Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(3), 150-161
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.103022

Hans汉斯

Existence and Uniqueness of Positive Solutions for Singular Fractional Differential Equation with Nonlocal Boundary Conditions

Xuexue Huo, Li Sun*, Shihao Yan, Xuan Zhou, Guangwa Wang

School of Mathematics and Statistics, Jiangsu Normal University, Xuzhou Jiangsu
Email: *slwgw-7653@163.com

Received: Feb. 4th, 2020; accepted: Feb. 24th, 2020; published: Mar. 2nd, 2020

Abstract

In this paper, we mainly study a class of singular fractional order differential equations with nonlocal boundary conditions. Firstly, the properties of the Green function are discussed. Then, under some appropriate assumptions, by using the Banach contraction mapping principle and the Krasnoselskii Fixed Point theorem, the existence and uniqueness of positive solutions for the singular boundary value problems are obtained. An example is given to illustrate the feasibility of the main results.

Keywords

Singular Fractional Differential Equation, Nonlocal Boundary Condition, Fixed Point Theorem, Positive Solution, Existence, Uniqueness

具非局部边界条件的奇异分数阶微分方程正解的存在性和唯一性

霍雪雪，孙　莉*，闫士浩，周　旋，王广瓦

江苏师范大学数学与统计学院，江苏　徐州
Email: *slwgw-7653@163.com

收稿日期：2020年2月4日；录用日期：2020年2月24日；发布日期：2020年3月2日

*通讯作者。

文章引用: 霍雪雪, 孙莉, 闫士浩, 周旋, 王广瓦. 具非局部边界条件的奇异分数阶微分方程正解的存在性和唯一性[J]. 理论数学, 2020, 10(3): 150-161. DOI: 10.12677/pm.2020.103022

摘　要

本文研究了一类具非局部边界条件的奇异分数阶微分方程。先构造Green函数，并讨论相关性质，然后在一定条件下，借助Banach压缩映射原理和Krasnoselskii不动点定理，得到边值问题正解的存在性和唯一性。最后列举一个实例说明主要结果的可行性。

关键词

奇异分数阶微分方程，非局部边界条件，不动点定理，正解，存在性，唯一性

1. 引言

随着分数阶微分方程在物理、化学、工程、生物科学等领域的应用不断推广，国内外各界学者开始广泛关注分数阶微分方程[1] [2] [3] [4] [5]；近几年，越来越多的学者利用各种不动点定理及其它工具，研究了带有各种边值条件的分数阶微分方程解的存在性与唯一性，取得了很多重要的成果[6] [7] [8] [9]。但有关奇异分数阶微分方程边值问题的研究并不太多。文献[10]运用混合单调算子方法和半序集合上的不动点定理证明了奇异 Caputo 型分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}u(t)=\lambda f\left(t,u(t)\right),\ 0<t<1,\ \lambda>0, \\ a_1u(0)-b_1u'(0)=0,\ a_2u(1)+b_2u'(1)=\int_0^1 m(s)u(s)\mathrm{d}p(s), \\ u'''(0)=0,\ u''(1)=\int_0^1 n(s)u''(s)\mathrm{d}q(s) \end{cases}$$

正解的存在性，这里 f 在 0 和 1 点是奇异的。文献[11]利用 Krasnoselskii 不动点定理研究了奇异分数阶微分方程系统边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)=\lambda v(t)f\left(u(t)\right)+\lambda h(t),\ 0<t<1, \\ u(0)=u'(1)=u'(0)=0 \end{cases}$$

正解的存在性，这里 f 在 0 点是奇异的。文献[12]利用上下解方法和 Schauder 不动点定理讨论了分数阶边值问题

$$\begin{cases} -D_t^{\beta}\left(\varphi_p\left(D_t^{\alpha}u\right)\right)(t)=\lambda f\left(t,u(t)\right),\ 0<t<1, \\ u(0)=0,\ D_t^{\alpha}u(0)=0,\ u(1)=\int_0^1 u(s)\mathrm{d}A(s) \end{cases}$$

正解的存在性，这里 f 在 0 和 1 点是奇异的。

受以上文献的启发，本文将用 Krasnoselskii 不动点定理和 Banach 压缩映射原理，研究下面一类带积分边值的奇异分数阶微分方程

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}x(t)+\lambda f\left(t,x(t),(\varphi x)(t)\right)=0,\ 2<\alpha\le 3,\ t\in[0,1], \\ x(0)=x'(0)=0,\ \ x'(1)=\int_0^1(\alpha-1)q\left(x(s)\right)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性，并进一步确定其唯一性。其中 $D_{0^+}^{\alpha}$ 是Riemann-Liouville型分数阶导数，$f:(0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续，$(\varphi x)(t)=\int_0^t\gamma(t,s)x(s)\mathrm{d}s$，$\gamma:[0,1]\times[0,1]\to[0,+\infty)$，$\lambda>0$，$\lim\limits_{t\to 0^+}f\left(t,x(t),(\varphi x)(t)\right)=+\infty$ (即f在 $t=0$ 点奇异)，q是$[0,+\infty)$上的非负有界连续函数。

2. 预备知识

在本文的讨论中我们应用了分数阶微分方程的一些基本定义及结论。可以参见文献[3] [13] [14] [15]。

定义 2.1 [3] [15]函数 $f:[0,+\infty)\to R$ 的 α 阶 $(\alpha>0)$ Riemann-Liouville 分数阶积分定义为：

$$I_{0^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s,$$

其中 f 使得上式右侧在 $(0,+\infty)$ 是逐点有定义的，Γ 是通常的 Gamma 函数。

定义 2.2 [3] [15]函数 $f:[0,+\infty)\to R$ 的 α 阶 $(\alpha>0)$ Riemann-Liouville 分数阶微分定义为：

$$D_{0^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $n=[\alpha]+1$，$[\alpha]$ 表示实数 α 的整数部分，f 使得上式右侧在 $(0,+\infty)$ 是逐点有定义的。

引理 2.1 [3] [15]设 $f\in C(0,1)\cap L(0,1)$ 且 f 的 α 阶分数阶导数属于 $C(0,1)\cap L(0,1)$，那么

$$I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha}f(t)=f(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n},$$

其中 $c_i\in R, i=0,1,\cdots,n$，其中 n 是不小于 α 的最小整数。

本文在证明分数阶微分方程正解的存在性时，利用 Krasnoselskii 不动点定理。

引理 2.2 (Krasnoselskii 不动点定理)设 E 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，S 与 T 为 X 上的算子，使得

(i) 当 $u,v\in E$ 时，有 $Su+Tv\in E$，

(ii) S 是全连续算子，

(iii) T 是压缩映射，

则存在 $z\in E$，使得 $z=Sz+Tz$。

引理 2.3 (Arzela-Ascoli 定理)假设函数族 $F=\{f(t)\}$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致有界和等度连续的，则存在子函数序列 $\{f_n(t)\}\subset F$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致收敛的。

本文在证明分数阶微分方程正解的唯一性时，利用了 Banach 压缩映射原理。

引理 2.4 (Banach 压缩映射原理)假设 D 是 Banach 空间 E 的非空闭子集，$T:D\to D$ 是压缩算子，即对任意的 $x,y\in D$，有

$$|Tx-Ty|\le\alpha|x-y|,\alpha\in(0,1).$$

则存在唯一的 $x^*\in D$，使得 $Tx^*=x^*$，即 T 在 D 内存在唯一的不动点 x^*。

3. 正解的存在性

定义 $E=\{x\in C[0,1]\,|\,x(t)\ge 0\}$ 是 Banach 空间 $P=\{x\in C[0,1]\}$ 的一个正规锥，E 的范数是 $\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$，定义 $B_r\subset E$ 为：$B_r=\{x\in E\,|\,\|x\|\le r\}$。我们有如下假设：

(H_1) 令 $0<\sigma<1, f:(0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{t\to 0^+} f\left(t,x(t),(\varphi x)(t)\right)=+\infty$ 假设 $t^{\sigma} f\left(t,x(t),(\varphi x)(t)\right)$ 在 $[0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续，记 $L=\max\limits_{0\le t\le 1} t^{\sigma} f(t,x,\varphi x)+1, \forall x\in B_r$。

(H_2) 存在常数 $L_1, L_2>0$，使得：

$$\left|q\left(x_1(t)\right)-q\left(x_2(t)\right)\right|\le L_1\left|x_1(t)-x_2(t)\right|,$$
$$\left|(qx)(t)\right|\le L_2, t\in[0,1], x_1, x_2\in E.$$

(H_3) 存在正函数 $L_3(t), L_4(t)$，使得：

$$\left|t^{\sigma} f\left(t,x_1,\varphi x_1\right)-t^{\sigma} f\left(t,x_2,\varphi x_2\right)\right|\le L_3(t)\left|x_1-x_2\right|+L_4(t)\left|\varphi x_1-\varphi x_2\right|, t\in[0,1], x_1, x_2\in E.$$

(H_4) $\gamma_0=\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t \gamma(t,s)\mathrm{d}s\right|$，$N=\max\left\{\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|L_3(t)\right|, \sup\limits_{t\in[0,1]}\left|L_4(t)\right|\right\}$。

我们先给出边值问题(1.1)的解的存在性定理：

定理 3.1 假设 (H_1)，(H_2) 成立，且有 $L_1<1$，则边值问题(1.1)至少存在一个正解。

为了证明定理 3.1，我们先给出下面三个重要的引理。

引理 3.1 若 $2<\alpha\le 3$，$f(t)\in C[0,1]$，分数阶边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} x(t)+f(t)=0, \\ x(0)=x'(0)=0, x'(1)=\int_0^1(\alpha-1)q\left(x(s)\right)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{3.1}$$

有唯一解 $x(t)$，可以表示成：

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s)\mathrm{d}s+\int_0^1 t^{\alpha-1}q\left(x(s)\right)\mathrm{d}s,$$

其中格林函数

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0\le s\le t\le 1, \\ \dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0\le t\le s\le 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

证明 由引理 2.1，方程(3.1)等价于积分方程：

$$\begin{aligned} x(t)&=-I_{0^+}^{\alpha} f(t)+c_1 t^{\alpha-1}+c_2 t^{\alpha-2}+c_3 t^{\alpha-3} \\ &=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s+c_1 t^{\alpha-1}+c_2 t^{\alpha-2}+c_3 t^{\alpha-3}, \end{aligned}$$

其中 $c_1, c_2, c_3\in R$，由边值条件 $x(0)=x'(0)=0$，可得 $c_2=0, c_3=0$。则

$$x(t)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s+c_1 t^{\alpha-1},$$

$$x'(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2} f(s)\mathrm{d}s + (\alpha-1)c_1 t^{\alpha-2}.$$

由 $x'(1) = \int_0^1 (\alpha-1) q(x(s))\mathrm{d}s$ 得：

$$c_1 = \int_0^1 q(x(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s)\mathrm{d}s.$$

则边值问题(3.1)的唯一解为：

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} f(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 t^{\alpha-1} q(x(s))\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\mathrm{d}s + \int_t^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 t^{\alpha-1} q(x(s))\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 G(t,s) f(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 t^{\alpha-1} q(x(s))\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由引理 3.1 可知，边值问题(1.1)等价于积分方程

$$x(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s) f(s, x(s), (\varphi x)(s))\mathrm{d}s + \int_0^1 t^{\alpha-1} q(x(s))\mathrm{d}s.$$

引理 3.2 由(3.2)式定义的格林函数具有下列性质：

(1) $G(t,s) > 0$，对 $t,s \in (0,1)$；

(2) $G(t,s) \le \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}$，对 $t,s \in [0,1]$。

证明 (1) 当 $0 < s \le t < 1$ 时，有 $ts < s, t - ts > t - s$，又由 $2 < \alpha \le 3$，知

$$\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} > \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} > 0.$$

当 $0 < t < s$ 时，显然有

$$\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} > 0.$$

即 $G(t,s) > 0$。

(2) 对 $t,s \in [0,1]$，有

$$G(t,s) \le \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} \le \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}.$$

引理 3.3 设 $0 < \sigma < 1, 2 < \alpha \le 3, F:(0,1] \to R$ 连续，$\lim_{t\to 0^+} F(t) = +\infty$，假设 $t^\sigma F(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则函数 $H(t) = \int_0^1 G(t,s)F(s)\mathrm{d}s$ 在 $[0,1]$ 上连续。

证明 由条件易得 $H(0) = 0$。下面分三种情况讨论：

情形一：$t_0 = 0$。对 $t \in (0,1]$，由于 $t^\sigma F(t) \in C[0,1]$，存在正数 M，使得 $\left|t^\sigma F(t)\right| \le M$，则

$$\begin{aligned}
\left|H(t)-H(0)\right| &= \left|\int_0^1 G(t,s)F(s)\mathrm{d}s\right| \\
&= \left|\int_0^t \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}F(s)\mathrm{d}s+\int_t^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}F(s)\mathrm{d}s\right| \\
&= \left|\int_0^t \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s+\int_t^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s\right| \\
&= \left|\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s-\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\le \left|\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s\right|+\left|\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\le \frac{Mt^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}B(1-\sigma,\alpha-1)+\frac{Mt^{\alpha-\sigma}}{\Gamma(\alpha)}B(1-\sigma,\alpha)\to 0,(t\to 0)
\end{aligned}$$

情形二：$t_0\in(0,1)$。对 $t\in(t_0,1]$，

$$\begin{aligned}
&\left|H(t)-H(t_0)\right| \\
&= \left|\int_0^t \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s+\int_t^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s\right. \\
&\quad \left.-\int_0^{t_0} \frac{t_0^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}-(t_0-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s-\int_{t_0}^1 \frac{t_0^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s\right| \\
&= \left|\int_0^1 \frac{\left(t^{\alpha-1}-t_0^{\alpha-1}\right)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s-\int_0^{t_0} \frac{(t-s)^{\alpha-1}-(t_0-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s\right. \\
&\quad \left.-\int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\le \left|\int_0^1 \frac{\left(t^{\alpha-1}-t_0^{\alpha-1}\right)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s\right|+\left|\int_0^{t_0} \frac{(t-s)^{\alpha-1}-(t_0-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s\right. \\
&\quad \left.+\int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}F(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\le \frac{M\left(t^{\alpha-1}-t_0^{\alpha-1}\right)}{\Gamma(\alpha)}B(1-\sigma,\alpha-1)+\frac{M\left(t^{\alpha-\sigma}-t_0^{\alpha-\sigma}\right)}{\Gamma(\alpha)}B(1-\sigma,\alpha)\to 0,(t\to t_0)
\end{aligned}$$

情形三：$t_0\in(0,1]$。对 $t\in[0,t_0)$，证明类似于情形二，此处省略。

接下来我们证明定理 3.1：

证明　第一步：证明当 $x_1,x_2\in B_r$，有 $\Psi x_1+\Phi x_2\in B_r$。

令 $r\ge\frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}\left[B(1-\sigma,\alpha-1)+B(1-\sigma,\alpha)\right]+L_2, B_r=\left\{x\in E \,\middle|\, \|x\|\le r\right\}$。在 B_r 上定义两个算子 Φ 和 Ψ，其中：

$$(\Phi x)(t)=\int_0^1 t^{\alpha-1}q(x(s))\mathrm{d}s,$$

$$(\Psi x)(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\mathrm{d}s.$$

对 $x_1, x_2 \in B_r$，有：

$$\begin{aligned}
&\left|\Psi x_1 + \Phi x_2\right| \\
&= \left|\lambda \int_0^1 G(t,s) f\left(s, x_1(s), (\varphi x_1)(s)\right) \mathrm{d}s + \int_0^1 t^{\alpha-1} q\left(x_2(s)\right) \mathrm{d}s\right| \\
&\le \lambda \left|\int_0^t \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} s^{-\sigma} s^{\sigma} f\left(s, x_1(s), (\varphi x_1)(s)\right) \mathrm{d}s\right. \\
&\quad \left. + \int_t^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} s^{-\sigma} s^{\sigma} f\left(s, x_1(s), (\varphi x_1)(s)\right) \mathrm{d}s\right| + \left|\int_0^1 t^{\alpha-1} q\left(x_2(s)\right) \mathrm{d}s\right| \\
&= \lambda \left|\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} s^{-\sigma} s^{\sigma} f\left(s, x_1(s), (\varphi x_1)(s)\right) \mathrm{d}s\right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} s^{-\sigma} s^{\sigma} f\left(s, x_1(s), (\varphi x_1)(s)\right) \mathrm{d}s\right| + \left|\int_0^1 t^{\alpha-1} q\left(x_2(s)\right) \mathrm{d}s\right| \\
&\le \lambda \left|\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} s^{-\sigma} s^{\sigma} f\left(s, x_1(s), (\varphi x_1)(s)\right) \mathrm{d}s\right| \\
&\quad + \lambda \left|\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} s^{-\sigma} s^{\sigma} f\left(s, x_1(s), (\varphi x_1)(s)\right) \mathrm{d}s\right| + \left|\int_0^1 t^{\alpha-1} q\left(x_2(s)\right) \mathrm{d}s\right| \\
&\le \frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} s^{-\sigma} \mathrm{d}s + \frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{-\sigma} \mathrm{d}s + L_2 \\
&= \frac{\lambda L t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} B(1-\sigma, \alpha-1) + \frac{\lambda L t^{\alpha-\sigma}}{\Gamma(\alpha)} B(1-\sigma, \alpha) + L_2 \\
&\le \frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)} \left[B(1-\sigma, \alpha-1) + B(1-\sigma, \alpha)\right] + L_2 \\
&\le r.
\end{aligned}$$

从而

$$\left\|\Psi x_1 + \Phi x_2\right\| \le r.$$

则对于 $x_1, x_2 \in B_r$，有 $\Psi x_1 + \Phi x_2 \in B_r$。

第二步：证明 Φ 是 B_r 上的压缩映射。

因为 $(\Phi x)(t) = \int_0^1 t^{\alpha-1} q\left(x(s)\right) \mathrm{d}s$，所以对于任意的 $x_1, x_2 \in B_r$，有

$$\begin{aligned}
\left\|(\Phi x)(t)\right\| &= \max_{0 \le t \le 1} \left|(\Phi x)(t)\right| = \max_{0 \le t \le 1} \left|\int_0^1 t^{\alpha-1} q\left(x(s)\right) \mathrm{d}s\right| \\
&= \max_{0 \le t \le 1} \left|\int_0^1 q\left(x(s)\right) \mathrm{d}s\right| \le L_2
\end{aligned}$$

由 $L_2 \le r$，得到 $\Phi(B_r) \subset B_r$。又对任意的 $x_1, x_2 \in B_r$，有：

$$\begin{aligned}
&\left\|(\Phi x_2)(t) - (\Phi x_1)(t)\right\| \\
&\le \max_{0 \le t \le 1} \int_0^1 t^{\alpha-1} \left|q\left(x_2(s)\right) - q\left(x_1(s)\right)\right| \mathrm{d}s \\
&\le L_1 \left|x_2(t) - x_1(t)\right| \\
&\le L_1 \left\|x_2(t) - x_1(t)\right\|.
\end{aligned}$$

又由 $L_1 < 1$ 可得 Φ 是 B_r 上的压缩映射。

第三步：证明 Ψ 是全连续算子。

对每一个 $x \in B_r$ ，有：

$$\begin{aligned}\left|\Psi x(t)\right| &\le \lambda\int_0^1 G(t,s)s^{-\sigma}\left|s^{\sigma} f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\right|\mathrm{d}s\\ &\le \lambda L\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}\mathrm{d}s\\ &= \frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}B(1-\sigma,\alpha-1).\end{aligned}$$

所以

$$\left\|\Psi x(t)\right\| = \max_{0\le t\le 1}\left|\Psi x(t)\right| \le \frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}B(1-\sigma,\alpha-1)\le r$$

从而可得 $\Psi : B_r \to B_r$ 。

设 $x_0 \in B_r, \|x_0\| \le r$ ， 由 $t^{\sigma} f\left(t,x(t),(\varphi x)(t)\right)$ 在 $[0,1]$ 上是连续的， 故 $t^{\sigma} f\left(t,x(t),(\varphi x)(t)\right)$ 在 $[0,1]\times[0,+\infty]\times[0,+\infty]$ 上是一致连续的，因此，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<r),x_1,x_2\in[0,r]$，当 $|x_2-x_1|<\delta$ 时，使得

$$\left|t^{\sigma} f\left(t,x_2,\varphi x_2\right)-t^{\sigma} f\left(t,x_1,\varphi x_1\right)\right|<\varepsilon,\forall t\in[0,1].$$

显然，若 $\|x-x_0\|<\delta$ ，则对 $t\in[0,1],x\in B_r,\|x-x_0\|<\delta$ ，有

$$\left|t^{\sigma} f\left(t,x,\varphi x\right)-t^{\sigma} f\left(t,x_0,\varphi x_0\right)\right|<\varepsilon.$$

从而有：

$$\begin{aligned}\left\|\Psi x(t)-\Psi x_0(t)\right\| &= \max_{0\le t\le 1}\left|\Psi x(t)-\Psi x_0(t)\right|\\ &\le \lambda\max_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)s^{-\sigma}\left|s^{\sigma} f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)-s^{\sigma} f\left(s,x_0(s),(\varphi x_0)(s)\right)\right|\mathrm{d}s\\ &< \lambda\varepsilon\int_0^1 G(t,s)s^{-\sigma}\mathrm{d}s \le \lambda\varepsilon\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}\mathrm{d}s\\ &= \frac{\lambda\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}B(1-\sigma,\alpha-1).\end{aligned}$$

由 x_0 的任意性，可知 $\Psi : B_r \to B_r$ 连续。令 $\Omega\subset B_r$ 有界，即存在一个正常数 a，使得对 $x\in\Omega$，有 $\|x\|<a<r$ 。又 $t^{\sigma} f(t,x,\varphi x)$ 在 $[0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续，由上述证明可得 $\Psi(B_r)$ 一致有界。

再证 Ψ 等度连续。对 $\forall\varepsilon>0$，取

$$\delta<\min\left\{\left\{\frac{\varepsilon\Gamma(\alpha)}{z^{\alpha-1}\lambda L\left[B(1-\sigma,\alpha-1)+B(1-\sigma,\alpha)\right]}\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}},\frac{\varepsilon\Gamma(\alpha)}{\lambda L\left[(\alpha-1)B(1-\sigma,\alpha-1)+(\alpha-\sigma)B(1-\sigma,\alpha)\right]},\frac{1}{2}\right\}$$

则对 $\forall x\in B_r,t_1,t_2\in[0,1]$，不妨设 $t_1<t_2$，使得 $0<t_2-t_1<\delta$，有：

$$
\begin{aligned}
&\left|\Psi x(t_2)-\Psi x(t_1)\right| \\
&=\lambda\left|\int_0^1 G(t_2,s)\,f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\mathrm{d}s-\int_0^1 G(t_1,s)\,f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\mathrm{d}s\right| \\
&=\lambda\left|\int_0^1\left[G(t_2,s)-G(t_1,s)\right]s^{-\sigma}s^{\sigma}f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\mathrm{d}s\right| \\
&=\lambda\left|\int_0^{t_2}\frac{t_2^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}-(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\mathrm{d}s\right. \\
&\quad+\int_{t_2}^1\frac{t_2^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\mathrm{d}s \\
&\quad-\int_{t_1}^1\frac{t_1^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\mathrm{d}s \\
&\quad\left.-\int_0^{t_1}\frac{t_1^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}-(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\mathrm{d}s\right| \\
&=\lambda\left|\int_0^1\frac{\left(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}\right)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\mathrm{d}s\right. \\
&\quad-\int_{t_1}^{t_2}\frac{t_2^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\mathrm{d}s \\
&\quad\left.-\int_0^{t_1}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\sigma}s^{\sigma}f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\mathrm{d}s\right| \\
&\le\frac{\lambda L\left(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}\right)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}s^{-\sigma}\mathrm{d}s+\frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}s^{-\sigma}\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right]s^{-\sigma}\mathrm{d}s \\
&=\frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}\left(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}\right)B(1-\sigma,\alpha-1)+\frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}\left(t_2^{\alpha-\sigma}-t_1^{\alpha-\sigma}\right)B(1-\sigma,\alpha) \\
&=\frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}\left[\left(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}\right)B(1-\sigma,\alpha-1)+\left(t_2^{\alpha-\sigma}-t_1^{\alpha-\sigma}\right)B(1-\sigma,\alpha)\right].
\end{aligned}
$$

接下来，证明分为两个部分：

(i) 若 $0\le t_1<\delta, t_2<2\delta$，

$$
\begin{aligned}
\left|\Psi x(t_2)-\Psi x(t_1)\right| &\le\frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}\left[t_2^{\alpha-1}B(1-\sigma,\alpha-1)+t_2^{\alpha-\sigma}B(1-\sigma,\alpha)\right] \\
&\le\frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}\left[B(1-\sigma,\alpha-1)+B(1-\sigma,\alpha)\right]t_2^{\alpha-1} \\
&<\frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}\left[B(1-\sigma,\alpha-1)+B(1-\sigma,\alpha)\right]2^{\alpha-1}\delta^{\alpha-1}<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

(ii) 若 $\delta\le t_1<t_2<1$，

$$\begin{aligned}\left|\Psi x(t_2)-\Psi x(t_1)\right| &\le \frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}\left[(\alpha-1)\delta B(1-\sigma,\alpha-1)+(\alpha-\sigma)\delta B(1-\sigma,\alpha)\right] \\ &\le \frac{\lambda L\delta}{\Gamma(\alpha)}\left[(\alpha-1)B(1-\sigma,\alpha-1)+(\alpha-\sigma)B(1-\sigma,\alpha)\right]<\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $\Psi(B_r)$ 等度连续。由 Arzela-Ascoli 定理，可知 Ψ 是全连续算子。通过以上证明过程可知 Krasnoselskii 不动点定理的条件皆满足，从而边值问题(1.1)至少存在一个正解。

4. 正解的唯一性

现在，我们给出分数阶微分方程边值问题(1.1)正解的唯一性结果：

定理 4.1 如果 (H_1)，(H_2)，(H_3)，(H_4) 成立，且

$$\frac{\lambda N(1+\gamma_0)B(1-\sigma,\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}+L_1<1,$$

那么边值问题(1.1)有唯一正解。

证明 令 $r\ge\frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}\left[B(1-\sigma,\alpha-1)+B(1-\sigma,\alpha)\right]+L_2, B_r=\left\{x\in E\,\middle|\,\|x\|\le r\right\}$。

定义：

$$(Hx)(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^1 t^{\alpha-1}q\left(x(s)\right)\mathrm{d}s,$$

则 $H:B_r\to E$。对 $x\in B_r,t\in[0,1]$，证 $H(B_r)\subset B_r$。

$$\begin{aligned}\left|(Hx)(t)\right| &\le \lambda\int_0^1 G(t,s)\left|f\left(s,x(s),(\varphi x)(s)\right)\right|\mathrm{d}s+\int_0^1 t^{\alpha-1}\left|q\left(x(s)\right)\right|\mathrm{d}s \\ &\le \frac{\lambda L}{\Gamma(\alpha)}\left[B(1-\sigma,\alpha-1)+B(1-\sigma,\alpha)\right]+L_2 \\ &\le r,\end{aligned}$$

即 $\left\|(Hx)(t)\right\|\le r$，则有 $H(B_r)\subset B_r$。现在，对 $t\in[0,1],x_1,x_2\in E$，有：

$$\begin{aligned}&\left\|(Hx_2)(t)-(Hx_1)(t)\right\| \\ &\le \max_{0\le t\le1}\Big|\lambda\int_0^1 G(t,s)\left[f\left(s,x_2(s),(\varphi x_2)(s)\right)-f\left(s,x_1(s),(\varphi x_1)(s)\right)\right]\mathrm{d}s \\ &\quad+\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[q\left(x_2(s)\right)-q\left(x_1(s)\right)\right]\mathrm{d}s\Big| \\ &\le \lambda\max_{0\le t\le1}\int_0^1 G(t,s)s^{-\sigma}\left|s^\sigma f\left(s,x_2(s),(\varphi x_2)(s)\right)-s^\sigma f\left(s,x_1(s),(\varphi x_1)(s)\right)\right|\mathrm{d}s \\ &\quad+\max_{0\le t\le1}\int_0^1 t^{\alpha-1}\left|q\left(x_2(s)\right)-q\left(x_1(s)\right)\right|\mathrm{d}s \\ &\le \lambda\max_{0\le t\le1}\left|x_2-x_1\right|\cdot\int_0^1 L_3(s)G(t,s)s^{-\sigma}\mathrm{d}s \\ &\quad+\lambda\max_{0\le t\le1}\left|\varphi x_2-\varphi x_1\right|\int_0^1 L_4(s)G(t,s)s^{-\sigma}\mathrm{d}s+L_1\max_{0\le t\le1}\left|x_2-x_1\right| \\ &\le \left(\frac{\lambda N(1+\gamma_0)B(1-\sigma,\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}+L_1\right)\cdot\left\|x_2-x_1\right\|\end{aligned}$$

由条件

$$\frac{\lambda N(1+\gamma_0)B(1-\sigma,\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}+L_1<1$$

知 F 是压缩算子，则由 Banach 压缩映射原理知，问题(1.1)有唯一的正解。

5. 应用举例

考虑以下带积分边值的奇异分数阶微分方程

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}x(t)+\lambda\cdot\dfrac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)}{t^{\sigma}}\cdot\int_0^t\dfrac{\mathrm{e}^{-(s-t)}}{5}x(s)\mathrm{d}s=0,\ 2<\alpha\le 3,\ t\in[0,1], \\ x(0)=x'(0)=0,\ x'(1)=\int_0^1(\alpha-1)\dfrac{1}{2+x(s)}\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $(\varphi x)(t)=\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{-(s-t)}}{5}x(s)\mathrm{d}s$，$f\left(t,x(t),(\varphi x)(t)\right)=\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)}{t^{\sigma}}\cdot\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{-(s-t)}}{5}x(s)\mathrm{d}s$，$q\left(x(t)\right)=\frac{1}{2+x(t)}$。易知 $f:(0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{t\to0^+}f\left(t,x(t),(\varphi x)(t)\right)=+\infty$ (即 f 在 $t=0$ 点奇异)，q 是 $[0,+\infty)$ 上的非负有界连续函数。找到常数 $L_1=\frac{1}{2}<1, L_2=1, \gamma_0=\frac{\mathrm{e}-1}{5}$ 使得：

$$\begin{aligned} &\left|q\left(x_1(t)\right)-q\left(x_2(t)\right)\right|\le L_1\left|x_1(t)-x_2(t)\right|, \\ &\left|q\left(x(t)\right)\right|\le L_2, \\ &\gamma_0=\max_{0\le t\le1}\left|\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{-(s-t)}}{5}\mathrm{d}s\right|=\frac{\mathrm{e}-1}{5} \end{aligned}$$

同时有 $N=2$，使得

$$\begin{aligned} &\left|t^{\sigma}f\left(t,x_1(t),(\varphi x_1)(t)\right)-t^{\sigma}f\left(t,x_2(t),(\varphi x_2)(t)\right)\right| \\ &\le\left|\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{-(s-t)}}{5}x_1(s)\mathrm{d}s\right|\cdot\left|x_1(t)-x_2(t)\right|+\left|\mathrm{e}^{-x_2(t)}+1\right|\cdot\left|(\varphi x_1)(t)-(\varphi x_2)(t)\right| \\ &\le N(1+\gamma_0)\left|x_1(t)-x_2(t)\right| \end{aligned}$$

即满足定理 3.1，所以问题(5.1)至少存在一个正解。进一步的，当 λ 足够小时，可以满足 $\frac{\lambda N(1+\gamma_0)B(1-\sigma,\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}+L_1<1$。于是由定理 4.1 可知，此时问题(5.1)有唯一正解。

致　谢

作者对审稿人提出的宝贵意见和编辑老师的工作表示衷心的感谢。

基金项目

本文受国家自然科学基金项目(NSFC11501260)，江苏高校优势学科建设工程项目(PAPD)，江苏高校品牌专业建设工程资助项目 (PPZY2015A013)和江苏省大学生创新创业训练计划项目(201810320015Z)资助。

参考文献

[1] 贾代平, 范洪达. 基于分数阶差分模型的记忆性扩展方法[J]. 通信学报, 2006, 27(9): 66-70.

[2] 舒永录, 王猛, 赵运洪. NSG 系统和分数阶金融系统的有界性及其同步[J]. 北京工商大学学报(自然科学版), 2009, 27(3): 78-82.

[3] Miller, K.S. and Ross, B. (1993) An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley, New York.

[4] 徐明瑜, 谭文长. 中间过程、临界现象——分数阶算子理论、方法、进展及其在现代力学中的应用[J]. 中国科学: G, 2006, 36(3): 225-238.

[5] Oldham, K. and Spanier, J. (1974) The Fractional Calculus. Academic Press, New York.

[6] 姚佳欣, 王文霞, 贾建梅. 一类无穷区间上的分数阶微分方程边值问题解的存在性[J]. 理论数学, 2017, 7(4): 213-224.

[7] 张瑞鑫, 王文霞. 一类无穷区间上分数阶微分方程组边值问题正解的存在性[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 427-440.

[8] 卢云雪, 王颖, 吴英昭, 李大伟. 分数阶微分方程积分边值问题正解的唯一性[J]. 理论数学, 2020, 10(1): 6-10.

[9] Zhao, Y., Sun, S., Han, Z. and Li, Q. (2011) The Existence of Multiple Solutions for Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**, 2086-2097. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.08.017

[10] 陈豪亮, 刘锡平, 张潇涵. 奇异分数阶微分方程积分边值问题正解的存在性[J]. 吉林大学学报(理学版), 2018, 56(3): 481-490.

[11] 康淑瑰, 岳亚卿, 郭建敏. 分数阶微分方程奇异系统边值问题正解的存在性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 41(4): 104-108.

[12] Zhang, X., Liu, L., Wiwatanapataphee, B. and Wu, Y. (2014) The Eigenvalue for a Class of Singular p-Laplacian Fractional Differential Equations Involving the Riemann-Stieltjes Integral Boundary Condition. *Applied Mathematics and Computation*, **235**, 412-422. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.02.062

[13] Kilbas, A., Srivastava, H. and Trujillo, J. (2006) Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science B.V, Amsterdam.

[14] 时宝, 张德存, 盖明久. 微分方程理论及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.

[15] Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, CA.