

Tetrapartite Entanglement of an Open Quantum System in Accelerated Frames

Meng Shi*, Haimei Zhong

Mathematics Institute, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong

Email: 330052639@qq.com

Received: Feb. 22nd, 2020; accepted: Mar. 10th, 2020; published: Mar. 17th, 2020

Abstract

In this paper, we mainly study the entanglement of tetrapartite GHZ quantum states in an open environment in a noninertial system, and explore the entanglement changes when the three observers accelerate, and when the system A and system AB contact with the environment. Then we explore the entanglement changes of four observers when they all accelerate, only when the system A contacts the environment.

Keywords

Entanglement, GHZ-State, Phase Damping

在非惯性系下开放环境中的四体纠缠

史 萌*, 钟海梅

华南理工大学数学学院, 广东 广州

Email: 330052639@qq.com

收稿日期: 2020年2月22日; 录用日期: 2020年3月10日; 发布日期: 2020年3月17日

摘 要

本文主要研究了四体GHZ量子态在开放环境中非惯性系下的纠缠变化, 探究了当三个观察者加速时, 系统A和系统AB与环境接触时, 纠缠的变化情况。接着探究了当四个观察者加速时, 只有系统A与环境接触时, 它们的纠缠变化情况。

关键词

纠缠, GHZ态, 相位阻尼

*第一作者。



1. 引言

在量子计算和量子信息中, 纠缠是一个很重要的概念[1] [2] [3]。近些年来随着对量子信息科学和相对论的进一步研究, 人们开始研究在非惯性系下的多体态的物理特征。量子系统的纠缠不可避免的受到外界环境的影响, 所以人们研究了二体或者三体量子态在环境下的纠缠变化[4], 也得到了一些纠缠的变化特征。

本文主要研究了四体 GHZ 量子态在开放环境中非惯性系下的纠缠变化, 探究了当三个观察者加速时, 系统 A 和系统 AB 与环境接触时, 纠缠的变化情况。接着探究了当四个观察者加速时, 只有系统 A 与环境接触时, 它们的纠缠变化情况。最后比较了当只有系统 A 与环境接触时, 当有三个观察者和四个观察者时, 它们的纠缠变化情况。

2. 基本概念与知识

在非惯性系下, Rindler 坐标适合描述一类具有均匀加速的观察者, 而另一个保持惯性系的观察者可以用 Minkowski 坐标描述。我们利用单模近似模型, 将 Minkowski 空间的真空态 $|0\rangle$ 和单粒子态 $|1\rangle$ 转化为 Rindler 空间的粒子态的张量积的形式, 通过变换运算符, 可以得到下列运算关系[5]:

$$|0\rangle_M = \cos r |0\rangle_I |0\rangle_{II} + \sin r |1\rangle_I |1\rangle_{II} \quad (1)$$

$$|1\rangle_M = |1\rangle_I |0\rangle_{II} \quad (2)$$

其中 $\cos r = (e^{-2\pi w/a} + 1)^{-1/2}$, 式子中的 a, r 分别代表加速观察者的加速度和加速参数, w 代表对应的频率。另一方面加速观察者是在 Rindler 区域一, 与 Rindler 区域二是不相联系的, 对不相关的区域二求迹, 可以得到所需要的四体态。

接下来介绍计算纠缠的测量方法。对于一个多体系统 $\rho_{\alpha\beta\gamma}$, 我们常用的测量是负度[6], 它的定义如下:

$$N_{\alpha\beta} = \|\rho_{\alpha\beta}^T\| - 1 \quad (3)$$

$$N_{\alpha(\beta\gamma)} = \|\rho_{\alpha(\beta\gamma)}^T\| - 1 \quad (4)$$

另一方面, 对于一个矩阵 M , $\lambda_i^{(-)}$ 是它的所有负的特征值, 有下面的公式:

$$\|M\| - 1 = 2 \sum |\lambda_i^{(-)}|$$

所以等式(3)和(4)可以改写如下形式:

$$N_{\alpha\beta} = 2 \sum |\lambda_{\alpha\beta}^{(-)}|^i$$

$$N_{\alpha(\beta\gamma)} = 2 \sum |\lambda_{\alpha(\beta\gamma)}^{(-)}|^i$$

剩余纠缠定义如下[5]:

$$\pi_\alpha = N_{\alpha(\beta\gamma)}^2 - N_{\alpha\beta}^2 - N_{\alpha\gamma}^2$$

$$\pi_\beta = N_{\beta(\alpha\gamma)}^2 - N_{\beta\gamma}^2 - N_{\beta\alpha}^2$$

$$\pi_\gamma = N_{\gamma(\alpha\beta)}^2 - N_{\gamma\alpha}^2 - N_{\gamma\beta}^2$$

一般 $\pi_\alpha \neq \pi_\beta \neq \pi_\gamma$, 于是 π -纠缠定义为:

$$\pi_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3}(\pi_\alpha + \pi_\beta + \pi_\gamma)$$

用类似于上述定义纠缠度的方法, 我们可以把定义扩展到四个量子位, 定义如下[7]:

$$\pi_\alpha = N_{\alpha(\beta\gamma\delta)}^2 - N_{\alpha\beta}^2 - N_{\alpha\gamma}^2 - N_{\alpha\delta}^2$$

$$\pi_\beta = N_{\beta(\alpha\gamma\delta)}^2 - N_{\beta\alpha}^2 - N_{\beta\gamma}^2 - N_{\beta\delta}^2$$

$$\pi_\gamma = N_{\gamma(\alpha\beta\delta)}^2 - N_{\gamma\alpha}^2 - N_{\gamma\beta}^2 - N_{\gamma\delta}^2$$

$$\pi_\delta = N_{\delta(\alpha\beta\gamma)}^2 - N_{\delta\alpha}^2 - N_{\delta\beta}^2 - N_{\delta\gamma}^2$$

因此我们可以定义总的纠缠:

$$\pi_4 = \frac{1}{4}(\pi_\alpha + \pi_\beta + \pi_\gamma + \pi_\delta)$$

$$\Pi_4 = \sqrt[4]{\pi_\alpha \pi_\beta \pi_\gamma \pi_\delta}$$

由于开放的量子系统总是处在复杂的环境中, 本文所涉及的环境是: 相位阻尼环境, 在这里的子系统分别只与自己的环境相互作用, 与其他子系统不相互交流。相位阻尼环境有如下形式:

$$E_0^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p_i} \end{pmatrix}, E_1^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p_i} \end{pmatrix}$$

其中 i 是从 1 到 N 的整数, 也表示第 i 个系统的相位阻尼算符, p_i 是一个与时间有关的参数。另外系统与环境之间的相互作用可以写成下列关系式:

$$L(\rho) = \sum_{u \cdots v} E_u^1 \otimes \cdots \otimes E_v^N \rho E_u^{1T} \otimes \cdots \otimes E_v^{NT} \quad (5)$$

其中 ρ 是量子系统没有与环境接触就出之前所处的状态, $L(\rho)$ 是与环境作用后的系统的状态。

3. 四体 GHZ 态与相位阻尼环境作用只有三个观察者加速

我们将考虑由 Alice, Bob, Charlie 和 Daniel 四个观察者共享的四体 GHZ 态, 定义如下:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0_A 0_B 0_C 0_D\rangle + |1_A 1_B 1_C 1_D\rangle]$$

其中 GHZ 态的下标 A, B, C, D 分别代表四个观察者。当只有 Bob, Charlie 和 Daniel 这三个观察者都以相同的加速参数 r 加速时, 我们运用式子(1)和(2), 并通过求区域二分求偏迹, 可以得到下面量子态:

$$\begin{aligned} \rho_{AB_1C_1D_1} = & \frac{1}{2} [\cos^6 r |0000\rangle\langle 0000| + \cos^4 r \sin^2 r |0001\rangle\langle 0001| \\ & + \cos^4 r \sin^2 r |0010\rangle\langle 0010| + \cos^2 r \sin^4 r |0011\rangle\langle 0011| \\ & + \cos^4 r \sin^2 r |0100\rangle\langle 0100| + \cos^2 r \sin^4 r |0101\rangle\langle 0101| \\ & + \cos^2 r \sin^4 r |0110\rangle\langle 0110| + \sin^6 r |0111\rangle\langle 0111| \\ & + \cos^3 r |1111\rangle\langle 0000| + \cos^3 r |0000\rangle\langle 1111| + |1111\rangle\langle 1111|] \end{aligned}$$

接下来量子态 $\rho_{AB_1C_1D_1}$ 中只有 A 系统与相位阻尼环境相接触, 运用式子(5), 可以得到与环境作用后的态, 再通过分别对四个子系统求部分转置, 可以得到下列矩阵:

$$\begin{aligned} \rho_{AB_1C_1D_1}^{T_{B_1}} &= \frac{1}{2} \left[\cos^6 r |0000\rangle\langle 0000| + \cos^4 r \sin^2 r |0001\rangle\langle 0001| \right. \\ &\quad + \cos^4 r \sin^2 r |0010\rangle\langle 0010| + \cos^2 r \sin^4 r |0011\rangle\langle 0011| \\ &\quad + \cos^4 r \sin^2 r |0100\rangle\langle 0100| + \cos^2 r \sin^4 r |0101\rangle\langle 0101| \\ &\quad + \cos^2 r \sin^4 r |0110\rangle\langle 0110| + \sin^6 r |0111\rangle\langle 0111| + |1111\rangle\langle 1111| \\ &\quad \left. + \sqrt{1-p} \cos^3 r |0100\rangle\langle 1011| + \sqrt{1-p} \cos^3 r |1011\rangle\langle 0100| \right] \\ \rho_{AB_1C_1D_1}^{T_{C_1}} &= \frac{1}{2} \left[\cos^6 r |0000\rangle\langle 0000| + \cos^4 r \sin^2 r |0001\rangle\langle 0001| \right. \\ &\quad + \cos^4 r \sin^2 r |0010\rangle\langle 0010| + \cos^2 r \sin^4 r |0011\rangle\langle 0011| \\ &\quad + \cos^4 r \sin^2 r |0100\rangle\langle 0100| + \cos^2 r \sin^4 r |0101\rangle\langle 0101| \\ &\quad + \cos^2 r \sin^4 r |0110\rangle\langle 0110| + \sin^6 r |0111\rangle\langle 0111| + |1111\rangle\langle 1111| \\ &\quad \left. + \sqrt{1-p} \cos^3 r |0010\rangle\langle 1101| + \sqrt{1-p} \cos^3 r |1101\rangle\langle 0010| \right] \\ \rho_{AB_1C_1D_1}^{T_{D_1}} &= \frac{1}{2} \left[\cos^6 r |0000\rangle\langle 0000| + \cos^4 r \sin^2 r |0001\rangle\langle 0001| \right. \\ &\quad + \cos^4 r \sin^2 r |0010\rangle\langle 0010| + \cos^2 r \sin^4 r |0011\rangle\langle 0011| \\ &\quad + \cos^4 r \sin^2 r |0100\rangle\langle 0100| + \cos^2 r \sin^4 r |0101\rangle\langle 0101| \\ &\quad + \cos^2 r \sin^4 r |0110\rangle\langle 0110| + \sin^6 r |0111\rangle\langle 0111| + |1111\rangle\langle 1111| \\ &\quad \left. + \sqrt{1-p} \cos^3 r |0001\rangle\langle 1110| + \sqrt{1-p} \cos^3 r |1110\rangle\langle 0001| \right] \end{aligned}$$

经过一些计算, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} N_{A(B_1C_1D_1)} &= -2 \times \left(\frac{3}{4} \cos^4 r - \frac{3}{4} \cos^2 r - \frac{1}{4} \cos^6 r + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} (15 \cos^4 r - 6 \cos^2 r \right. \\ &\quad \left. - 4p \cos^6 r - 16 \cos^6 r + 15 \cos^8 r - 6 \cos^{10} r + \cos^{12} r + 1)^{\frac{1}{2}} \right) \\ N_{B_1(AC_1D_1)} &= -2 \times \left(\frac{1}{4} \cos^4 r - \frac{1}{4} \cos^3 r \times (\cos^2 r - 4p - 2 \cos^4 r + \cos^6 r + 4)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \cos^6 r \right) \\ N_{C_1(AB_1D_1)} &= -2 \times \left(\frac{1}{4} \cos^4 r - \frac{1}{4} \cos^3 r \times (\cos^2 r - 4p - 2 \cos^4 r + \cos^6 r + 4)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \cos^6 r \right) \\ N_{D_1(AB_1C_1)} &= -2 \times \left(\frac{1}{4} \cos^4 r - \frac{1}{4} \cos^3 r \times (\cos^2 r - 4p - 2 \cos^4 r + \cos^6 r + 4)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \cos^6 r \right) \\ N_{ij} &= 0, i, j = A, B_1, C_1, D_1, i \neq j \\ \pi_4 &= \frac{1}{4} (N_{A(B_1C_1D_1)}^2 + 3N_{B_1(AC_1D_1)}^2), \Pi_4 = \sqrt[4]{N_{A(B_1C_1D_1)}^2 \times N_{B_1(AC_1D_1)}^6} \end{aligned}$$

从下面的图1中我们可以看出, 只有系统A与环境接触, 对于加速参数r分别取三个特殊值, 随着退化参数p增大, π_4 都是减少的, 最后都是减少到0, 没有纠缠。对于相同的退化参数p, 加速参数r越大, 相

应的纠缠度就越小。 Π_4 的变化趋势如图2所示, 它随着加速参数 r 和退化参数 p 也是逐步减少。类似上面的算法, 我们假设系统A和 B_1 都与相同的相位阻尼环境相接触, 通过计算得到:

$$N_{B_1(AC_1D_1)} = N_{C_1(AB_1D_1)} = N_{D_1(AB_1C_1)}$$

$$= -2 \times \left(\frac{1}{4} \cos^4 r - \frac{1}{4} \cos^6 r - \frac{1}{4} \left(\cos^3 r \times (\cos^2 r - 8p - 2\cos^4 r + \cos^6 r + 4p^2 + 4)^{\frac{1}{2}} \right) \right)$$

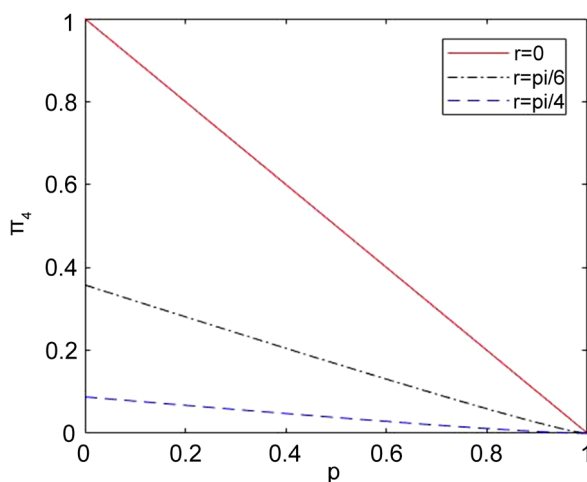


Figure 1. Curve: π_4 as a function of the acceleration p for the phase damping environment
图 1. 对于相位阻尼环境, 纠缠随退化参数变化的情况

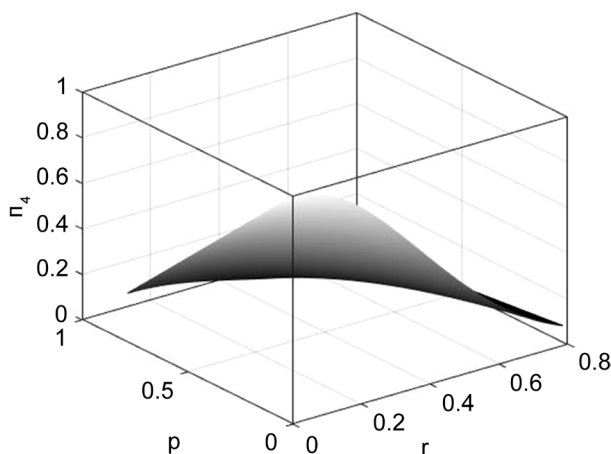


Figure 2. Curve: Π_4 as a function of the acceleration p for the phase damping environment
图 2. 对于相位阻尼环境, 纠缠随退化参数变化的情况

由于其他的纠缠公式比较复杂, 所以没有写出来, π_4 如图3所示, 它也是随着退化参数减少到0, 从图中可以看出加速参数最大的, π_4 最先减少到0。

接下来当 $r = \pi/4$, 两种情况的 π_4 的变化情况如图 4 所示, 黑色曲线表示只有系统 A 与环境接触的情况, 蓝色曲线表示系统 AB 与相同环境接触时的情况, 从图中可以看出当 $p = 0$, 两种情况刚开始纠缠度是一样的, 随着 p 的增大, 与环境接触的系统越多, 也就是当系统 AB 都与环境接触, 纠缠程度下降的越快, 当 p 接近 0.85 时, π_4 减少到 0。

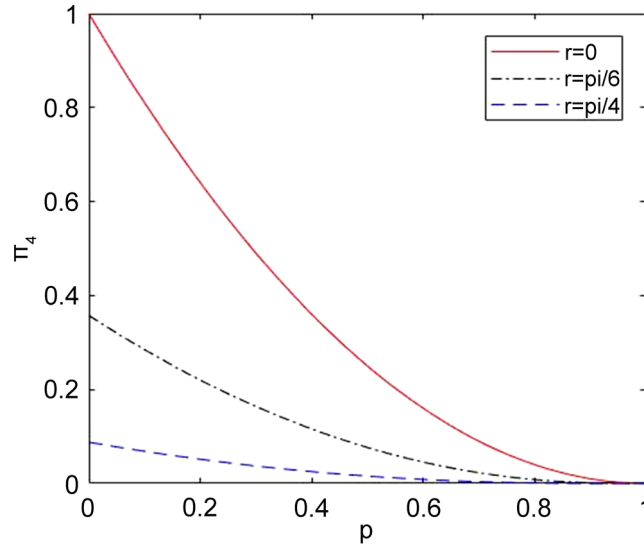


Figure 3. Curve: π_4 as a function of the acceleration p for the phase damping environment
图 3. 对于相位阻尼环境, 纠缠随退化参数变化的情况

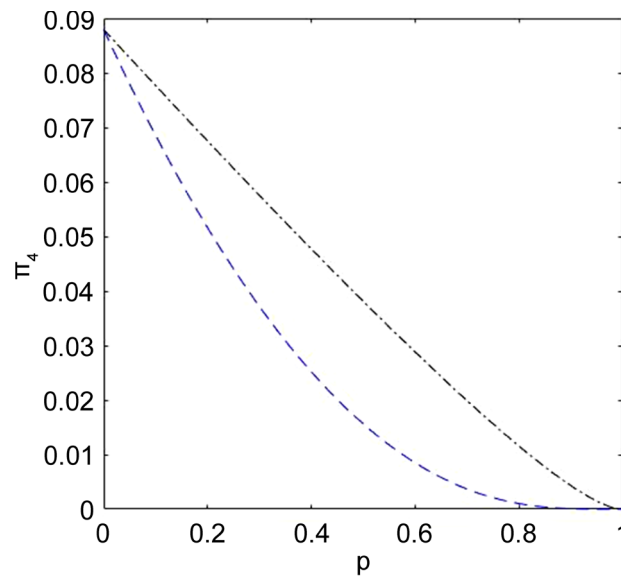


Figure 4. Curve: π_4 as a function of the acceleration p for the phase damping environment
图 4. 对于相位阻尼环境, 纠缠随退化参数变化的情况

4. 四体 GHZ 态与相位阻尼环境作用四个观察者都加速

当四个观察者 Alice, Bob, Charlie 和 Daniel 都加速时, 加速参数分别是 r_A, r_B, r_C, r_D , GHZ 态变成下列形式:

$$\begin{aligned}
 |\Phi\rangle_{ABCD} = & \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos r_A \cos r_B \cos r_C \cos r_D |00000000\rangle + \cos r_A \cos r_B \cos r_C \sin r_D |00000011\rangle \\
 & + \cos r_A \cos r_B \sin r_C \cos r_D |00001100\rangle + \cos r_A \cos r_B \sin r_C \sin r_D |00001111\rangle \\
 & + \cos r_A \sin r_B \cos r_C \cos r_D |00110000\rangle + \cos r_A \sin r_B \cos r_C \sin r_D |00110011\rangle \\
 & + \cos r_A \sin r_B \sin r_C \cos r_D |00111100\rangle + \cos r_A \sin r_B \sin r_C \sin r_D |00111111\rangle]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin r_A \cos r_B \cos r_C \cos r_D |11000000\rangle + \sin r_A \cos r_B \cos r_C \sin r_D |11000011\rangle \\
& + \sin r_A \cos r_B \sin r_C \cos r_D |11001100\rangle + \sin r_A \cos r_B \sin r_C \sin r_D |11001111\rangle \\
& + \sin r_A \sin r_B \cos r_C \cos r_D |11110000\rangle + \sin r_A \sin r_B \cos r_C \sin r_D |11110011\rangle \\
& + \sin r_A \sin r_B \sin r_C \cos r_D |11111100\rangle + \sin r_A \sin r_B \sin r_C \sin r_D |11111111\rangle \\
& + |10101010\rangle]
\end{aligned}$$

为了方便计算, 我们让 $r_A = r_B = r_C = r_D = r$, 仅仅只让系统 A 与相位阻尼环境作用, 其他的系统不与环境接触, 通过运用等式(5), 再对区域二求偏迹后, 得到下列式子:

$$\begin{aligned}
\rho_{A_1 B_1 C_1 D_1} = & \frac{1}{2} \left[\cos^8 r |0000\rangle \langle 0000| + \sqrt{1-p} \cos^4 r |0000\rangle \langle 1111| \right. \\
& + \cos^6 r \sin^2 r |0001\rangle \langle 0001| + \cos^6 r \sin^2 r |0010\rangle \langle 0010| \\
& + \cos^4 r \sin^4 r |0011\rangle \langle 0011| + \cos^6 r \sin^2 r |0100\rangle \langle 0100| \\
& + \cos^4 r \sin^4 r |0101\rangle \langle 0101| + \cos^4 r \sin^4 r |0110\rangle \langle 0110| \\
& + \cos^2 r \sin^6 r |0111\rangle \langle 0111| + \cos^6 r \sin^2 r |1000\rangle \langle 1000| \\
& + \sin^4 r \cos^4 r |1001\rangle \langle 1001| + \sin^4 r \cos^4 r |1010\rangle \langle 1010| \\
& + \sin^6 r \cos^2 r |1011\rangle \langle 1011| + \sin^4 r \cos^4 r |1100\rangle \langle 1100| \\
& + \sin^6 r \cos^2 r |1101\rangle \langle 1101| + \sin^6 r \cos^2 r |1110\rangle \langle 1110| \\
& \left. + \sqrt{1-p} \cos^4 r |1111\rangle \langle 0000| + (\sin^8 r + 1) |1111\rangle \langle 1111| \right]
\end{aligned}$$

再通过分别对系统 A, B, C, D 求偏转置, 得到它们的矩阵, 再通过一些计算可以得到:

$$\begin{aligned}
N_{A_1(B_1 C_1 D_1)} & = N_{B_1(A_1 C_1 D_1)} = N_{C_1(A_1 B_1 D_1)} = N_{D_1(A_1 B_1 C_1)} \\
& = -2 \times \left(\frac{1}{4} \cos^2 r - \frac{1}{4} (3 \times \cos^4 r) + \cos^6 r - \frac{1}{2} \cos^8 r - \cos^2 r \times (17 \times \cos^4 r \right. \\
& \quad \left. - 6 \times \cos^2 r - 4 \times p \times \cos^4 r - 12 \times \cos^6 r + 4 \times \cos^8 r + 1) \right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

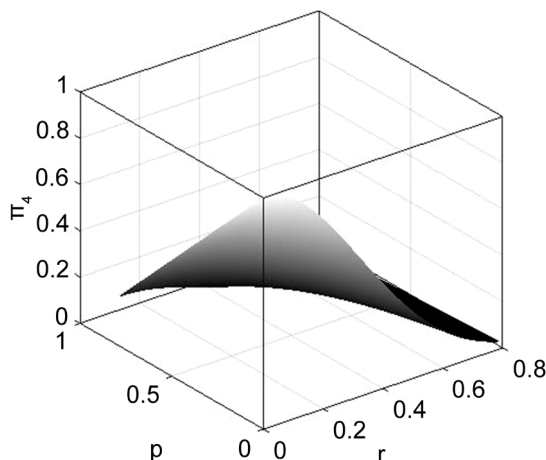


Figure 5. Curve: π_4 as a function of the acceleration p, r for the phase damping environment
图 5. 对于相位阻尼环境, 纠缠随退化参数变化的情况

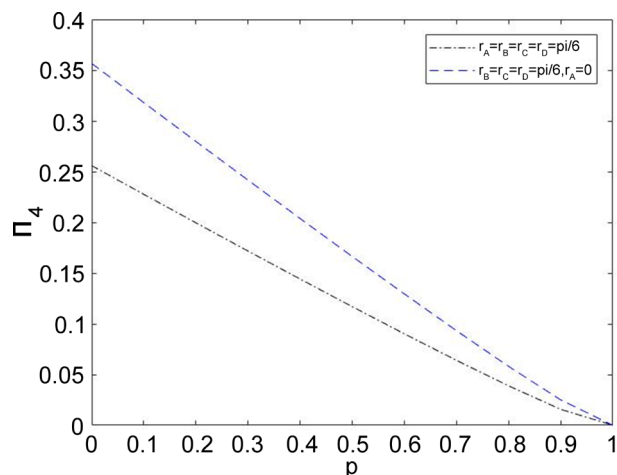


Figure 6. Curve: Π_4 as a function of the acceleration p for the phase damping environment

图 6. 对于相位阻尼环境, 纠缠随退化参数变化的情况

这四个纠缠度量的数都是相等的, 所以通过计算发现二体纠缠都为 0, 也即:

$$N_{ij} = 0, i, j = A, B_1, C_1, D_1, i \neq j$$

$$\pi_4 = \Pi_4 = N_{A_1(B_1C_1D_1)}^2$$

图形如图 5 所示, 纠缠度随着参数 p, r 逐渐减少到 0, 纠缠完全被破坏。

对于 GHZ 态, 接下来我们讨论当仅仅只有系统 A 与环境接触时, 有三个观察者加速时和全部都加速时, 它们的加速参数都是 $r = \pi/6$, 纠缠度情况变化如图 6 所示。从图中可以看到当 $p = 0$, 只有三个观察者加速时, 初始总纠缠度大于 0.35, 而当全部观察者都加速时, 初始总纠缠数接近 0.25。随着加速参数的逐渐增大, Π_4 几乎同时逐渐减少到 0。我们可以看出环境对纠缠度的影响是大于加速度的。

参考文献

- [1] Bouwmeester, D., Ekert, A.K. and Zeilinger, A. (2013) The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, **34**, 331-334. [https://doi.org/10.1016/S1355-2198\(03\)00012-1](https://doi.org/10.1016/S1355-2198(03)00012-1)
- [2] Peres, A. and Terno, D.R. (2004) Quantum Information and Relativity Theory. *Review of Modern Physics*, **76**, 93-123. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.76.93>
- [3] Takagi, S. (1986) Vacuum Noise and Stress Induced by Uniform Acceleration: Hawking-Unruh Effect in Rindler Manifold of Arbitrary Dimension. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, **88**, 1-142. <https://doi.org/10.1143/PTPS.88.1>
- [4] Zhang, W. and Jing, J. (2011) Multipartite Entanglement for Open System in Noninertial Frames. arXiv:quant-ph/1103.4903 <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.022314>
- [5] Wang, J. and Jing, J. (2011) Multipartite Entanglement of Fermionic Systems in Noninertial Frames. *Physical Review A*, **83**, 334-344. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.022314>
- [6] Vidal, G. and Werner, R.F. (2002) A Computable Measure of Entanglement. *Physical Review A*, **65**, Article ID: 032314. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.032314>
- [7] Li, Y., Liu, C., Wang, Q., Zhang, H. and Hu, L. (2016) Tetrapartite Entanglement of Fermionic Systems in Noninertial Frames. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, **127**, 9788-9797. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2016.07.069>