;\alpha,\delta]$，使得$F(x)=f(x)g(x)\in R[x;\alpha,\delta]\cdot I\subseteq I[x;\alpha,\delta]$，于是$F(x)=f(x)g(x)$的所有系数都属于$I$，从而由定理1可得$b_i\in I$，$i=0,1,\cdots,m$，因此由引理2可得

$$F(x)=f(x)g(x)=\sum_{i=0}^{m}f(x)b_ix^i\in(f(x))\cdot I,$$

所以有$(f(x))\cap R[x;\alpha,\delta]\cdot I\subseteq(f(x))\cdot I$，故$A$是平坦右$R$-模。

下证A是忠实平坦的右R-模。根据文献[5]，只要证对于R的任意有限生成的真左理想I，$I\neq R$，

一定有 $AI \neq A$，则可得 A 是忠实平坦的右 R-模。所以我们只需证明 A 中的单位元不在 AI 中。

反设 A 中的单位元 $1+(f(x)) \in AI$，则存在 $h_i(x) \in R[x;\alpha,\delta]$，$d_i \in I$，使得

$$1+(f(x))=\sum\left(h_i(x)+(f(x))\right)d_i=\sum h_i(x)d_i+(f(x)).$$

由于 $h_i(x) \in R[x;\alpha,\delta]$，$d_i \in I$，于是由引理 2 知 $\sum h_i(x)d_i \in I[x;\alpha,\delta]$，故存在 $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m \in R[x;\alpha,\delta]$，使得

$$1+f(x)g(x)=1+\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{s+t=k}\left(\sum_{i=s}^{n}a_i f_s^i(b_t)\right)\right)x^k \in I[x;\alpha,\delta].$$

由于 $f(x)g(x)$ 中除了常数项以外的项的系数都属于 I，因此由定理 1 可得 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 都属于 I，于是有 $a_ib_0 \in I$，$i=0,1,\cdots,n$，于是由推论 1 可得 $\sum_{i=0}^{n}a_i f_0^i(b_0) \in I$。从而由 $1+\sum_{i=0}^{n}a_i f_0^i(b_0) \in I$ 可得 $1 \in I$，这与假设 $I \neq R$ 相矛盾，故 $AI \neq A$。

推论 2：设 R 是有单位元 1 的 α-相容的交换环，α 是环 R 的自同构，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in R[x;\alpha]$，如果存在正整数 $k(0<k<n)$，使得 $a_n(a_n \neq 0),a_{n-1},\cdots,a_{n-k+1}$ 都是幂等元，$(a_n,a_{n-1},\cdots,a_{n-k})=R$，则 $R[x;\alpha]/(f(x))$ 是忠实平坦的右 R-模。

证明：在 $R[x;\alpha,\delta]$ 中，令 $\delta=0$，则有 $R[x;\alpha,\delta] \cong R[x;\alpha]$，故由定理 2 知推论成立。

推论 3：设 R 是有单位元 1 的 δ-相容的交换环，δ 是环 R 的导子，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in R[x;\alpha]$，如果存在正整数 $k(0<k<n)$，使得 $a_n(a_n \neq 0),a_{n-1},\cdots,a_{n-k+1}$ 都是幂等元，$(a_n,a_{n-1},\cdots,a_{n-k})=R$，则 $R[x;\delta]/(f(x))$ 是忠实平坦的右 R-模。

证明：在 $R[x;\alpha,\delta]$ 中，令 $\alpha=1$，则有 $R[x;\alpha,\delta] \cong R[x;\delta]$，故由定理 2 知推论成立。

推论 4：设 R 是有单位元 1 的交换环，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in R[x]$，如果存在正整数 $k(0<k<n)$，使得 $a_n(a_n \neq 0),a_{n-1},\cdots,a_{n-k+1}$ 都是幂等元，$(a_n,a_{n-1},\cdots,a_{n-k})=R$，则 $R[x]/(f(x))$ 是忠实平坦的右 R-模。

证明：在 $R[x;\alpha,\delta]$ 中，令 $\alpha=1$，$\delta=0$，则有 $R[x;\alpha,\delta] \cong R[x]$，故由定理 2 知推论成立。

参考文献

[1] Ouyang, L.Q. and Chen, H.Y. (2010) On Weak Symmetric Rings. *Communications in Algebra*, **38**, 697-713. https://doi.org/10.1080/00927870902828702

[2] Peter, S. and Otmar, V. (2006) On the Codimension of Modules over Skew Power Series Rings with Applications to Iwasawa Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **204**, 349-367. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2005.05.007

[3] Hashemi, E. (2006) Compatible Ideals and Radicals of Ore Extensions. *New York Journal of Mathematics*, **12**, 349-356.

[4] 周伯壎. 同调代数[M]. 北京: 科技出版社, 1983: 144-153.

[5] 杨静化. 关于 R[X]的剩余类环的同调维数[J]. 南京大学数学半年刊, 1998, 15(2): 251-256.