Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(2), 128-138
Published Online February 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.102019

Incompressible Limit of the Two Dimensional Boltzmann Equation

Tingting Gao

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 983299632@qq.com

Received: Jan. 29th, 2020; accepted: Feb. 17th, 2020; published: Feb. 24th, 2020

Abstract

In this paper, we study incompressible Navier-Stokes-Fourier limit of the two dimensional Boltzmann equation. The solution of the Boltzmann equation has no high order regularity in the bounded region, so we use a recent quantitative L^2-L^∞ approach [1] with a new L^4 estimate for the hydrodynamic part, to obtain uniform upper estimation of the linear part of remainder equation, and then obtain the existence of the solution of remainder equation through iteration. Finally, we get existence of the solution of the Boltzmann equation and the convergence limit.

Keywords

Boltzmann Equation, Navier-Stokes-Fourier Equation, Hydrodynamic Limit

二维玻尔兹曼方程的不可压缩极限

高婷婷

华南理工大学，数学学院，广东 广州
Email: 983299632@qq.com

收稿日期：2020年1月29日；录用日期：2020年2月17日；发布日期：2020年2月24日

摘　要

本文拟研究二维空间区域上玻尔兹曼方程的不可压缩**Navier-Stokes-Fourier**极限。由于有界区域上的玻尔兹曼方程的解没有高阶正则性，故本文拟采用最新的**L^2-L^∞**方法[1]并结合解的宏观部分的**L^4**估计，来获取余项方程线性部分的一致上界估计，进而通过迭代方法得到余项方程解的存在性，最后得出原玻尔兹曼方程解的存在性和收敛极限。

文章引用: 高婷婷. 二维玻尔兹曼方程的不可压缩极限[J]. 理论数学, 2020, 10(2): 128-138.
DOI: 10.12677/pm.2020.102019

关键词

玻尔兹曼方程，Navier-Stokes-Fourier方程，流体动力学极限

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文考虑如下玻尔兹曼方程的不可压缩极限：

$$\varepsilon^{-1}\bar{v}\cdot\nabla_x F+\varepsilon\Phi\cdot\nabla_v F=\varepsilon^{-2}Q(F,F),\ (x,v)\in\Omega\times\mathbb{R}^3,$$

$$F(x,v)\big|_{n(x)\cdot\bar{v}<0}=\sqrt{2\pi}\mu\int_{n(x)\cdot\bar{u}>0}F(x,u)\{n(x)\cdot\bar{u}\}\mathrm{d}u,\ \ x\in\partial\Omega, \tag{1}$$

$$Q(F,H)(v)=\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{S}^2}B(v-u,\omega)\big[F(v')H(u')-F(v)H(u)\big]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}u=Q_+(F,H)(v)-Q_-(F,H)(v).$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 上有界区域，$v'=v-[(v-u)\cdot\omega]\omega$，$u'=u+[(v-u)\cdot\omega]\omega$，$v=(v_1,v_2,v_3)=(\bar{v},\hat{v})$，$\bar{v}\in\mathbb{R}^2,\hat{v}\in\mathbb{R}$。定义 $\mu=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|v|^2}{2}}$，$B(V,\omega)=|V\cdot\omega|$。$\Phi(x)=(\Phi_1,\Phi_2,0)$ 表示给定的外力，F 是稀薄气体分子的分布函数，ε 表示气体分子的平均自由程。

文献[2] [3]在一些先验假设下研究了玻尔兹曼方程的不可压缩的Navier-Stokes-Fourier (简称INFS)极限。对于重整化解的收敛极限，完整证明由[4]给出。对于稳态Boltzmann的研究则比较少，正如文献[5]所指出，尽管稳态Navier-Stokes-Fourier方程在应用中很重要，但从稳态Boltzmann推导出稳态Navier-Stokes-Fourier方程一直是一个待解决的重要问题。最近文献[6]通过 L^2-L^∞方法结合 L^6 估计证明了三维稳态玻尔兹曼方程的不可压缩极限。在此基础上我们研究二维稳态玻尔兹曼方程的不可压缩极限。需要指出，相比于三维情形，对于二维稳态玻尔兹曼方程，我们需要 L^2-L^∞方法结合新的 L^4 估计来研究，由此导致了不同估计和困难。

本文主要结果如下：

定理1.1： 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界开集，边界 $\partial\Omega$ 属于 C^3，若 $\Phi\in C^1(\Omega)$，且 $\|\Phi\|_{L^2(\Omega)}\ll 1$，则对于 $0<\varepsilon\ll 1$，(1)存在唯一解 $F=\mu+\varepsilon\sqrt{\mu}f$，$f$满足

$$\bar{v}\cdot\nabla_x f+\varepsilon^2\frac{1}{\sqrt{\mu}}\Phi\cdot\nabla_v\big[\sqrt{\mu}f\big]+\varepsilon^{-1}Lf=\Gamma(f,f)+\varepsilon\Phi\cdot v\sqrt{\mu},\ \text{在}\ \Omega\ \text{上},$$

$$f=P_\gamma f,\ \text{在}\ \gamma_-\ \text{上},$$

并且

$$\|f\|_2+\|Pf\|_4+\varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_\nu+\varepsilon^{-1/2}\big|(1-P_\gamma)f\big|_{2,+}+\varepsilon^{1/2}\|wf\|_\infty\ll 1,$$

其中 $P_\gamma f=\sqrt{2\pi}\sqrt{\mu(v)}\int_{n(x)\cdot u>0}f(u)\sqrt{\mu(u)}\{n(x)\cdot u\}\mathrm{d}u$，$w(v)=\mathrm{e}^{\beta|v|^2}$，$0<\beta\ll 1$。

最后，当 $\varepsilon \to 0$，f在 $L^2(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ 上弱收敛于 $f_1=\left[u\cdot v+\theta\left(|v|^2-5\right)/2\right]\sqrt{\mu}$，而 (p,u,θ) 是具有狄利克雷边界条件以及外力场 Φ 的稳态INFS方程的唯一弱解：

$$\bar{u}\cdot\nabla_x u+\nabla_x p=\sigma\Delta u+\Phi,\ \nabla_x\cdot u=0,\ \text{在 }\Omega\text{ 上},$$

$$\bar{u}\cdot\nabla_x\theta=\kappa\Delta\theta,\ \text{在 }\Omega\text{ 上},$$

$$u(x)=0,\theta(x)=0,\ \text{在 }\partial\Omega\text{ 上，其中 }\bar{u}=(u_1,u_2)\text{。}$$

2. 预备知识和主要引理

首先引进一些基本记号：

我们定义下列范数：$\|\cdot\|_\nu\equiv\left\|\nu^{1/2}\cdot\right\|_2=\left\|\nu^{1/2}\cdot\right\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}^3)}$；$|f|_{p,\pm}=\left|f1_{\gamma_\pm}\right|_p=\left(\int_\gamma\left|f(x,v)1_\pm\right|^p\mathrm{d}\gamma\right)^{\frac{1}{p}}$，$\mathrm{d}\gamma=|n(x)\cdot\bar{v}|\mathrm{d}S(x)\mathrm{d}v$；$\|\cdot\|_\infty$ 表示 $L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ 范数或者 $L^\infty(\Omega)$ 范数；$|\cdot|_\infty$ 表示 $L^\infty(\partial\Omega\times\mathbb{R}^3)$ 范数或者 $L^\infty(\partial\Omega)$ 范数。

$X\lesssim Y$ 等价于 $|X|\lesssim CY$，C 是与 X,Y 无关的常数；定义 $Pf=a\sqrt{\mu}+v\cdot b\sqrt{\mu}+c\dfrac{|v|^2-3}{2}\sqrt{\mu}$。

定义 2.1： 记 $\Omega\times\mathbb{R}^3$ 的边界为 $\gamma=\partial\Omega\times\mathbb{R}^3$，我们将 γ 分为以下三种情况：

$$\gamma_+=\left\{(x,v)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}^3:n(x)\cdot v>0\right\},$$

$$\gamma_-=\left\{(x,v)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}^3:n(x)\cdot v<0\right\},$$

$$\gamma_0=\left\{(x,v)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}^3:n(x)\cdot v=0\right\}.$$

定义 2.2： 设 (t,x,v) 是任意一点，且 $(x,v)\notin\gamma_0$，令 $(t_0,x_0,\bar{v}_0)=(t,x,\bar{v})$，我们有如下定义：

$$(t_{k+1},x_{k+1},\bar{v}_{k+1})=\left(t_k-t_b(x_k,v_k),x_b(x_k,\bar{v}_k),\bar{v}_{k+1}\right),$$

$$X_{cl}(s;t,x,\bar{v})=\sum_k 1_{[t_{k+1},t_k)}(s)\left\{x_k+(s-t_k)\bar{v}_k\right\},$$

其中，对于 $(x,v)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^3$，$t_b(x,v)=\inf\{t>0:x-t\bar{v}\notin\Omega\}$，$x_b(x,v)=x-t_b(x,v)\bar{v}\notin\Omega$。

引理 2.3： 假设 $\Phi\in L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^3)$，存在 $g\in L^2(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ 使得

$$\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}g(x,v)\sqrt{\mu}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}v=0,\tag{2}$$

且 f 是下述方程在分布意义下的解：

$$\left[\lambda+(1-\tau)\varepsilon^{-1}\nu-\frac{1}{2}\varepsilon^2\Phi\cdot v\right]f+\bar{v}\cdot\nabla_x f+\varepsilon^2\Phi\cdot\nabla_v f+\varepsilon^{-1}\tau Lf=g,\ \text{在 }\Omega\times\mathbb{R}^3\text{ 上},\tag{3}$$

$$f_-=P_\gamma f,\ \text{在 }\gamma_-\text{ 上},$$

则对足够小的 $\lambda\geq 0$ 以及趋于 1 的 $\tau\in[0,1]$，

$$\left\|P\mathring{f}\right\|_2\lesssim\varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_\nu+\left|(1-P_\gamma)f\right|_{2,+}+\left\|\frac{g}{\sqrt{\nu}}\right\|_2+o(1)|\langle f\rangle|,\tag{4}$$

$$\text{且 }\lambda|\langle f\rangle|<(1-\tau)\varepsilon^{-1}\|f\|_2,\tag{5}$$

$$\left\|P\mathring{f}\right\|_4\lesssim\varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_\nu+\left|(1-P_\gamma)f\right|_{2,+}+\left\|\frac{g}{\sqrt{\nu}}\right\|_2+o(1)\left(|\langle f\rangle|+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|wf\|_\infty\right),\tag{6}$$

其中 $\mathring{f}=f-\langle f\rangle\sqrt{\mu}$，$\langle f\rangle=\left(\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3} f\sqrt{\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)\Big/\left(\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\sqrt{\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right)$。

证明：(4)，(5)的证明见参考文献[6]，下面证明(6)。

令 $\bar{\omega}_\tau=\lambda+(1-\tau)\varepsilon^{-1}\nu-\frac{1}{2}\varepsilon^2\Phi\cdot v$，根据格林公式(见参考文献[6])，得

$$\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\left\{\bar{v}\cdot\nabla_x f+\varepsilon^2\Phi\cdot\nabla_v f\right\}\psi+\left\{\bar{v}\cdot\nabla_x\psi+\varepsilon^2\Phi\cdot\nabla_v\psi\right\}f=\int_{\gamma^+}f\psi-\int_{\gamma^-}f\psi .$$

结合上式以及 $LPf=0$，由(3)得到

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\bar{\omega}_\tau f\psi-\bar{v}\cdot f\nabla_x\psi-\varepsilon^2 f\Phi\cdot\nabla_v\psi+\int_{\gamma^+}f\psi-\int_{\gamma^-}f\psi\\&=-\varepsilon^{-1}\tau\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\psi L(I-P)f+\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\psi g\end{aligned}. \tag{7}$$

令 $a-\langle f\rangle=\mathring{a}$，则 $P\mathring{f}=\left(\mathring{a}+v\cdot b+c\frac{|v|^2-3}{2}\right)\sqrt{\mu}$，分以下三步证明。

第一步 估计 c，对于足够小的 $\varepsilon>0$，我们将证明如下结论：

$$\|c\|_4\lesssim o(1)\|Pf\|_4+\varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_\nu+\|(1-P)f\|_4+\left|(1-P_\gamma)f\right|_{2,+}+\left\|\frac{g}{\sqrt{\nu}}\right\|_2 . \tag{8}$$

这里择测试函数 $\psi=\psi_{c,4}\equiv\left(|v|-\beta_c\right)\sqrt{\mu}\bar{v}\cdot\nabla_x\varphi_{c,4}(x)$，其中 $-\Delta_x\varphi_{c,4}(x)=c^3(x)$，$\varphi_{c,4}|_{\partial\Omega}=0$，$\beta_c$ 是一待定常数。

估计(7)的右边需要下列 Sobolev-Gagliardo-Nirenberg 不等式：

对于 $1\le p\le N$ 和有界 $\mathbb{C}^1$ 区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$，若 $u\in W^{1,p}(\Omega)$，则对任意的 $p\le p^*=\frac{Np}{N-p}$，有 $\left(\int_\Omega|u|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\le C(N,P,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$，并且 $W^{1,p}(\Omega)$ 连续嵌入 $L^{p^*}(\Omega)$ (见文献[7])。

当 $N=2$ 时，我们想要 $p^*=2$，所以由 $\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$，得 $p\ge1$，这里我们取 $p=\frac{4}{3}$，则对于任意的 $q\in\left[\frac{4}{3},2\right]$，

$$\left\|\nabla\varphi_{c,4}\right\|_q\lesssim\left\|\nabla\varphi_{c,4}\right\|_{W^{2,\frac{4}{3}}},$$

因此由标准椭圆估计(见参考文献[8])，得到

$$\left\|\nabla\varphi_{c,4}\right\|_2\lesssim\left\|\varphi_{c,4}\right\|_{W^{2,\frac{4}{3}}}\lesssim\left\|c^3\right\|_{\frac{4}{3}}=\|c\|_4^3, \tag{9}$$

那么

$$(7)\text{的右边}\lesssim\|c\|_4^3\left(\varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_\nu+\left\|\frac{g}{\sqrt{\nu}}\right\|_2\right)。 \tag{10}$$

将 $\psi=\psi_{c,4}=\left(|v|^2-\beta_c\right)\sqrt{u}\bar{v}\cdot\nabla_x\varphi_{c,4}$ 代入(7)，则(7)的左边可以写成如下形式：

$$\iint_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^3}(n(x)\cdot\bar{v})\left(|v|^2-\beta_c\right)\sqrt{\mu}\sum_{i=1}^{2}v_i\partial_i\varphi_{c,4}(x)f\mathrm{d}S_x\mathrm{d}v \tag{11}$$

$$+\int_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\left[\lambda+(1-\tau)\varepsilon^{-1}v\right]f\left(|v|^2-\beta_c\right)\sqrt{\mu}\sum_{i=1}^{2}v_i\partial\varphi_{c,4}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}v \tag{12}$$

$$-\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\left(|v|^2-\beta_c\right)\sqrt{\mu}\left\{\sum_{i,j=1}^{2}v_iv_j\partial_{ij}\varphi_{c,4}(x)\right\}f\mathrm{d}x\mathrm{d}v \tag{13}$$

$$-\varepsilon^2\sum_{i,j}\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\sqrt{\mu}\Phi_i\left\{v_iv_j\left(|v|^2-\beta_c\right)\partial_j\varphi_{c,4}(x)+\left[\delta_{i,j}\left(|v|^2-\beta_c\right)+2v_iv_j\right]\partial_j\varphi_{c,4}(x)\right\}f. \tag{14}$$

我们对每一项进行估计。

对 f 进行分解得到：

$$f=\left(a+v\cdot b+c\frac{|v|^2-3}{2}\right)\sqrt{\mu}+(I-P)f\text{，在 }\Omega\times\mathbb{R}^3\text{ 上，} \tag{15}$$

$$f_\gamma=P_\gamma f+1_{\gamma^+}\left(1-P_\gamma\right)f\text{，在 }\gamma\text{ 上。} \tag{16}$$

取 $\beta_c=5$ 使得 $\int_{\mathbb{R}^3}\left(|v|^2-\beta_c\right)v_i^2u(v)\mathrm{d}v=0,i=1,2$，则由奇函数性质，(13)表达式变成如下形式：

$$(13)=-\sum_{i=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|v|^2-5\right)v_i^2\frac{|v|^2-3}{2}\mu(v)\mathrm{d}v\int_\Omega\partial_{ii}\varphi_{c,4}(x)c(x)\mathrm{d}x \tag{17}$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\left(|v|^2-5\right)v_i\sqrt{\mu}(\bar{v}\cdot\nabla_x)\partial_i\varphi_{c,4}(I-P)f. \tag{18}$$

计算可得 $\int_{\mathbb{R}^3}\left(|v|^2-\beta_c\right)v_i^2\frac{|v|^2-3}{2}\mu(v)\mathrm{d}v=5$，则由 $-\Delta_x\varphi_{c,4}=c^3$ 得

$$(17)=-5\int_\Omega\Delta_x\varphi_{c,4}c=5\|c\|_4^4. \tag{19}$$

$$(18)\le\left\|\nabla^2\varphi_{c,2}\right\|_{\frac{4}{3}}\|(I-P)f\|_4\le\|c\|_4^3\|(I-P)f\|_4. \tag{20}$$

当 $\beta_c=5$ 时，由 $(v_iv_j(i\ne j))$ 的奇性可得

$$\iint_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^3}(n(x)\cdot\bar{v})\left(|v|^2-\beta_c\right)\sqrt{\mu}\sum_{i=1}^{2}v_i\partial_i\varphi_{c,4}(x)P_\gamma f\mathrm{d}S_x\mathrm{d}v=0.$$

且当 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 上的 C^1 区域时，我们有下述估计

$$\left(\int_{\partial\Omega}\mathrm{d}S(x)|u|^{\frac{p(N-1)}{N-p}}\right)^{\frac{N-p}{p(N-1)}}\le C(N,p)\left(\int_\Omega\mathrm{d}x|u|^p+\int_\Omega\mathrm{d}x|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

当 $p=\frac{4}{3}$ 且 $N=2$ 时，$\frac{p(N-1)}{N-p}=2$。

令 $u=\nabla\varphi_{c,4}$，由(9)得 $\left\|\nabla_x\varphi_{c,4}\right\|_{L^{\frac{2}{3}}(\partial\Omega)}\lesssim\left\|\nabla_x\varphi_{c,4}\right\|_{W^{1,\frac{4}{3}}(\Omega)}\lesssim\|c\|_4^3$，所以

$$(11)\lesssim\mu^{\frac{1}{2}}\left|\left(1-P_\gamma\right)f\right|_{2,+}\left|\nabla_x\varphi_{c,4}\right|_{2,+}\lesssim\left|\left(1-P_\gamma\right)f\right|_{2,+}\|c\|_4^3. \tag{21}$$

由(9)以及 Holder 不等式可得

$$(12)\lesssim(\lambda+o(1))\times\left\{\|Pf\|_4+\|(I-P)f\|_4\right\}\|c\|_4^3, \tag{22}$$

其中，我们令 $\tau = 1 + o(1)\varepsilon$ 。

最后，将(15)代入(14)，通过计算以及奇函数性质可得

$$(14) \le \varepsilon^2 \left[\|c\|_4^4 + \|c\|_4^3 \|(I-P)f\|_4 \right] \|\Phi\|_\infty . \tag{23}$$

由(10)，(19)，(20)，(21)，(22)，(23)得

$$\|c\|_4 \lesssim o(1)\|Pf\|_4 + \left|(I-P_\gamma)f\right|_{2,+} + \varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_\nu + \|(I-P)f\|_4 + \left\|\frac{g}{\sqrt{\nu}}\right\|_2 .$$

第三步 估计 b。我们将得到，对足够小的 $\varepsilon > 0$，有

$$\|b\|_4 \lesssim o(1)\|Pf\|_4 + \left|(I-P_\gamma)f\right|_{2,+} + \varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_\nu + \|(I-P)f\|_4 + \left\|\frac{g}{\sqrt{\nu}}\right\|_2 . \tag{24}$$

我们通过估计 $\left(\partial_i\partial_j\Delta^{-1}b_j^3\right)b_i\,(i,j=1,2)$ 和 $\left(\partial_j\partial_j\Delta^{-1}b_i^3\right)b_i\,(i\ne j)$ 来估计 b。

对固定 i,j，为了估计 $\left(\partial_i\partial_j\Delta^{-1}b_j^3\right)b_i$，我们选择测试函数

$$\psi = \psi_{b,4}^{i,j} \equiv \left(v_i^2 - \beta_b\right)\sqrt{\mu}\,\partial_j\varphi_{b,4}^j,\ i,j = 1,2 , \tag{25}$$

其中 β_b 是一个待定常数且 $-\Delta_x\varphi_{b,4}^j(x) = b_j^3(x), \varphi_{b,4}^j\big|_{\partial\Omega} = 0$ 。

与前面类似，将测试函数(25)代入(7)右边得

$$(7)\text{右边} \le \|b\|_4^3 \left(\varepsilon^{-1}\|(I-P)\|_\nu + \left\|\frac{g}{\sqrt{\nu}}\right\|_2 \right)。 \tag{26}$$

下面我们将(15)和(16)代入(7)左边，通过计算化简得到

$$\iint_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^3} \left(n(x)\cdot\overline{v}\right)\left(v_i^2-\beta_b\right)\sqrt{\mu}\,\partial_j\varphi_{b,4}^j\left[\left(1-P_\gamma\right)f\right]\mathbf{1}_{\gamma_+} \tag{27}$$

$$+\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3} \left[\lambda + (1-\tau)\varepsilon^{-1}\nu\right] f\left(v_i^2-\beta_b\right)\sqrt{\mu}\,\partial_j\varphi_{b,4}^j \tag{28}$$

$$+\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3} \left(v_i^2-\beta_b\right)\sqrt{\mu}\left\{\sum_l v_l\partial_{lj}\varphi_{b,4}^j\right\} f \tag{29}$$

$$-\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3} \varepsilon^2\sqrt{\mu} f\left[\Phi\cdot v\left(v_i^2-\beta_b\right)\partial_j\varphi_{b,4}^j + 2\Phi_i v_i\right]\partial_j\varphi_{b,4}^j \tag{30}$$

与前面类似，

$$(27) \lesssim \left|(I-P_\gamma)f\right|_{2,+}\left|\nabla_x\varphi_{b,4}\right|_{2,+} \le \left|(I-P_\gamma)f\right|_{2,+}\|b\|_4^3 . \tag{31}$$

$$(28) \lesssim \left(\lambda + o(1)\right)\left(\|Pf\|_4 + \|(I-P)f\|_4\right)\|b\|_4^3 . \tag{32}$$

将(15)代入(29)，由函数的奇性得

$$(29) = -\sum_{i=1,2}\left[\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\left(v_i^2-\beta_b\right)v_l^2\mu\partial_{lj}\varphi_{b,4}^j(x)b_l + \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\left(v_i^2-\beta_b\right)v_l\sqrt{\mu}\,\partial_{lj}\varphi_{b,4}^j(x)(I-P)f\right]. \tag{33}$$

选择 $\beta_b > 0$ 使得对 $i = 1,2$， $\int_{\mathbb{R}^3}\left(v_i^2-\beta_b\right)\mu(v)\mathrm{d}v = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}}\left(v_1^2-\beta_b\right)\mathrm{e}^{-\frac{|v_1|^2}{2}}\mathrm{d}v_1 = 0$ ，计算得

$$(33)\text{中第一项} = 2\int_\Omega\left(\partial_i\partial_j\Delta^{-1}b_j^3(x)\right)b_i , \tag{34}$$

$$(33)\text{中第二项} \lesssim \left\|\nabla^2\varphi_{b,4}\right\|_{\frac{4}{3}} \cdot \left\|(I-P)f\right\|_4 \le \|b\|_4^3 \cdot \left\|(I-P)f\right\|_4 \text{。} \tag{35}$$

$$(30) \lesssim \varepsilon^2 \|\Phi\|_\infty \left(\|b\|_4^4 + \|b\|_4^3 \cdot \left\|(I-P)f\right\|_4^4\right). \tag{36}$$

由(26)，(31)，(32)，(34)，(35)，(36)得，对足够小的 ε，

$$\left|\int_\Omega \left(\partial_i\partial_j\Delta^{-1}b_j^3\right)b_i\right| \lesssim \|b\|_4^3\left(\varepsilon^{-1}\left\|(I-P)f\right\|_\nu + \left\|\frac{g}{\sqrt{\nu}}\right\|_2 + \left|\left(I-P_\gamma\right)f\right|_{2,+} + o(1)\|Pf\|_4\right). \tag{37}$$

下面估计 $\partial_j\left(\partial_j\Delta^{-1}b_i^3\right)b_i,(i\ne j)$，选择 $\psi = |v|^2 v_i v_j\sqrt{\mu}\partial_j\varphi_{b,4}^j(x), i\ne j$。与(26)类似，

$(7)\text{右边} \lesssim \|b\|_4^3\left(\varepsilon^{-1}\left\|(I-P)f\right\|_\nu + \left\|\frac{g}{\sqrt{\nu}}\right\|_2\right)$。

同样地，将(15)，(16)代入(7)左边，由奇函数性质可知

$$\begin{aligned} -\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3} \overline{v}\cdot\nabla_x\psi f &= -\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3} |v|^2 v_i v_j\sqrt{\mu}\left\{\sum_{l=1}^2 v_l\partial_{lj}\varphi_{b,4}^i\right\}f \\ &= -\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3} |v|^2 v_i^2 v_j^2\mu\left[\partial_{ij}\varphi_{b,4}^i b_j + \partial_{jj}\varphi_{b,4}^i b_j\right] \\ &\quad -\sum_{l=1}^2\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3} |v|^2 v_i v_j v_l\sqrt{\mu}\partial_{lj}\varphi_{b,4}^i(x)(I-P)f \end{aligned}. \tag{38}$$

$(38)\text{中第一项} = -4\left[\int_\Omega\left(\partial_i\partial_j\Delta^{-1}b_i^3\right)b_j + \left(\partial_j\partial_j\Delta^{-1}b_i^3\right)b_i\right]$。

其余项估计与前面类似，所以我们得到 $\left(\partial_j\partial_j\Delta^{-1}b_i^3\right)b_i$ 的估计，结合(37)得到(24)。

第四步 估计 a，我们将证明对于足够小的 ε，

$$\begin{aligned} \left\|\mathring{a}\right\|_4 &\lesssim o(1)\|Pf\|_4 + \left\|(I-P)f\right\|_4 + \varepsilon^{-1}\left\|(I-P)f\right\|_2 \\ &\quad + \left|\left(I-P_\gamma\right)f\right|_{2,+}^2 + \left\|\frac{g}{\sqrt{\nu}}\right\|_2 + o(1)\left|\langle f\rangle\right| \end{aligned}. \tag{39}$$

这里选择测试函数 $\psi = \psi_{a,4} \equiv \left(|v|^2-\beta_b\right)\overline{v}\cdot\nabla_x\varphi_{a,4}\sqrt{u} = \sum_{i=1}^2\left(|v|^2-\beta_b\right)v_i\partial_i\varphi_{a,4}\sqrt{u}$，

其中 $-\Delta_x\varphi_{a,4}(x) = \mathring{a}^3(x) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \mathring{a}^3(x)$，$\left.\frac{\partial}{\partial n}\varphi_{a,4}\right|_{\partial\Omega} = 0, \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\varphi_{a,4} = 0$。

选择 $\beta_a = 10$，使得 $\int_{\mathbb{R}^3}\left(|v|^2-\beta_a\right)\frac{|v|^2-3}{2}v_i^2\mu(v)\mathrm{d}v = 0$，则将 ψ_a 代入(7)右边得

$$(7)\text{右边} \lesssim \left\|\mathring{a}\right\|_4^3\left(\varepsilon^{-1}\left\|(I-P)f\right\|_\nu + \left\|\frac{g}{\sqrt{\nu}}\right\|_2\right)\text{。}$$

将(15)，(16)代入(7)左边，包含 b,c 的项积分为 0。对 a 的估计，处理方法同 b,c，只需验证：

$$\begin{aligned} &\sum_{i,l=1}^2\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\left(|v|^2-\beta_a\right)v_i v_l\partial_{il}\varphi_{a,k}(x)a(x)\mu(v) \\ &= \sum_{i=1}^2\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\left(|v|^2-\beta_a\right)(v_i)^2\mu\left(\partial_{ii}\varphi_{a,4}\right)\mathring{a} \\ &= \sum_{i=1}^2\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\left(|v|^2-\beta_a\right)(v_i)^2\mu\left(\mathring{a}^3 - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\mathring{a}^3\right)\mathring{a} = -5\left\|\mathring{a}\right\|_4^4 \end{aligned}.$$

因为

$$\|(I-P)f\|_4^4 \lesssim \left[\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|(I-P)f\|_2^2\right]\left[\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|(I-P)f\|_\infty^2\right] \lesssim C_\eta\left[\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|(I-P)f\|_2\right]^4 + \eta\left[\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|wf\|_\infty\right]^4,$$

所以 $\|(I-P)f\|_4 \lesssim \varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_v + o(1)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|wf\|_\infty$，

从而(6)成立。证毕。

引理 2.4： 令 f 满足 $\left[\overline{v}\cdot\nabla_x + \varepsilon^2\Phi\cdot\nabla_v + \varepsilon^{-1}C_0\langle v\rangle + \lambda\right]|f| \le \varepsilon^{-1}K_\beta|f| + |g|$，

$$|f|_{\gamma^-} \le P_\gamma|f|,$$

其中 $\langle v\rangle = \sqrt{1+v^2}$，$\lambda \ge 0$。对于 $0<\beta<\frac{1}{4}$，$K_\beta|f| = \int_{\mathbb{R}^3} k_\beta(v,u)|f(u)|\mathrm{d}u$，

$$k_\beta(v,u) := \left\{|v-u| + |v-u|^{-1}\right\}\exp\left[-\beta|v-u|^2 - \beta\frac{\left[|v|^2-|u|^2\right]^2}{|v-u|^2}\right].$$

如果 $Pf \in L^4(\Omega\times\mathbb{R}^3)$，$(I-P)f \in L^2(\Omega\times\mathbb{R}^3)$，那么，对于 $w(v) = \mathrm{e}^{\beta'|v|^2}$，$0<\beta' \ll \beta$，

$$\varepsilon^{1/2}\|wf\|_\infty \lesssim \varepsilon^{3/2}\left\|\langle v\rangle^{-1} wg\right\|_\infty + \|Pf\|_{L^4(\Omega\times\mathbb{R}^3)} + \varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}^3)}. \tag{40}$$

证明： 要证明引理 2.4，只需要证明

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon^{1/2}h(x,v)\right| \le& \left[CT_0^{5/4}\left\{\frac{4}{5}\right\}^{C_2T_0^{5/4}} + o(1)C_{T_0}\right]\left\|\varepsilon^{1/2}h\right\|_\infty + C_{T_0}\varepsilon^{3/2}\left\|\langle v\rangle^{-1} wg\right\|_\infty \\ &+ C_{T_0}\left[\|Pf\|_{L^4(\Omega\times\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{\varepsilon}\|(I-P)f\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}^3)}\right]\end{aligned}. \tag{41}$$

二维区域上的变量替换 $v \mapsto y = X(s';s,X_{cl}(s;t,x,\overline{v}),\overline{v}')$，对于 $\max\{0,t_1'\} \le s' \le s-\kappa\varepsilon \le T_0$，

$$X = x(s) + \overline{v}(s'-s) + \varepsilon^2\int_t^s \mathrm{d}\tau'\int_s^{\tau'}\mathrm{d}\tau''\Phi(x(\tau'')).$$

由计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_i(s';s)}{\partial v_j'} &= -(s-s')\delta_{ij} + \int_s^{s'}\mathrm{d}\tau'\int_s^{\tau'}\mathrm{d}\tau''\sum_m \partial_m\Phi_i(X(\tau'';s))\frac{\partial X_m}{\partial v_j'}(\tau'';s) \\ &= -(s-s')\left[\delta_{ij} + O(\varepsilon^2)\|\Phi\|_{C^1} T_0^2\mathrm{e}^{C_\Phi T_0}\right]\end{aligned}.$$

由下界 $|s-s'| \ge \kappa\varepsilon$，得 $\left|\det\nabla_{v'}X(s';s)\right| = |s-s'|^2\det\left(\delta_{ij} + O(\varepsilon^2)\|\Phi\|_{C^1}T_0^2\mathrm{e}^{C_\Phi T_0}\right) \gtrsim \kappa^2\varepsilon^2$。

对于二维区域，由参考文献[6]可知，要证明(41)只需证明下面两个不等式，其他计算同三维。

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{1/2}\int_{v'}\int_u\left|Pf\left(X_{\mathrm{cl}}(s';s,X_{\mathrm{cl}}(s;t,x,\overline{v}'),\overline{u})\right)\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v' \\ &\lesssim_m \varepsilon^{1/2}\left[\int_{v'}\left|Pf\left(X_{\mathrm{cl}}(s';s,X_{\mathrm{cl}}(s;t,x,\overline{v}'),\overline{u})\right)\right|^4\mathrm{d}v'\right]^{\frac{1}{4}} \\ &\lesssim_m \varepsilon^{1/2}\left[\int_{\Omega\times\mathbb{R}^3}|Pf(y,u)|^4\frac{1}{k^2\varepsilon^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{4}} \\ &\lesssim_m \|Pf\|_{L^4(\Omega\times\mathbb{R}^3)}\end{aligned},$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{1/2}\int_{v'}\int_{u}\left|(I-P)f\left(X_{\mathrm{cl}}\left(s';s,X_{\mathrm{cl}}\left(s;t,x,\overline{v}'\right),\overline{u}\right)\right)\right|dudv' \\
&\lesssim_m \varepsilon^{1/2}\left[\iint\left|(I-P)f\left(X_{\mathrm{cl}}\left(s';s,X_{\mathrm{cl}}\left(s;t,x,\overline{v}\right),\overline{v}'\right),u\right)\right|^2 \mathrm{d}v'\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim_m \varepsilon^{1/2}\left[\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\left|(I-P)f(y,u)\right|^2\frac{1}{\kappa^2\varepsilon^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}u\right]^{1/2} \\
&\lesssim_m \frac{1}{\varepsilon}\left\|(I-P)f\right\|_{L^2\left(\Omega\times\mathbb{R}^3\right)}
\end{aligned}
.
$$

结论成立。证毕。

引理 2.5： 假设(2)仍然成立，则对于充分小的 $\varepsilon>0$，下式存在唯一的解，

$$\overline{v}\cdot\nabla_x f+\varepsilon^2\frac{1}{\sqrt{\mu}}\Phi\cdot\nabla_v\left[\sqrt{\mu}f\right]+\varepsilon^{-1}Lf=g\text{，在 }\Omega\times\mathbb{R}^3\text{ 上，}$$

$$f|_{\gamma^-}=P_\gamma f\,,$$

并且

$$\|Pf\|_2+\varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_v+\varepsilon^{-1/2}\left|(1-P_\gamma)f\right|_{2,+}+|f|_2\lesssim\varepsilon^{-1}\left\|v^{-1/2}(I-P)g\right\|_2+\varepsilon^{-1}\|Pg\|_2\,, \tag{42}$$

$$\|Pf\|_4\lesssim\varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_v+\left|(1-P_\gamma)f\right|_{2,+}+\left\|\frac{g}{\sqrt{v}}\right\|_2+o(1)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|wf\|_\infty\,. \tag{43}$$

证明：(42)的证明见参考文献[6]。$|\langle f\rangle|=0$，所以(43)可由引理 2.3 的(6)得到。

3. 定理 1.1 的证明

本节将给出定理 1.1 的证明。为此，我们定义一个范数：

$$[\![f]\!]:=\varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_v+\varepsilon^{-1/2}\left|(1-P_\gamma)f\right|_2+|f|_{2,-}+\|Pf\|_4+\varepsilon^{1/2}\|wf\|_\infty\,.$$

我们有如下结论。

定理 3.1： 假设 $\Phi\in L^\infty,g\in L^2\left(\Omega\times\mathbb{R}^3\right)$ 使得

$$\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}g(x,v)\sqrt{\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}v=0\,,$$

则对于足够小的 $\varepsilon>0$，下式存在唯一解

$$\overline{v}\cdot\nabla_x f+\varepsilon^2\frac{1}{\sqrt{\mu}}\Phi\cdot\nabla_v\left[\sqrt{\mu}f\right]+\varepsilon^{-1}Lf=g,f|_{\gamma^-}=P_\gamma f\,,$$

且有

$$\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}f(x,v)\sqrt{\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}v=0\,,$$

$$[\![f]\!]\lesssim\varepsilon^{-1}\left\|v^{-1/2}(I-P)g\right\|_2+\varepsilon^{-1}\|Pg\|_2+\varepsilon^{1/2}\|wf\|_\infty+\varepsilon^{3/2}\left\|\langle v\rangle^{-1}wg\right\|_\infty\,. \tag{44}$$

证明：根据引理 2.5，要证定理 3.1，只需要证明(44)。首先用引理 2.4 中的(40)估计(43)中的 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|wf\|_\infty$，得到对于足够小的 ε，有

$$\|Pf\|_4\lesssim\varepsilon^{-1}\|(I-P)f\|_v+\left|(1-P_\gamma)f\right|_{2,+}+\left\|\frac{g}{\sqrt{v}}\right\|_2+o(1)\varepsilon^{3/2}\left\|\langle v\rangle^{-1}wg\right\|_\infty\,. \tag{45}$$

由(40)，(42)，(45)可以得到(44)。

引理 3.2： 对于 $w=\mathrm{e}^{\beta|v|^2}$， $0<\beta\ll 1$，我们有

$$\begin{aligned}\left\|v^{-1/2}\Gamma_{\pm}(f,g)\right\|_{L^2_{x,v}} \lesssim \varepsilon^{1/2}\Big\{&\varepsilon^{1/2}\|wg\|_{\infty}\Big[\varepsilon^{-1}\left\|v^{1/2}(I-P)f\right\|_{L^2_{x,v}}\Big] \\ &+\varepsilon^{1/2}\|wf\|_{\infty}\Big[\varepsilon^{-1}\left\|v^{1/2}(I-P)g\right\|_{L^2_{x,v}}\Big]\Big\}+\|Pf\|_{L^4_{x,v}}\|Pg\|_{L^2_{x,v}}\end{aligned}, \tag{46}$$

其中 $\Gamma_{\pm}(f,g)=\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}\Big[Q_{\pm}\big(\sqrt{\mu}f,\sqrt{\mu}g\big),Q_{\pm}\big(\sqrt{\mu}g,\sqrt{\mu}f\big)\Big]$。

证明： 由参考文献[6]可以得到

$$\begin{aligned}&\left\|v^{-1/2}\Gamma_{\pm}(f,g)\right\|_{L^2_{x,v}} \\ &\lesssim\left\|v^{-1/2}\Gamma_{\pm}\big(|(I-P)f|,|g|\big)\right\|_{L^2_{x,v}}+\left\|v^{-1/2}\Gamma_{\pm}\big(|f|,|(I-P)g|\big)\right\|_{L^2_{x,v}} \\ &\quad+\left\|v^{-1/2}\Gamma_{\pm}\big(|Pf|,|Pg|\big)\right\|_{L^2_{x,v}}\end{aligned}.$$

要证明(46)，只需要估计最后一项，其余证明同参考文献[6]。

由 Pf 关于 v 的强衰减性，可以得到，对于任意的 $1\le p\le\infty$，$\left\|\dfrac{1}{\mu^{0+}}|Pf(x,v)|\right\|_{L^\infty_v}\lesssim\|Pf(x)\|_{L^p_v}$，其中 μ^{0+} 表示 μ^{δ}， $0<\delta\ll 1$。对于固定 v，由 $\left\|v^{-1/2}\Gamma\big(\mu^{0+},\mu^{0+}\big)\right\|_{L^0_v}<\infty$，我们有

$$\begin{aligned}&\left\|v^{-1/2}\Gamma_{\pm}(Pf,Pg)\right\|_{L^2_{x,v}} \\ &\lesssim\left\|v^{-1/2}\Gamma\big(\mu^{0+},\mu^{0+}\big)\right\|_{L^2_v}\Big\|\|Pf(\cdot)\|_{L^4_v}\|Pg(\cdot)\|_{L^2_v}\Big\|_{L^2_x} \\ &\lesssim\|Pf\|_{L^4_{x,v}}\|Pg\|_{L^2_{x,v}}\end{aligned}.$$

由此可以得到(46)。证毕。

定理 1.1 的证明： 根据上述结果，按照文献[1]的推导可得 f 的存在唯一性，并且它的弱极限点 $f_1=\Big[u\cdot v+\theta\big(|v|^2-5\big)/2\Big]\sqrt{\mu}$ 的系数 (p,u,θ) 满足 INSF 方程和边界。由于 $F=\mu+\varepsilon\sqrt{\mu}f$，$F$ 的存在唯一性可以直接得到。证毕。

参考文献

[1] Guo, Y. (2010) Decay and Continuity of the Boltzmann Equation in Bounded Domains. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **197**, 713-809. https://doi.org/10.1007/s00205-009-0285-y

[2] Bardos, C., Golse, F. and Levermore, D. (1991) Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations I: Formal Derivations. *Journal of Statistical Physics*, **63**, 323-344. https://doi.org/10.1007/BF01026608

[3] Bardos, C., Golse, F. and Levermore, D. (1993) Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations II: Convergence Proofs for the Boltzmann Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **46**, 667-753. https://doi.org/10.1002/cpa.3160460503

[4] Golse, F. and Saint-Raymond, L. (2004) The Navier-Stokes Limit of the Boltzmann Equation for Bounded Collision Kernels. *Inventiones Mathematicae*, **155**, 81-161. https://doi.org/10.1007/s00222-003-0316-5

[5] Golse, F. (2005) Hydrodynamic Limits. European Congress of Mathematics. Eur. Math. Soc, 699-717. https://doi.org/10.4171/009-1/44

[6] Esposito, R., Guo, Y., Kim, C. and Marra, R. (2018) Stationary Solutions to the Boltzmann Equation in the Hydrodynamic Limit. *Annals of PDE*, **4**, 1-55. https://doi.org/10.1007/s40818-017-0037-5

[7] Leoni, G. (2009) A First Course in Sobolev Spaces. *AMS Graduate Studies in Mathematics*, **105**. https://doi.org/10.1090/gsm/105

[8] Krylov, N.V. (2008) Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. *AMS Graduate Studies in Mathematics*, **96**. https://doi.org/10.1090/gsm/096