Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(3), 221-225
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.103029

On the Additive Property of Numerical Ranges

Ran Xu, Yaming Guo, Xingrui Sun, Zhijian Zeng, Deyu Wu

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: xxurann@163.com

Received: Feb. 23rd, 2020; accepted: Mar. 10th, 2020; published: Mar. 17th, 2020

Abstract

In the numerical range theory, the subadditivity of the numerical range of linear operators is trivial, but the conditions for the additive property to be established are harsh. This paper studies the conditions for the additive property to the numerical range on the finite dimensional complex space. By using the unitary invariance of the numerical range and the properties that the numerical range of normal matrix is just the convex combination of its eigenvalues, the necessary and sufficient conditions for the additive property to the numerical range of two Hermite matrices are discussed first. Secondly, the necessary and sufficient conditions for the additive property to the numerical range of Hermite matrix and skew Hermite matrix are discussed. Finally, the necessary and sufficient conditions for the additive property to the numerical range of two-dimensional normal matrix are given, that is, the feature spaces corresponding to the eigenvalues of the two matrices have nonzero intersections and the eigenvalue connection of the first matrix is parallel to the eigenvalue connection of the second matrix.

Keywords

The Additive Property of Numerical Ranges, Unitary Invariance, Hermite Matrix, Normal Matrix

数值域可加性研究

许　然，郭亚明，孙星睿，曾志坚，吴德玉

内蒙古大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特
Email: xxurann@163.com

收稿日期：2020年2月23日；录用日期：2020年3月10日；发布日期：2020年3月17日

摘　要

在数值域理论中，线性算子数值域的次可加性是平凡的，但可加性成立的条件却是苛刻的。对有限维复

文章引用: 许然, 郭亚明, 孙星睿, 曾志坚, 吴德玉. 数值域可加性研究[J]. 理论数学, 2020, 10(3): 221-225.
DOI: 10.12677/pm.2020.103029

空间上的数值域可加性成立条件进行研究，利用数值域的酉不变性和正规矩阵数值域恰为其特征值的凸组合等性质，先探讨两个Hermite矩阵的数值域可加性成立的充要条件，其次探讨Hermite矩阵和反Hermite矩阵数值域可加性成立的充要条件，最后给出了二维正规矩阵数值域可加性成立的充要条件，即两个矩阵的特征值对应的特征空间有非空交集且第一个矩阵的特征值连线平行于第二个矩阵的特征值连线。

关键词

数值域可加性，酉不变性，Hermite矩阵，正规矩阵

1. 引言

将二次型理论和 Rayleigh 商从有限维推广至无穷维复 Hilbert 空间所得到的集合称为数值域：设 H 是 $\mathbb{C}$ 上的 Hilbert 空间，线性算子 A 的数值域 $W(A)$ 定义为

$$W(A)=\{(Ax,x):(x,x)=1\}.$$

从学术研究角度来讲，线性算子数值域的研究涉及到纯理论和应用科学的诸多分支，诸如泛函分析、数值分析及量子物理等；此外，关于线性算子数值域的研究方法也十分丰富，包括代数、分析、编程等。因此，线性算子数值域及其相关问题的研究受到了诸多学者的广泛关注。

线性算子数值域的可加性 $W(A+B)=W(A)+W(B)$ 是数值域理论中较为活跃的研究课题，对于 Hilbert 空间中线性算子 A，B 而言，通过 A，B 的点谱 $\sigma_p(A)$，$\sigma_p(B)$ 很难刻画 $\sigma_p(A+B)$ 的信息，然而对于线性算子 A，B 而言，容易证明次可加性成立，即 $W(A+B)\subset W(A)+W(B)$ 成立。此时，运用谱包含性质 $\sigma_p(A+B)\subset W(A+B)$，可得 $\sigma_p(A+B)\subset W(A)+W(B)$。也就是说，如果知道 $W(A)+W(B)$ 的信息，则可以刻画 $\sigma_p(A+B)$ 的分布范围，故线性算子数值域可加性具有深刻的研究意义。

下面介绍证明中所用到的一些结论。

命题 1 [1] **(Toeplitz-Hausdorff)** Hilbert 空间中线性算子 A 的数值域 $W(A)$ 是凸集。

设 $\mathbb{C}_{n\times n}$ 为 $n\times n$ 的复矩阵空间。通过选取 $\mathbb{C}^n$ 上的标准内积，数值域可表示为

$$W(A)=\{x^*Ax:x^*x=1\},$$

再由 Toeplitz-Hausdorff 定理可知 $W(A)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的紧凸集。令 C_1，C_2 为任何实向量空间中的两个凸集，那么 C_1，C_2 的和定义为 $C_1+C_2=\{c_1+c_2:c_1\in C_1,c_2\in C_2\}$，显然 C_1+C_2 也为凸集。由此可见，$W(A)+W(B)$ 也为凸集。

命题 2 [1] 令 $A\in\mathbb{C}_{n\times n}$，那么

(a) $W(aA+bI)=aW(A)+b$，对于所有 $a,b\in\mathbb{C}$。

(b) $W(U^*AU)=W(A)$，其中 $U\in\mathbb{C}_{n\times n}$ 是酉算子，即 $U^*U=UU^*=I$。

(c) $\sigma(A)\subset W(A)$。

(d) 设 $A\in\mathbb{C}_{2\times 2}$ 有特征值 λ_1，λ_2，那么 $W(A)$ 为以 λ_1，λ_2 为焦点，以 $\left\{\mathrm{tr}(A^*A)-|\lambda_1|^2-|\lambda_2|^2\right\}^{1/2}$ 为短轴

长的椭圆。若 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$，那么椭圆 $W(A)$ 的短轴长为 $|b|$。

命题 3 [1] 设 $A\in\mathbb{C}_{n\times n}$ 是正规矩阵，则存在酉矩阵 $U\in\mathbb{C}_{n\times n}$ 使得

$$U^*AU=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值。

2. 主要结论

定理 1 设 $A,B\in\mathbb{C}_{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵，$\alpha_m,\alpha_M\in\mathbb{R}$ 是 A 的最小和最大特征值，$\beta_m,\beta_M\in\mathbb{R}$ 是 B 的最小和最大特征值，那么 $W(A+B)=W(A)+W(B)$ 当且仅当 A 的特征空间 E_{α_m} 与 B 的特征空间 E_{β_m} 有非空交集，A 的特征空间 E_{α_M} 与 B 的特征空间 E_{β_M} 有非空交集。

证明 先证充分性。假设 α_m 为 Hermite 矩阵 A 的最小特征值，β_m 为 Hermite 矩阵 B 的最小特征值，则对任意的单位向量 $x_0\in\mathbb{C}^n$ 有 $x_0^*Ax_0\ge\alpha_m$，$x_0^*Bx_0\ge\beta_m$，故有

$$x_0^*(A+B)x_0=x_0^*Ax_0+x_0^*Bx_0\ge\alpha_m+\beta_m,$$

此式表明 $\alpha_m+\beta_m$ 是 $A+B$ 特征值的下界。下证 $A+B$ 的最小特征值即为 $\alpha_m+\beta_m$。已知特征空间 E_{α_m} 与 B 的特征空间 E_{β_m} 有非空交集，设单位向量 $x_m\in E_{\alpha_m}\cap E_{\beta_m}$，则成立 $x_m^*Ax_m=\alpha_m$，$x_m^*Bx_m=\beta_m$，故有

$$x_m^*Ax_m+x_m^*Bx_m=x_m^*(A+B)x_m=\alpha_m+\beta_m,$$

所以 $\alpha_m+\beta_m$ 为 $A+B$ 的最小特征值，同理可证 $\alpha_M+\beta_M$ 为 $A+B$ 的最大特征值，而 $A+B$ 为 Hermite 矩阵，故有

$$W(A+B)=[\alpha_m+\beta_m,\alpha_M+\beta_M].$$

又由于 $W(A)=[\alpha_m,\alpha_M]$，$W(B)=[\beta_m,\beta_M]$ 均为凸集，则 $W(A)+W(B)=[\alpha_m+\beta_m,\alpha_M+\beta_M]$。由此可得 $W(A+B)=W(A)+W(B)$。

再证必要性。如果 $W(A+B)=W(A)+W(B)$，那么

$$W(A)+W(B)=[\alpha_m+\beta_m,\alpha_M+\beta_M]=W(A+B).$$

这表明 $\alpha_m+\beta_m$ 和 $\alpha_M+\beta_M$ 分别是 $A+B$ 的最小和最大特征值，则存在单位向量 $x_m\in\mathbb{C}^n$ 使得 $(A+B)x_m=(\alpha_m+\beta_m)x_m$，故有

$$x_m^*(A+B)x_m=x_m^*Ax_m+x_m^*Bx_m=\alpha_m+\beta_m,$$

而由 $x_m^*Ax_m\ge\alpha_m$，$x_m^*Bx_m\ge\beta_m$ 可得 $x_m^*Ax_m=\alpha_m$，$x_m^*Bx_m=\beta_m$。因此 x_m 是关于 A 的特征值 α_m 与 B 的特征值 β_m 的共同的特征向量，故 $x_m\in E_{\alpha_m}\cap E_{\beta_m}\ne\varnothing$，同理可得 $E_{\alpha_M}\cap E_{\beta_M}\ne\varnothing$。□

定理 2 设 $A\in\mathbb{C}_{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵，$B\in\mathbb{C}_{n\times n}$ 是反 Hermite 矩阵，$\alpha_m,\alpha_M\in\mathbb{R}$ 是 A 的最小和最大特征值，$\beta_m,\beta_M\in\mathbb{R}$ 是 $-iB$ 的最小和最大特征值，那么 $W(A+B)=W(A)+W(B)$ 当且仅当 A 的特征空间 E_{α_m} 和 $-iB$ 的每一个特征空间 E_{β_m}，E_{β_M} 都有非空交集且 A 的特征空间 E_{α_M} 和 $-iB$ 的每一个特征空间 E_{β_m}，E_{β_M} 都有非空交集。

证明 先证充分性。因为 $-iB$ 是 Hermite 矩阵且 β_m，β_M 是 $-iB$ 的最小和最大特征值，故 $W(-iB)=[\beta_m,\beta_M]$，即 $W(B)=[i\beta_m,i\beta_M]$。由于 A 的特征空间 E_{α_m} 与 $-iB$ 的特征空间 E_{β_m} 交集非空，则存在单位向量 $x_m\in E_{\alpha_m}\cap E_{\beta_m}$，使得 $Ax_m=\alpha_m x_m$，$-iBx_m=\beta_m x_m$ (即 $Bx_m=i\beta_m x_m$)成立。将两式相加得

$$Ax_m + Bx_m = \alpha_m x_m + i\beta_m x_m = (\alpha_m + i\beta_m)x_m,$$

此式表明 $\alpha_m + i\beta_m$ 为 $A+B$ 的特征值。同理可知 $\alpha_m + i\beta_M$，$\alpha_M + i\beta_m$，$\alpha_M + i\beta_M$ 均为 $A+B$ 的特征值，而 $W(A+B)$ 一定包含此四个特征值的凸包，即

$$W(A+B) \supseteq [\alpha_m, \alpha_M] \times [i\beta_m, i\beta_M].$$

又由于 $W(A) = [\alpha_m, \alpha_M]$，$W(B) = [i\beta_m, i\beta_M]$ 均为凸集，则 $W(A)+W(B) = [\alpha_m, \alpha_M] \times [i\beta_m, i\beta_M]$，即 $W(A+B) \supseteq W(A)+W(B)$，再结合次可加性 $W(A+B) \subseteq W(A)+W(B)$，可得 $W(A+B) = W(A)+W(B)$。

再证必要性。如果 $W(A+B) = W(A)+W(B)$，那么

$$W(A+B) = [\alpha_m, \alpha_M] \times [i\beta_m, i\beta_M] = W(A)+W(B).$$

这表明 $\alpha_m + i\beta_m$，$\alpha_m + i\beta_M$，$\alpha_M + i\beta_m$ 和 $\alpha_M + i\beta_M$ 是 $A+B$ 的特征值，则有单位向量 $x_m \in \mathbb{C}^n$ 使得 $(A+B)x_m = (\alpha_m + i\beta_m)x_m$，因此

$$x_m^*(A+B)x_m = x_m^* A x_m + x_m^* B x_m = \alpha_m + i\beta_m,$$

而由 $x_m^* A x_m \ge \alpha_m$，$|x_m^* B x_m| \ge |i\beta_m|$ 可得 $x_m^* A x_m = \alpha_m$，$x_m^* B x_m = i\beta_m$（即 $x_m^*(-iB)x_m = \beta_m$）。因此 x_m 是关于 A 的特征值 α_m 与 $-iB$ 的特征值 β_m 的共同的特征向量，故 $x_m \in E_{\alpha_m} \cap E_{\beta_m} \neq \varnothing$。同理有 $E_{\alpha_m} \cap E_{\beta_M} \neq \varnothing$，$E_{\alpha_M} \cap E_{\beta_m} \neq \varnothing$ 和 $E_{\alpha_M} \cap E_{\beta_M} \neq \varnothing$。□

定理 3 设 $A, B \in \mathbb{C}_{2\times 2}$ 是正规矩阵，$\alpha_m, \alpha_M \in \mathbb{C}$ 是 A 的两个特征值，$\beta_m, \beta_M \in \mathbb{C}$ 是 B 的两个特征值，那么 $W(A+B) = W(A)+W(B)$ 当且仅当 A 的特征空间 E_{α_m} 与 B 的特征空间 E_{β_m} 有非空交集，A 的特征空间 E_{α_M} 与 B 的特征空间 E_{β_M} 有非空交集，且线段 $[\alpha_m, \alpha_M]$ 与线段 $[\beta_m, \beta_M]$ 平行。

证明 先证充分性。假设 A 的特征空间 E_{α_m} 与 B 的特征空间 E_{β_m} 有非空交集，则有单位向量 $x_m \in E_{\alpha_m} \cap E_{\beta_m}$，使得 $Ax_m = \alpha_m x_m$，$Bx_m = \beta_m x_m$。两式相加得 $(A+B)x_m = (\alpha_m + \beta_m)x_m$，这表明 $\alpha_m + \beta_m$ 是 $A+B$ 的一个特征值，同理可知 $\alpha_M + \beta_M$ 也是 $A+B$ 的特征值。由命题 3 和数值域的酉不变性，有

$$W(A+B) = W(diag(\alpha_m + \beta_m, \alpha_M + \beta_M)) = [\alpha_m + \beta_m, \alpha_M + \beta_M],$$

注意此处 $[\alpha_m + \beta_m, \alpha_M + \beta_M]$ 表示复平面上连接点 $\alpha_m + \beta_m$ 和点 $\alpha_M + \beta_M$ 的线段，而

$$W(A)+W(B) = W(diag(\alpha_m, \alpha_M)) + W(diag(\beta_m, \beta_M)) = [\alpha_m, \alpha_M] + [\beta_m, \beta_M].$$

由已知 $[\alpha_m, \alpha_M]$ 和 $[\beta_m, \beta_M]$ 平行，可得 $W(A)+W(B) = [\alpha_m + \beta_m, \alpha_M + \beta_M]$。综上有 $W(A+B) = W(A)+W(B)$。

再证必要性。由于 $A, B, A+B$ 均为二阶正规矩阵，所以 $W(A) = [\alpha_m, \alpha_M]$，$W(B) = [\beta_m, \beta_M]$，$W(A+B) = [\gamma_1, \gamma_2]$ 均为线段，其中 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ 为 $A+B$ 的两个特征值。若 $[\alpha_m, \alpha_M]$ 与 $[\beta_m, \beta_M]$ 不是平行的，那么 $W(A)+W(B)$ 一定不是线段，故 $[\alpha_m, \alpha_M]$ 与 $[\beta_m, \beta_M]$ 平行，从而 $W(A)+W(B) = [\alpha_m + \beta_m, \alpha_M + \beta_M]$。存在 $c, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$，$l \in \mathbb{R}$ 使得 $A = cA_1 + c_1 I$，$B = lcB_1 + c_2 I$，其中 A_1, B_1 均为 Hermite 矩阵。易知 $W(A) = cW(A_1) + c_1$，$W(B) = lcW(B_1) + c_2$，$W(A+B) = cW(A_1 + lB_1) + c_1 + c_2$，再由可加性 $W(A+B) = W(A)+W(B)$ 成立可知，有

$$cW(A_1) + c_1 + cW(lB_1) + c_2 = cW(A_1 + lB_1) + c_1 + c_2,$$

即 $W(A_1) + W(lB_1) = W(A_1 + lB_1)$。不妨设 $W(A_1) = [a_1, a_2]$，$W(lB_1) = [b_1, b_2]$ 且有 $\alpha_m = ca_1 + c_1$，$\alpha_M = ca_2 + c_1$，$\beta_m = cb_1 + c_2$，$\beta_M = cb_2 + c_2$，由定理 1 的必要性推导过程可知 $E_{a_1} \cap E_{b_1} \neq \varnothing$，$E_{a_2} \cap E_{b_2} \neq \varnothing$。

下面证明 $E_{a_1}=E_{\alpha_m}$，任取 a_1 的单位特征向量 $x_0\in\mathbb{C}^n$，则有 $A_1x_0=a_1x_0$，而

$$cA_1x_0+c_1Ix_0=ca_1x_0+c_1x_0=\left(ca_1+c_1\right)x_0,$$

即 $Ax_0=\alpha_m x_0$，则 $x_0\in E_{\alpha_m}$。类似可证明 $E_{a_2}=E_{\alpha_M}$，$E_{b_1}=E_{\beta_m}$，$E_{b_2}=E_{\beta_M}$。故可得 $E_{\alpha_m}\cap E_{\beta_m}\neq\varnothing$，$E_{\alpha_M}\cap E_{\beta_M}\neq\varnothing$。 □

基金项目

内蒙古大学校级大学生创新创业训练计划资助项目(项目编号：201911225)；内蒙自然科学基金(2019MS01019)资助项目。

参考文献

[1] 吴德玉, 阿拉坦仓, 黄俊杰, 海国军. Hilbert 空间中线性算子数值域及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2018.